

4ème

Quatrième année de l'enseignement secondaire

BAC

Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

- Résumés de Cours
- Exercices

+ Corrigés Détaillés
de tous les exercices

Section
Mathématiques



MATHÉMATIQUES

4éme Année

Section mathématiques

- ***Résumés***
- ***Exercices***
- ***Corrigé des exercices***

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur Principal
des écoles préparatoires et des lycées

Sami Ben Rhim
Professeur d'enseignement
Secondaire

Mohamed Ben Brahim
Professeur principal

Abdelbasset Laataoui
Professeur Principal

© **Kounouz Editions**

Adresse : 123, Avenue Habib Thameur

Nabeul – 8000 Tunisie

Tél : (+216) 72 223 822

Fax : (+216) 72 223 922

E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn

Site Web : www.Kounouz-Edition.com

Avant-propos

✦ Ce manuel est conçu dont :

- la simplicité d'utilisation favorise le travail en autonomie de l'élève.
- l'accessibilité tient compte des attentes diverses des élèves.
- la variété des situations et des exercices permet de développer les notions.

✦ Chaque chapitre se décompose de la façon suivante :

- un résumé du cours écrit dans un langage simple, suivi d'un exemple et / ou d'une méthode pour mettre en pratique la notion.
- Des exercices dans quatre rubriques :

  ➭ ***QCM*** : permet de vérifier l'acquisition des savoirs et la maîtrise des savoir- faire.

  ➭ ***Appliquer*** : l'élève dispose ainsi en vis à- vis d'outils favorisant l'acquisition des savoirs et des savoir- faire.

  ➭ ***S'entraîner et se perfectionner*** : offrent des exercices dans lesquels sont mis en œuvre les diverses notions du chapitre dans une démarche plus approfondie ou en les associant à d'autres notions abordés précédemment. Leur nombre et leur variété permettent de répondre aux différents besoins des élèves.

Les auteurs

ANALYSE

Continuité et limites

I) Résumé du cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I.

On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x_0} f = f(x_0)$

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I et k un réel.

☛ Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions f + g, fg, et kf sont continues en x_0.

☛ Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

☛ Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

☛ Si de plus f est positive sur I et si f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

A) Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

B) Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

C) Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 Par valeurs supérieures	0 Par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

D) Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

E) Règles opératoires

- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation $y = L$ est ***asymptote horizontale*** à la courbe Cf en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est ***asymptote verticale*** à la courbe Cf .
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la courbe Cf en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors C_f admet une ***branche parabolique de direction (Oy)***. (type x^2).

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une ***branche parabolique de direction (Ox)***. (type$\sqrt{x}$).
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation y = a x + b est **asymptote oblique** à C en $\pm\infty$.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors C_f admet une **branche parabolique de direction la droite**
- **d'équation y = ax** en $\pm\infty$.

Théorème :

☛ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence :

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur I} \\ g \text{ est continue sur J} \\ f(I) \subset J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème :

☛ Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$.

Théorème :

☛ Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.

Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim_a h = \lim_a g = \ell$, alors $\lim_a f = \ell$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim_a g = +\infty$, alors $\lim_a f = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim_a g = -\infty$, alors $\lim_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

☛ Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

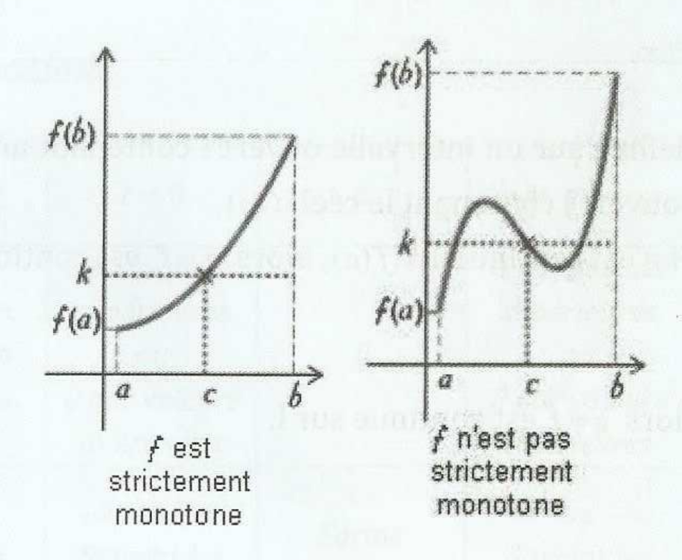
Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

On peut aussi l'exprimer sous la forme : L'équation $f(x)=k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

En particulier, si $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.

Si de plus f est <u>strictement monotone</u> sur I, alors <u>c est unique</u>.



<u>Conséquence :</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

<u>Théorème :</u>

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

F) Cas des fonctions monotones :

<u>Théorème :</u>

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).
  - Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
  - Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

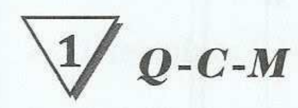
<u>Théorème :</u>

- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

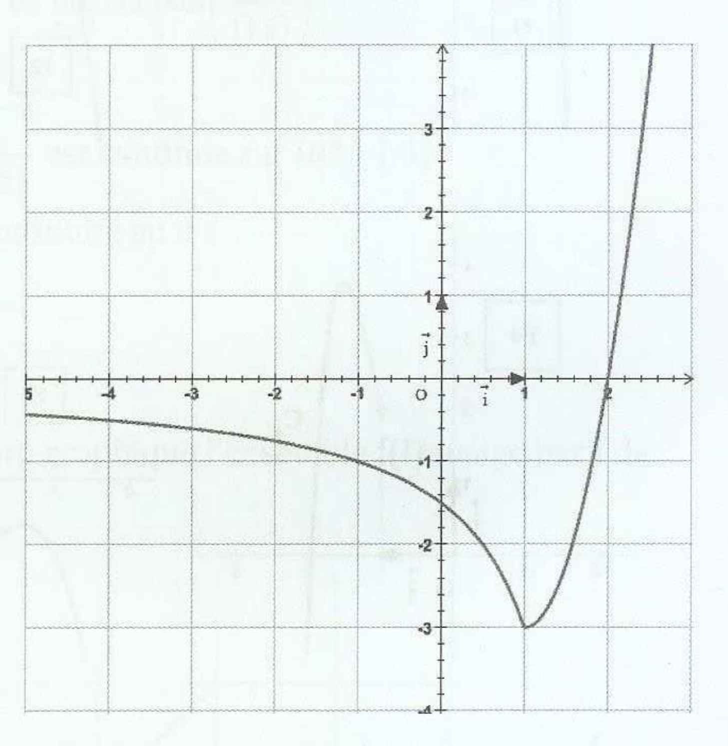
Exemples :

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$

II) Exercices



1 Q-C-M

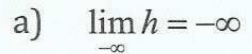


La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.

On note que (ζ_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Pour chaque question indiquer la ou les réponses exactes :

1) Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq h(x)$. On a alors :



a) $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$

b) $\lim\limits_{-\infty} h = 0$

c) $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

2) Soit $g = \frac{1}{f}$. On a alors :

a) g est définie sur IR* ; b) g est définie sur IR\{2} ; c) $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$; d) $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

d) (ζ_g) admet une asymptote verticale.

3) Soit k la fonction définie sur IR* par : $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors :

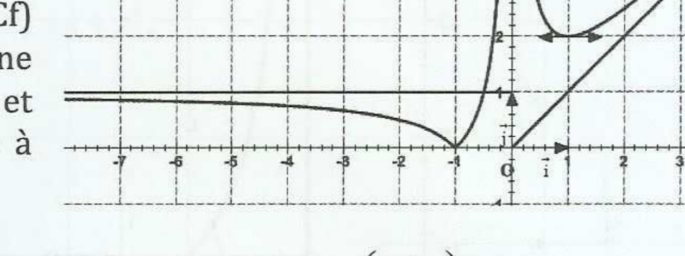
a) $\lim\limits_{+\infty} f \circ k = -3$; b) $\lim\limits_{+\infty} k \circ f = 1$; c) $\lim\limits_{-\infty} f \circ k = -3$; d) $\lim\limits_{0^+} f \circ k = +\infty$; e) $\lim\limits_{0^-} f \circ k = -\infty$

2 *Q-C-M*

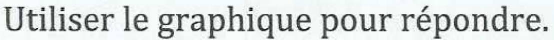
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. C_f est la représentation graphique d'une fonction f :



2 APPLIQUER



Dans le graphique ci-contre, on a représenté la courbe (Cf) d'une fonction f définie sur IR*.
La droite Δ : y = x est une asymptote à (Cf) au voisinage de + ∞, la droite y = 1 est une asymptote à (Cf) au voisinage de - ∞ et l'axe des ordonnées est une asymptote à (Cf) à droite et à gauche en 0.

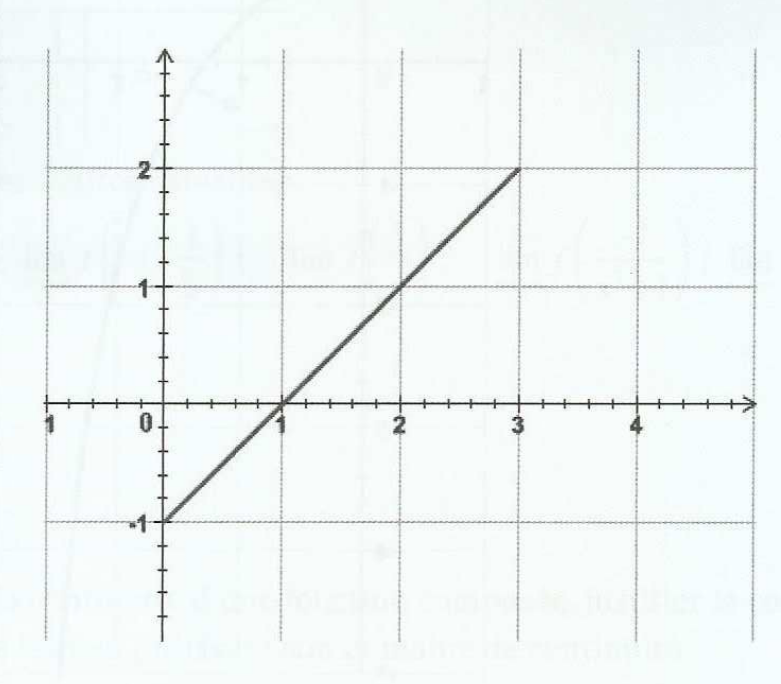

Utiliser le graphique pour répondre.

1. Déterminer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to-1} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim_{x\to0} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.
2. Déterminer f(]- ∞, - 1]), f([-1, 0[) et f(]0, 1]).
3. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ est continue sur IR* \ {-1}.
4. La fonction g admet elle un prolongement par continuité en 0 ?

3 APPLIQUER

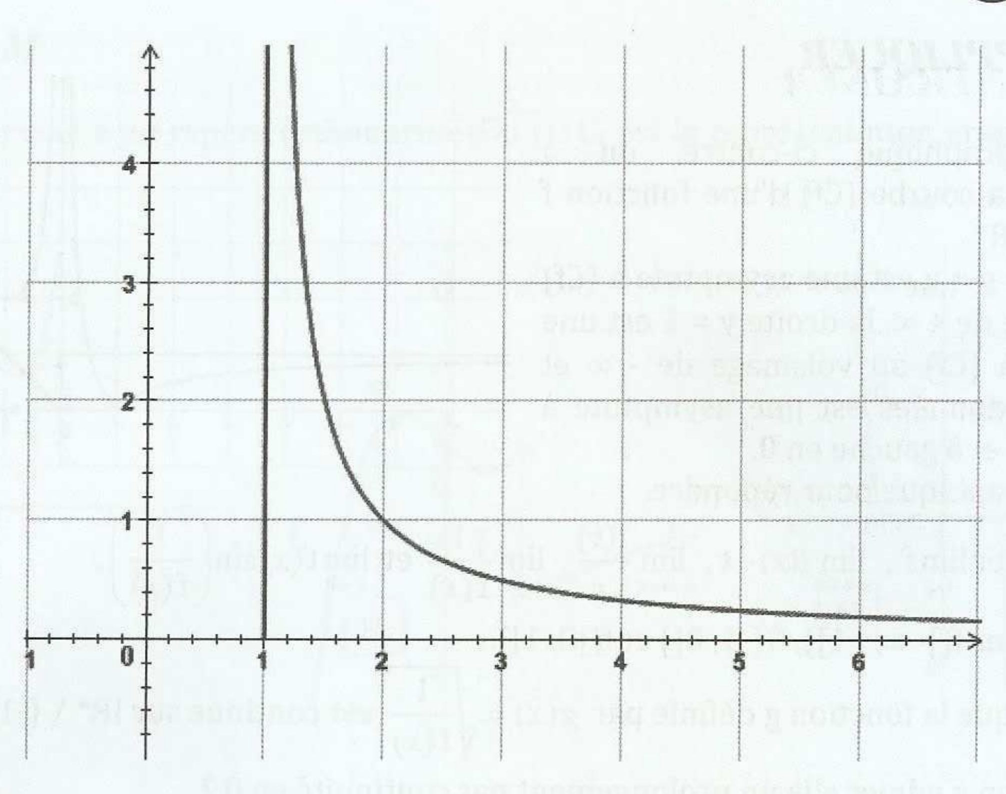
Dans chacun des cas suivants, déterminer par lecture graphique l'ensemble f(I) image par f de l'intervalle I.

1)



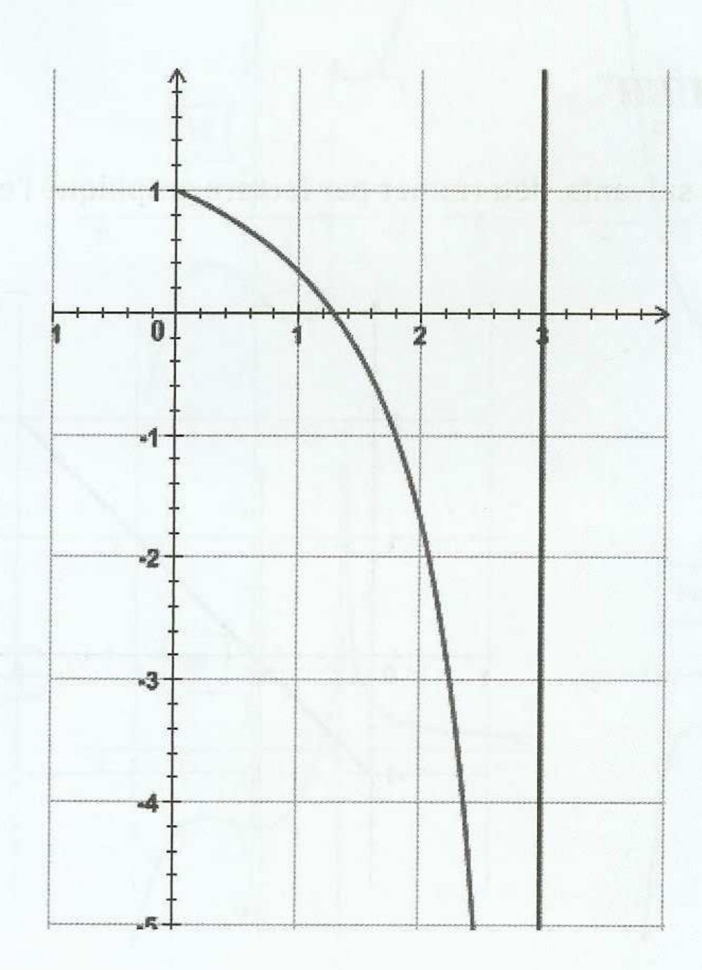
I = [0, 3].

2)



I =]1, + ∞[.

3)



I =]0, 3[.



S'ENTRAINER

1) Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$, $\forall\, x \in$ IR*.

a) Montrer que : $\forall x \in IR^*, 1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$.

b) Chercher $\lim\limits_{0} f$.

c) Chercher $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

2) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x + \sin x}{2 - \sin x}$, $\forall\, x \in$ IR.

a) Montrer que : $\begin{cases} \forall x > 1, \ \dfrac{x-1}{3} \le g(x) \le x+1 \\ \forall x < -1, \ x - 1 \le g(x) \le \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

b) Chercher $\lim\limits_{+\infty} g$ et $\lim\limits_{-\infty} g$

6 S'ENTRAINER

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.



S'ENTRAINER

En appliquant le théorème sur la continuité d'une fonction composée, justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes tout en précisant son domaine de continuité.

1) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

2) $f(x)=\cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

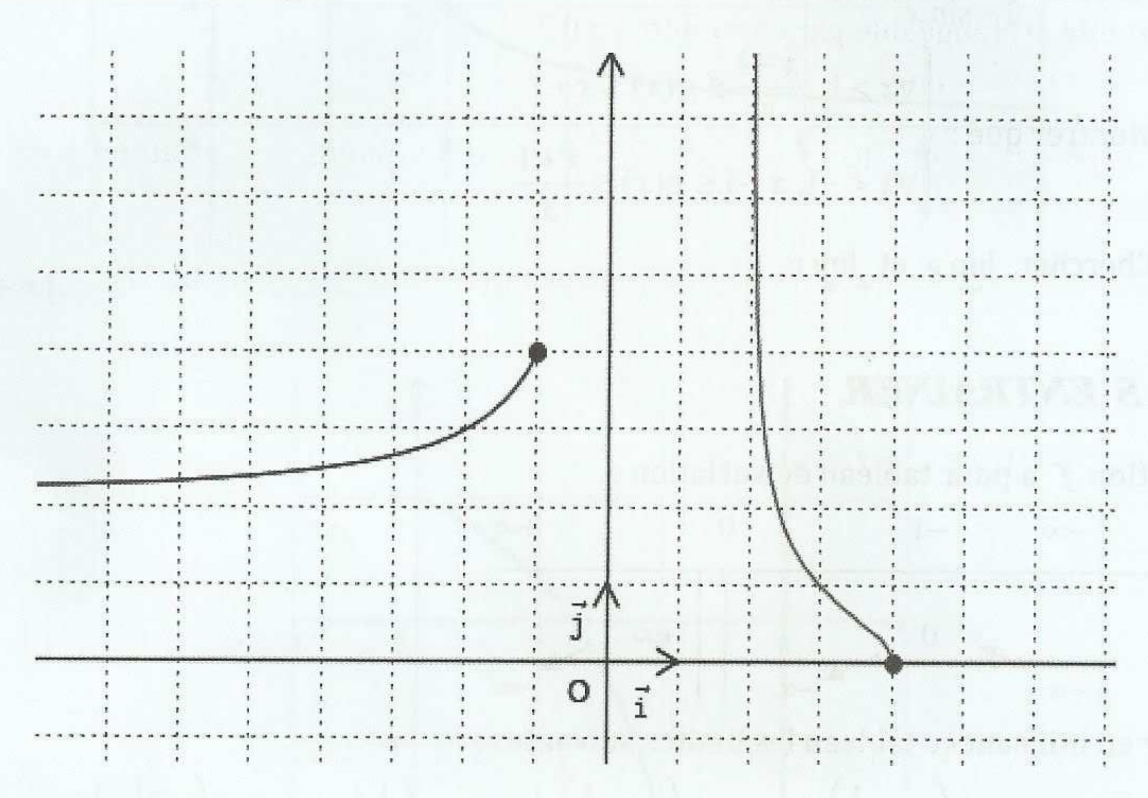
3) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

4) $f(x)=\cot g\left(\pi\left(2x-\frac{3}{4}\right)\right)$



8 S'ENTRAINER

Dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, ci – dessous, est tracée les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g.



La fonction f est définie sur] - ∞, - 1] et
la fonction g est définie sur]2, 4].

1) Donner graphiquement :
f (-1), f (-2), g (4), g (3), $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{2^+} g$.

2) En déduire g o f([-2, -1]) et $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.

3) Etudier le sens de variation de g o f sur]-∞, -1].

4) Prouver que l'équation
g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.



SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq x^3$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

2) a) Justifier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation : $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \dfrac{1+x^2}{x^3}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.

3) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \pi$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.



SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} -2+\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ 2x^3-3x^2-1 & \text{si } x\in[0,2] \\ 2x-\sqrt{x^2-x-1} & \text{si } x\in]2,+\infty[\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty,0[$, on a : $-2+\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq -2-\dfrac{1}{x}$.

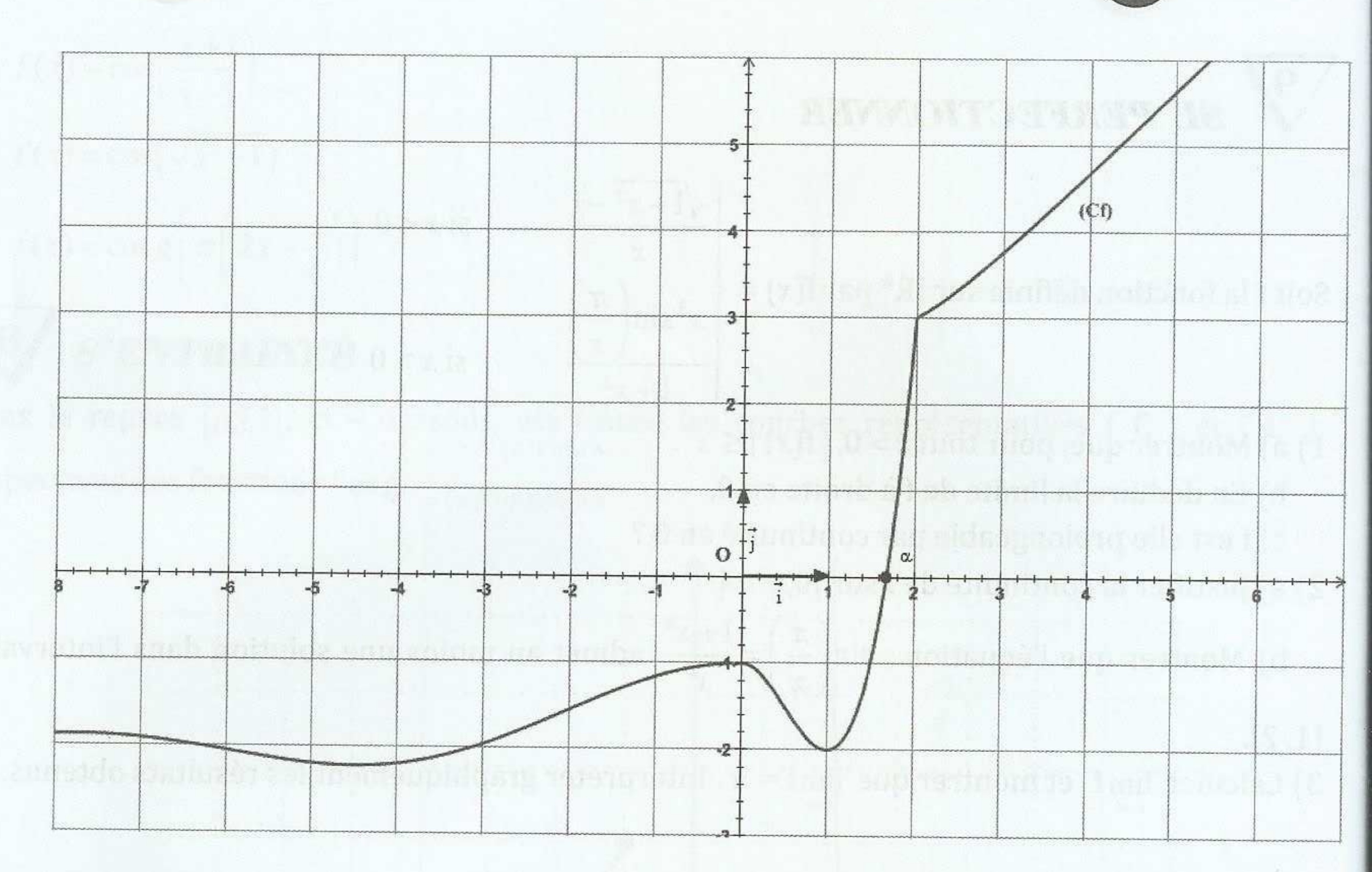
b) En déduire la limite en $-\infty$ de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

3) Montrer que f est continue en chacun des réels 0 et 2.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,2]$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.



c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in [0,2]$. Vérifier que $1.6 < \alpha < 1.7$.

5) On donne ci - dessous (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Répondre aux questions suivantes, en utilisant le graphique :

a) Donner le signe de f suivant les valeurs de x.

b) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Déterminer les images de chacun des intervalles suivants : $[0,2]$ et $]2,+\infty[$.

1 Q-C-M

Réponses	Commentaires
1. Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq h(x)$. On a alors : $\lim_{-\infty} h = 0$ $\lim_{+\infty} h = +\infty$	$\forall\, x \in\,]-\infty, 2]$, on a : $f(x) \leq h(x) \leq 0$ $\lim_{-\infty} f = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{-\infty} h = 0}$ $\forall\, x \in [2, +\infty[$, on a : $0 \leq f(x) \leq h(x)$ $\lim_{+\infty} f = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} h = +\infty}$
2. Soit $g = \frac{1}{f}$. On a alors : g est définie sur IR\{2} $\lim_{-\infty} g = -\infty$ (ζ_g) admet une asymptote verticale	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc $g = \frac{1}{f}$ est définie sur IR \{2} $\lim_{-\infty} f = 0^- \Rightarrow$ $\lim_{-\infty} g = \lim_{-\infty} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$ $\left.\begin{array}{l}\lim_{2^-} g = \lim_{2^-} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \\ \lim_{2^+} g = \lim_{2^+} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty\end{array}\right\}$ →La droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (ζ_g)
3. Soit k la fonction définie sur IR* par : $k(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors : $\lim_{+\infty} f \circ k = -3$ $\lim_{+\infty} k \circ f = 1$ $\lim_{0^+} f \circ k = +\infty$	$\lim_{+\infty} k = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{\cancel{x}} = 1$ $\lim_{1} f = f(1) = -3 \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f \circ k = -3}$ $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} k = 1$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} k \circ f = 1}$ $\lim_{0^+} k = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{0^+} f \circ k = +\infty}$

■ **F_1 :** •f n'est pas définie en 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{f n'est pas continue en 1} \\ \text{f n'est pas continue à gauche en 1} \\ \text{f n'est pas continue à droite en 1} \end{cases}$$

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 2$

■ **F_2 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = □1

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à gauche en 1.

⇒f n'est pas continue en 1.

■ **F_3 :** •f n'est pas définie en 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{f n'est pas continue en 1} \\ \text{f n'est pas continue à gauche en 1} \\ \text{f n'est pas continue à droite en 1} \end{cases}$$

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

donc $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

■ **F_4 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 2

•f n'est pas continue en 1

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

■ **F_5 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 1

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à droite en 1.

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = -1 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à gauche en 1.

⇒f n'est pas continue en 1.

■ **F_6 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = □1

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à gauche en 1.

⇒f est pas continue en 1.

■ **F_7 :** •f n'est pas définie en 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{f n'est pas continue en 1} \\ \text{f n'est pas continue à gauche en 1} \\ \text{f n'est pas continue à droite en 1} \end{cases}$$

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

■ **F_8 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 1

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à gauche en 1.

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à droite en 1.

⇒f n'est pas continue en 1.

■ **F_9 :** •f n'est pas définie en 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{f n'est pas continue en 1} \\ \text{f n'est pas continue à gauche en 1} \\ \text{f n'est pas continue à droite en 1} \end{cases}$$

• $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1$



APPLIQUER

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2-3x}}_{+\infty}+\underbrace{2x}_{-\infty}$ c'est une forme indéterminée

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}+2x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{|x|}_{-x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}+2x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}}+2\right)=\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\sqrt{x^2-3x}}_{+\infty}+\underbrace{x}_{-\infty}$: F ind

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{3x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}=\frac{1}{3}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}$: F ind

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{\text{On pose } X=\frac{1}{x}}{=}\lim_{X\to0^+}\frac{\sin X}{X}=1$$



APPLIQUER

1. $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{1}{-\infty}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{f(x)}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$ et

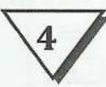
$$\lim_{x\to0}f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\overbrace{\frac{1}{f(x)}}^{\nearrow 0}\right)}{\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\searrow 0}}=1$$

2. $f(]-\infty,-1])=[0,1[$, $f([-1,0[)=[0,+\infty[$ et $f(]0,1])=[2,+\infty[$.

3. $g(x)=\sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ existe, si et seulement si $x\in IR^*$ et $f(x)\neq0\Leftrightarrow x\in IR^*\setminus\{-1\}$

$\frac{1}{f}$ est continue et positive sur $IR^*\setminus\{-1\}\Rightarrow g$ est continue sur $IR^*\setminus\{-1\}$.

4. $\lim\limits_{0}g=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{1}{\underbrace{f(x)}_{+\infty}}}=0\Rightarrow g$ admet un prolongement par continuité en 0.



APPLIQUER

1. $f([0,3])=[-1,2]$
2. $f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[$
3. $f(]0,3[)=]-\infty,1[$

5 S'ENTRAINER

a) $\forall x\in IR,\ -1\le\sin x\le1$

$\Rightarrow\forall x\in IR,\ x-1\le x+\sin x\le x+1$

$\forall x\in IR,\ 1\le2-\sin x\le3\Rightarrow\forall x\in IR,\ \frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le1$

$\forall\ x>1,\ 0<x-1\le x+\sin x\le x+1$ et

$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le1\Rightarrow\forall\ x>1,\ \frac{x-1}{3}\le f(x)\le x+1$

$\forall\ x<-1,\ x-1\le x+\sin x\le x+1<0$ et

$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le1\Rightarrow\forall\ x<-1,\ x-1\le f(x)\le\frac{x+1}{3}$

b) $\forall\ x>1,\ \frac{x-1}{3}\le f(x)\le x+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\forall \ x < -1,\ x - 1 \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$ alors

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

6 S'ENTRAINER

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right) = -\infty$; $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \dfrac{1}{x} = (-1)^{+} \Rightarrow \\ \lim\limits_{(-1)^{+}} f = f(-1) = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -1 + \dfrac{1}{x} = (-1)^{-} \\ \lim\limits_{(-1)^{-}} f = f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{-}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^{-}} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2+1} = 0^{-} \Rightarrow \\ \lim\limits_{0^{-}} f = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right) = -\infty$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-x^2}{2+x^2} = -1 \\ \lim\limits_{-1} f = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right) = 0$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{2x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right) = -\infty$

7 S'ENTRAINER

1. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right)$

f est définie sur IR \ $\left\{\dfrac{3}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right) \text{ est continue sur IR} \backslash \left\{\dfrac{3}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \tan \text{ est continue sur IR} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ u\left(\text{IR} \backslash \left\{\dfrac{3}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \subset \text{IR} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ = tan o u est continue sur IR \ $\left\{\dfrac{3}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; f est définie sur IR \ {1}

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \dfrac{x+1}{x-1}\right) \text{ est continue sur IR} \backslash \{1\} \\ \cos \text{ est continue sur IR} \\ u\left(\text{IR} \backslash \{1\}\right) \subset \text{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ = cos o u est continue sur IR \ {1}

3. $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$; f est définie sur

$\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ est continue sur } \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\\ \cos \text{ est continue sur IR} \\ u\left(\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\right) \subset \text{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ = cos o u est continue sur $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$

4. $f(x) = \cot g\left(\pi\left(2x - \dfrac{3}{4}\right)\right)$; f est définie sur

IR \ $\left\{\dfrac{3}{8} + \dfrac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \pi\left(2x - \dfrac{3}{4}\right)\right) \text{ est continue sur IR} \backslash \left\{\dfrac{3}{8} + \dfrac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ co\,t\,g \text{ est continue sur IR} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ u\left(\text{IR} \backslash \left\{\dfrac{3}{8} + \dfrac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \subset \text{IR} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ = cotg o u est continue sur IR \ $\left\{\dfrac{3}{8} + \dfrac{k}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

8 S'ENTRAINER

1. f(-1) = 4 ; f(-2) = 3 ; g(4) = 0 ; g(3) = 1 et $\lim\limits_{2^{+}} g = +\infty$

2. g o f([-2, -1]) = g(f([-2,1])) = g([3,4]) = [0,1] et

$\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2^{+} \\ \lim\limits_{2^{+}} g = +\infty \end{cases}$

3. f est strictement croissante sur]-∞, -1] et g est strictement décroissante sur]2,4]

⇒ g o f est strictement décroissante sur]-∞, -1]

4. $\begin{cases} \text{f est continue sur } \left]-\infty, -1\right] \\ g \text{ est continue sur } \left]2, 4\right] \\ \text{f}\left(\left]-\infty, -1\right]\right) = \left]2, 4\right] \end{cases}$

$\Rightarrow g \circ$ f est continue sur $\left]-\infty, -1\right]$

en particulier sur [-2, -1]

$g\circ f(-1)=0<\frac{1}{2}<g\circ f(-2)=1$

g o f est strictement décroissante sur [-2, -1]

⇒ l'équation g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0\\ \frac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. a) $\forall x>0, |f(x)|=\frac{x^3}{1+x^2}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|}_{\leq 1}\leq\frac{x^3}{1+x^2}\leq x^3$

b) $\forall x>0, |f(x)|\leq x^3$ et $\lim_{x\to 0^+}x^3=0\Rightarrow$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$

c) $\lim_{0^-}f=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$

$\lim_{0^-}f=\lim_{0^+}f=0\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 0 et on a :

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0\\ \frac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0

2. a) $\forall x>0, f(x)=\frac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2}$,

3. on pose $u(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ et $v(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$

v est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition IR en particulier sur]0, + ∞[

$\left(x\mapsto\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur IR*, en particulier sur]0, + ∞[

$\Rightarrow\left(x\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$ est continue sur]0, + ∞[

f = u + v est continue sur]0, + ∞[

b) $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\frac{1+x^2}{x^3}\Leftrightarrow\frac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2}=1\Leftrightarrow f(x)=1$

f est continue sur]0, + ∞[, en particulier sur [1, 2]

f(1) = 0 et $f(2)=\frac{8}{5}$; $0<1<\frac{8}{5}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 1 admet au moins une solution dans [1, 2]

c) $\lim_{-\infty}f=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{x}$

d) $=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1=-2$

⇒ la droite d'équation y = - 2 est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de - ∞

$\lim_{+\infty}f=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\to 1}\times\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}_{\to\pi}=\pi$

⇒ la droite d'équation y = π est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de + ∞

10 SE PERFECTIONNER

$$f(x)=\begin{cases}-2+\frac{\sin x}{x} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 2x^3-3x^2-1 & \text{si } x\in[0,2]\\ 2x-\sqrt{x^2-x-1} & \text{si } x\in\,]2,+\infty[\end{cases}$$

1. <u>Calcul de la limite en - ∞ de *f*</u>: les règles de calculs de limites sont inapplicables ici puisque la fonction sinus n'a pas de limite en - ∞ donc a recourt aux encadrements.

a) ∀ x ∈ IR, on a : $-1\leq\sin x\leq 1\Rightarrow\forall x<0$,

$\frac{1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq-\frac{1}{x}\Rightarrow-2+\frac{1}{x}\leq-2+\frac{\sin x}{x}\leq-2-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow\forall x<0,\ -2+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq -2-\frac{1}{x}$

b) $\forall x<0,\ -2+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq -2-\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}-2+\frac{1}{x}=-2$ $\lim_{x\to-\infty}-2-\frac{1}{x}=-2$

$\Rightarrow \lim_{-\infty} f = -2$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - x - 1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(2 - \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)}_{1} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x - 1} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x + \sqrt{x^2-x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)} = \frac{1}{2}.$

<u>NB :</u> $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ La droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. <u>Continuité de f en 0 et en 2</u> :

- $\lim_{0^-} f = \lim_{x\to 0^-} -2 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} = -1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 0.

$\lim_{0^+} f = \lim_{x\to 0^+} 2x^3 - 3x^2 - 1 = -1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

Ainsi f est continue en 0.

- $\lim_{2^-} f = \lim_{x\to 2^-} 2x^3 - 3x^2 - 1 = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 2.

$\lim_{2^+} f = \lim_{x\to 2^+} \underbrace{2x}_{4} - \sqrt{\underbrace{x^2 - x - 1}_{1}} = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à droite en 2.

Ainsi f est continue en 2.

4. a) $\forall x \in [0, 2]$,

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

b)

x	0		1		2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	3

c) <u>Equation $f(x) = 0$ dans $[0, 2]$</u> :

- $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [-2, -1]$ (image d'un intervalle par une fonction continue strictement décroissante)

$0 \notin [-2, -1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $[0, 1]$

- f est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$ donc f réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[-2, 3]$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$

- $f(1.6) = -0.488 < 0$ et $f(1.7) = 0.156 > 0$

$\Rightarrow 1.6 < \alpha < 1.7$

5. <u>Lecture graphique</u> :

a)

x	$-\infty$		α		$-\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) <u>Limite d'une fonction composée</u> :

- $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{+\infty} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$

- $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x-3} = 1 \\ \lim_{1} f = f(1) = -2\end{array}\right\} \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x}{2x-3}\right) = -2$

- $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0^+ \\ \lim_{0^+} f = f(0) = -1\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -1$

- $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{-\infty} f = -2\end{array}\right\} \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = -2$

c) <u>Image d'un intervalle par une fonction continue</u> :

- $f([0, 2]) = [\min f, \max f] = [-2, 3]$
- $f(]2, +\infty[) =]3, +\infty[$

Suites réelles

I) Résumé du cours

1) Suites arithmétiques

a) *Définition :*

On dit qu'une suite U est une suite arithmétique de raison r où r est un nombre réel si pour tout entier n, on a: $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$, ($r \in \mathbb{R}$)

b) *Terme général :*

Pour tous entiers naturels quelconques n et k, si la suite (u) est arithmétique de raison r alors on a: $u_n = u_k + (n - k).r$. En particulier, on a: $\mathbf{u_n = u_0 + n.r}$

Réciproquement : Si a et b sont deux nombres réels et si la suite U est définie par: $u_n = an + b$, alors cette suite est arithmétique de raison r = a et de premier terme $u_0 = b$

c) *Somme des termes d'une suite arithmétique*

Pour une suite (u) arithmétique de raison r, soit $S_n = u_n + u_{n-1} + ... + u_1 + u_0$.

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Relation que l'on peut mémoriser sous la forme :

$$S_n = \frac{\text{nombre de termes de la somme} \times (\text{premiér terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

d) *Limite d'une suite arithmétique :*

Pour une suite U arithmétique de raison r, on a, pour tout n entier narturel, $u_n = u_0 + n.r$.
Donc, on en déduit que :

- la suite (u) diverge vers +oo si r est >0
- la suite (u) diverge vers –oo si r est < 0
- la suite (u) est constante si r = 0

2) Suites géométriques

a) *Définition :*

On dit que la suite U est une suite géométrique de raison q, où q est un nombre réel, si pour tout entier naturel n, on a: $\mathbf{u_{n+1} = q. u_n}$

b) *Terme général :*

Si (u) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout n et tout k entiers naturels, on a:

$$\boxed{u_n = q^{(n-k)}.u_k}$$

En particulier, on a: $\mathbf{u_n = q^n.u_0}$.

Réciproquement : Pour a et b réels, la suite (u) définie par: Pour tout n entier naturel, $u_n = a.b^n$ est la suite géométrique de raison q = b et de premier terme $u_0 = a$.

c) *Somme de termes d'une suite géométrique*

Si q est un nombre réel et si n est un entier naturel alors:

- $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si q est différent de 1
- $1 + q + q^2 + ... + q^n = (n + 1)$ si q = 1.

Si la suite (u) est géométrique de raison q différente de 1, alors la somme des (n+1) termes de cette suite : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$: est $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Relation que l'on peut mémoriser sous la forme:

$$S = \frac{\textbf{1 er terme} \times (\textbf{1 - raison}^{\textbf{nbre de termes}})}{\textbf{1 - raison}}$$

d) Limite d'une suite géométrique

Si q est un nombre réel, alors on a:

Théorème

- Si $-1 < q < +1$ alors $\lim(q^n) = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim(q^n) = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim(q^n) = 1$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Convergence et limite d'une suite

1) Sens de variation d'une suite

(u_n) étant une suite numérique, on pose les définitions suivantes:

a) Définition d'une suite croissante

On dit que la suite est croissante si pour tout n entier naturel, on a : $u_n \leq u_{n+1}$

On a donc, $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 ....$

b) Définition d'une suite décroissante :

On dit que la suite est décroissante si pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leq u_n$

On a donc $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} \leq .... \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$

c) Définition d'une suite constante

On dit que la suite est constante si pour tout n entier naturel, on a : $u_n = u_{n+1}$

On a donc, $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 ....$

d) Définition d'une suite monotone

On dit que la suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

e) Méthodes à suivre :

Pour déterminer la monotonie d'une suite (u_n), On peut calculer :

- $U_{n+1} - U_n$, si le résultat est positif ou nul, la suite est croissante, par contre si le résultat est négatif ou nul, la suite est décroissante, enfin si le résultat est indépendant de n, alors la suite est arithmétique
- $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, si $u_n > 0$, et dans ce cas si le résultat est supérieur ou égal à 1, la suite est croissante, par contre si le résultat est inférieur ou égal à 1, la suite est décroissante, enfin, si le résultat est indépendant de n, la suite est géométrique.

2) Majorant, Minorant

a) <u>Définition d'une suite majorée</u>

On dit que la suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n entier naturel, on a: $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite.

b) <u>Définition d'une suite minorée</u>

On dit que la suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n entier naturel, on a : $m \leq u_n$ On dit que m est un minorant de la suite.

c) <u>Définition d'une suite bornée</u>

Si la suite (u_n) admet un majorant et un minorant, on dit qu'elle est bornée.

Il existe donc M et m réels tel que pour tout n entier naturel, on a: $m \leq u_n \leq M$. On remarque que la suite est bornée si et seulement s'il existe un réel A tel que pour tout n entier naturel, on a: $|u_n| \leq A$

<u>Remarque</u>

- Une suite croissante est minorée.(Car pour tout n, on a: $u_0 \leq u_n$).
- Une suite décroissante est majorée.(Car pour tout n, on a :$u_0 \geq u_n$)

3) Convergence et limite d'une suite

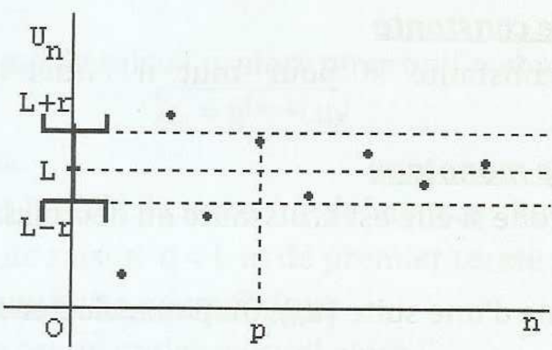
U est une suite numérique et L un nombre réel.

a) <u>Définition de la convergence</u>

On dit que la suite U converge vers L ou admet L pour limite si: Pour tout r> 0, il existe un entier N tel que si n > N alors $|u_n - L| < r$

Ceci signifie que la valeur L sera approchée d'aussi près que l'on veut par la suite U à partir du moment où n est choisi assez grand. On écrit alors:

$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$ On dit que la suite est convergente.



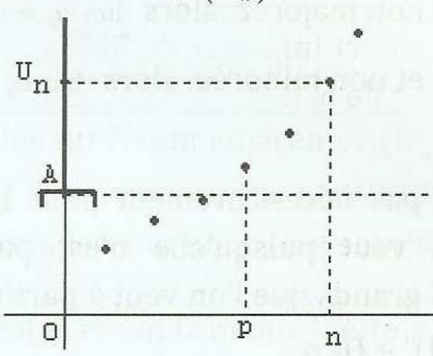
***<u>Remarque</u>** : si* une suite a une limite, sa limite est **unique.**

Suites divergentes :

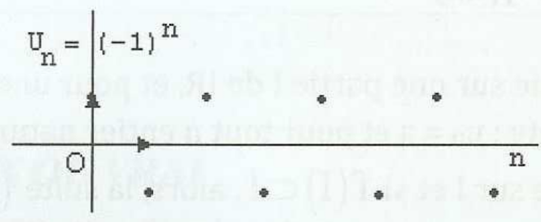
La suite U est dite divergente lorsqu'elle admet une limite infinie ou bien lorsqu'elle n'admet pas de limite.

Exemples:

1) $u_n = n^2 + 1$, est une suite divergente car $\lim(U_n) = +\infty$



2) La suite U définie par : $U_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'a pas de limite



b) Propriétés concernant les limites

Propriété 1

Si la suite U est croissante et admet un majorant M alors cette suite est convergente et sa limite L est inférieure ou égale à M.

Attention : on a $L \leq M$ et non nécessairement $L = M$.

Par exemple, la suite définie par " $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ " est croissante et majorée par 2, mais sa limite est $L = 1$.

Propriété 2

Si la suite U est décroissante et admet un minorant m alors cette suite est convergente et sa limite L est supérieure ou égale à m.

Propriété 3

Toute suite monotone et bornée est convergente.

De plus, si on a: $m \leq u_n \leq M$, pour tout n entier naturel, alors sa limite L vérifie $m \leq L \leq M$.

Propriété 4 : Théorème dit "des gendarmes"

Soient trois suites numériques (u) , (v) et (w) telles qu'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel $n > N$: $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si les suites (v) et (w) convergent vers L alors la suite (u) converge aussi vers L.

Exemple : Soit $u_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

On sait que la fonction sinus est comprise entre -1 et 1. Donc, pour tout n entier naturel, on a:

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

comme on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ On obtient que la suite (Un) converge vers 0

Propriété 5 :

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang. On peut citer comme exemple la suite $u_n = \left[(-1)^n + 1\right] \times n$.

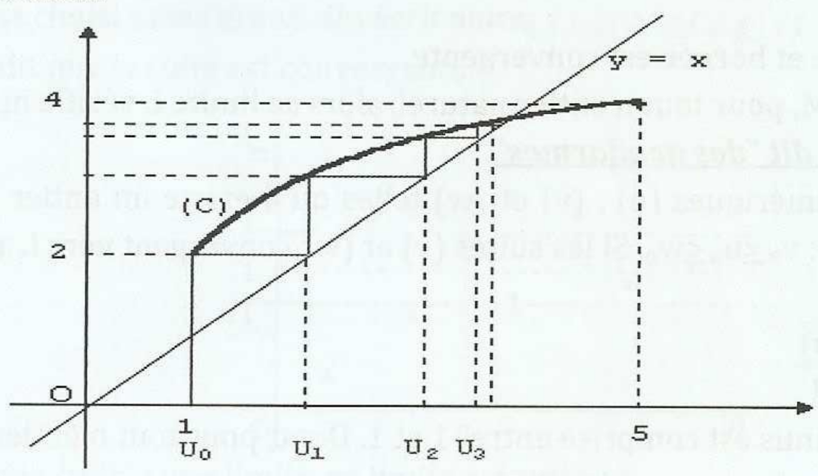
4) Suites définies par : un+1= f(un)

Généralités

Pour une fonction f définie sur une partie I de IR, et pour une valeur a de I, on peut définir la suite récurrente (u) suivante : u_0 = a et pour tout n entier naturel, si u_n appartient à I, alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante sur I et si $f(I) \subset I$, alors, la suite (U_n) est monotone. Si de plus l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans I, alors cette solution est la limite de la suite (U_n)

Exemple:

On a tracé la courbe de f et la droite d'équation $y = x$. Ces deux courbes se coupent en un point d'abscisse inférieure à 4. Si on prend u_0 sur (Ox), le point d'abscisse u_0 de C_f a comme ordonnée $u_1 = f(u_0)$. On projette alors ce point sur la droite d'équation $y = x$ puis sur (Ox). On a donc maintenant u_1 sur (Ox). On réitère le processus et on visualise ainsi u_2, u_3, u_4. On peut avoir l'intuition que la suite converge vers le réel solution de l'équation $f(x) = x$. Attention, on voit l'importance du premier terme. Si u_0 est supérieur à 4, il est clair que la suite tend vers l'infini.





Suites adjacentes

1) Définition :

On dit que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$.

2) Propriétés

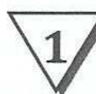
Si les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes, (U_n) étant la suite croissante et (V_n) la suite décroissante, alors :

1- $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\le V_n$;

2- (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont la même limite L ;

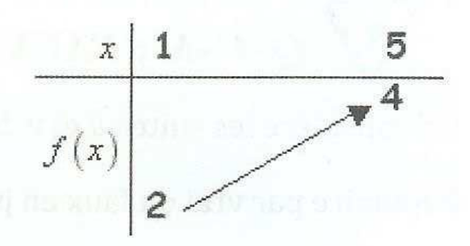
3- $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\le L\le V_n$.

II) Exercices



Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :



Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

A - Pour tout n de IN, on a : $1\le u_n\le 5$

B- Pour tout n de IN, on a : $u_n\le u_{n+1}$.

C- Pour $u_0=5$, la suite (u_n) est croissante.

D- Si, Pour tout n de IN, $\left|u_n-\frac{5}{2}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors $lim\ (u_n)=0$.



Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par Vrai ou Faux

– dans le cas où la proposition vous paraît fausse : donner un contre-exemple.

– dans le cas où la proposition vous paraît exacte : donner une démonstration.

(A) : Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n>u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n^2}{u_n}=+\infty$.

(B) : Toute suite bornée est convergente.

(C) : Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.

(D) : Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.



3 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.
On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.



4 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, $v_0 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

a. la suite w définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

c. La suite v est décroissante.

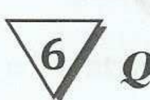
d. Les deux suites u et v convergent et ont la même limite.



5 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes.
Si vous répondez Faux , on demande une justification.

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est croissante. Alors elle tend vers $+\infty$.
3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.
4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.
5. Une suite croissante a toujours une limite.
6. Une suite géométrique a toujours une limite.



Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Partie A : *question de cours*

On suppose connus les résultats suivants:

(1) deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque: l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à IN on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente : toute suite décroissante et minorée est convergente. Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (U_n) définie sur IN, dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (V_n) sur IN, par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Si (U_n) est convergente alors (V_n) est convergente.
2. Si (U_n) est minorée par 2 alors (V_n) est minorée par -1.
3. Si (U_n) est décroissante alors (V_n) est croissante.
4. Si (U_n) est divergente alors (V_n) converge vers zéro.

7 APPLIQUER

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \text{ , pour tout n } \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout n de IN, $0 \leq u_n < 4$.

   b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) Retrouver le résultat de 1. c).



8 APPLIQUER

A) Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour A_0B_0= 12 cm.
Quelle conjecture peut-on faire sur les points $A_n$et $B_n$quand n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\,;\vec{i}\right)$ avec $\vec{i}=\frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.
Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points $A_n$et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a
$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$.

B) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0= 0 ; v_0= 12 ; $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$.
1. Démontrer que la suite (u_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

C) À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points $A_n$et B_n quand n tend vers $+\infty$.

9 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.
1. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2]. Montrer que si $x\in[1\,;2]$ alors $f(x)\in[1;2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
u_0= 1 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$,
v_0= 2 et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

a. Le graphique donné ci dessous représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

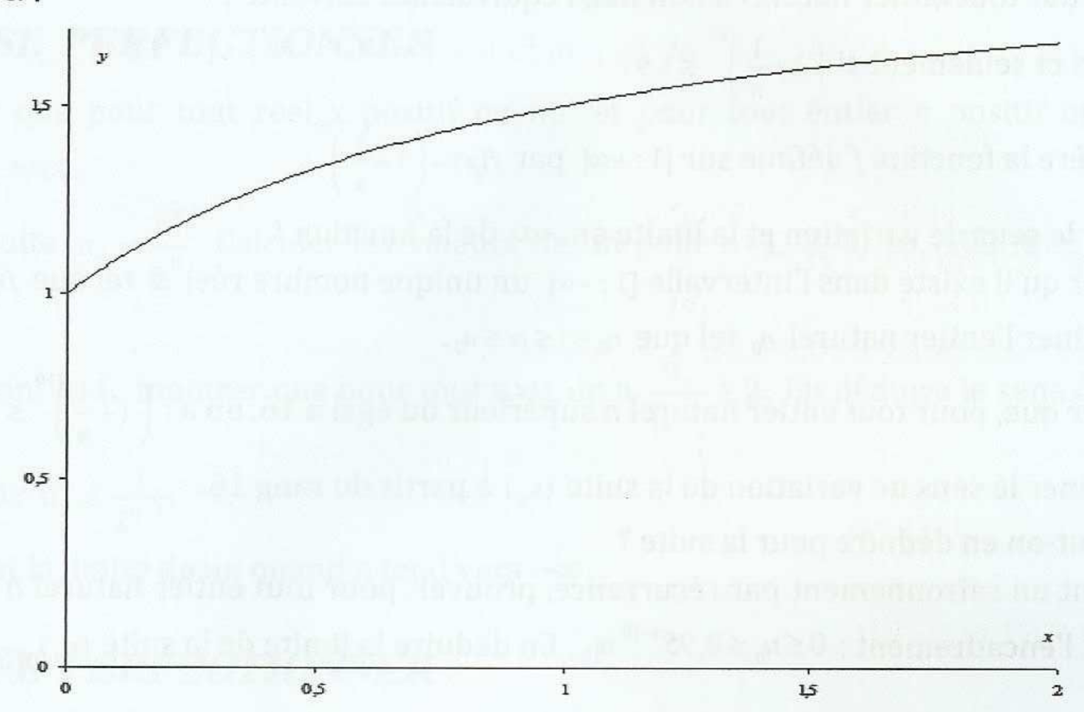
b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel n, $1\le v_n\le 2$.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}\le v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$.
Pour tout entier naturel n, $u_n\le u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel *n*, $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.



10 S'ENTRAINER

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$.

3. On pose $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq k\left|u_n - \sqrt{2}\right|$. En déduire que la suite U converge vers $\sqrt{2}$.

4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \dfrac{u_{n+2} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} < 1$.

En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. Application : calculer les premiers termes de la suite U et établir les encadrements suivants de $\sqrt{2}$: $1<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$.



11 S'ENTRAINER

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=\frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel *n* non nul, l'équivalence suivante :

$u_{n+1}\le 0{,}95u_n$ si et seulement si $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1{,}9$.

2. On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

   a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction *f*.

   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.

   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1\le\alpha\le n_0$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1{,}9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\le u_n\le 0{,}95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



12 S'ENTRAINER

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$u_0=2$ et pour tout $n\in IN$, $v_n=\frac{2}{u_n}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

1) Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2. Donner les résultats sous form de fraction irréductibles.

2) A l'aide de la calculatrice, donner un tableau de valeurs décimales approchées de u_n et v_n, pour n variant de 1 à 4.

3) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

4) Montrer que pour tout $n\in IN$; $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$ (1)

5) Montrer que pour tout $n\in IN$ $u_n\ge v_n$.

6) Montrer que (U_n) est décroissante et (V_n) croissante.

7) Montrer que pour tout $n\in IN$ $u_n-v_n\le 1$ et en déduire que $(u_n-v_n)^2\le u_n-v_n$. (2)

8) Montrer que pour tout $n \in IN$; $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$ (on pourra utiliser les relations (1) et (2)) En déduire que pour tout $n \in IN$ $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$.

9) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et donner leur limite commune I Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle forcément pour limite un nombre rationnel?



13 SE PERFECTIONNER

1. Montrer que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. Soit la suite $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculer les valeurs de un pour n=1, 2, 3, 10, 100 .Que remarquez vous ?

3. En utilisant le 1., montrer que pour tout n>0, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$. En déduire le sens de variation de u_n et que $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

4. Quelle est la limite de un quand n tend vers $+\infty$.

14 SE PERFECTIONNER

On considère les suites u et u définies par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = \sqrt{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1) On définit la suite $(w_n)_{n\in IN}$ par : $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

2) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n > v_n$.

3) Montrer que la suite v est décroissante et que la suite u est croissante.

4) En déduire que u et v sont convergente et ont même limite.



15 SE PERFECTIONNER

I) La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 1$ pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+u_n^2}$.

1) Prouver par récurrence que, pour tout n dans IN, $0 \le u_n \le 1$.

2) Prouver par récurrence que, pour tout n dans IN, $u_{n+1} \le u_n$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On note L la limite.

4) Prouver que $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

II) La suite (v_n) vérifie les deux propriété suivantes :

(P_1) : Pour tout n dans IN. $0 \le v_n \le 1$.

(P_2) : Pour tout n dans IN, $v_n \le v_{n+1}$.

Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.



16 SE PERFECTIONNER

Pour $n \ge 1$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + ... + X - 1$.

1) Démontrer que P_n possède une seule racine dans IR^+, que l'on note u_n.
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
3) Démontrer que, pour tout $n \ge 1$, $u_n \ge \frac{1}{2}$.
4) Démontrer que (u_n) converge vers ½.



17 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n ∈ IN, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4 \text{ cm}\right)$

b) Placer sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n).

c) Que peut on conjecturer concernant la monotonie et la convergence de (u_n) ?

2. a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3. a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$.

b) En déduire que pour tout n de IN, on a : $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; puis retrouver la limite de (u_n)

4. Pour tout n de IN*, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{S_n}{n}$.

a) Montrer que pour tout n de IN*, on a : $n - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \leq S_n < n$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.



18 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).



19 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.
2. Justifier par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. a. Démontrer que quel que soit n de IN, $(u_n+v_n)^2-28=(u_n-v_n)^2$.

   b. En déduire que $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2$.

   c. Conclure que quel que soit n on a $u_n-v_n \geq 0$.
4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
5. a. Démontrer que quel que soit n de IN*, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

   b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1}-v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$.

   c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n-v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$.

   d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
7. Justifier que $u_3$est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.
8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.

Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1er siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère deux réels a et b tels que 0< a< b, et les deux suites (u_n)et (v_n) définies par

$u_0=a$; $v_0=b$, $u_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$;

(***rappel***: u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n)

Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n. u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

c) Montrer que, pour tous réels x et y telsque 0<x<y . on a $\frac{x-y}{2(x+y)}<\frac{1}{2}$.En déduire que

$v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n>0 on a $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

f) En déduire la limite de $v_n - u_n$.

g) Montrer que les suites (u_n)et (v_n), sont adjacentes.

h) Montrer que pour toute entier naturel n. le produit $u_n.v_n$ est constant En déduire la limite des suites suites (u_n)et (v_n).

i) Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ par deux rationnels au cent millième près.



Q-C-M ; VRAI OU FAUX

A- Notons P_n la proposition : « $1 \le u_n \le 5$ ».

1) $u_0 = 1$ et $1 \le 1 \le 5$ donc P_0 est vraie.

2) supposons P_n vraie pour un entier $p \ge 0$: alors $1 \le u_p \le 5$.

Comme f est croissante sur $[1;5]$, on a :

$f(1) \le f(u_p) \le f(5)$ soit

$2 \le u_{p+1} \le 4$ et donc $1 \le u_{p+1} \le 5$. Alors P_{p+1} est vraie.

3) conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 5$.

B- Notons P_n la proposition : « $u_{n+1} \ge u_n$ ».

1) $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ donc $u_1 \ge u_0$ et P_0 est vraie.

2) supposons P_n vraie pour un entier $p \ge 0$: alors $u_{p+1} \ge u_p$.

Comme f est croissante sur $[1;5]$, on a :

$f(u_{p+1}) \ge f(u_p)$ soit

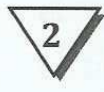
$u_{p+2} \ge u_{p+1}$ et donc P_{p+1} est vraie.

3) conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante.

C- Si $u_0 = 5$ alors $u_1 = f(u_0) = f(5) = 4$, soit $u_1 \le u_0$. Donc la suite (u_n) n'est pas croissante. On montre, comme ci-dessus, que (u_n) est décroissante.

D- $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Donc si, pour tout n de I, $\left|u_n - \frac{5}{2}\right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{5}{2}$.



Q-C-M ; VRAI OU FAUX

(A) **Vrai** : $v_n > u_n \Rightarrow v_n^2 > v_n u_n \Rightarrow \frac{v_n^2}{u_n} > v_n > u_n$.

Donc comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.

(B) **Faux** : Exemple classique : $u_n = (-1)^n$ qui est bornée par -1 et 1 et qui ne converge pas.

(C) **Faux** : Exemple : $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

(D) **Vrai** : Reprendre la propriété 5



Q-C-M ; VRAI OU FAUX

(u_n) non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 :

Vrai :

$$2 \le u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \le -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \le v_n.$$

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

Faux ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n.



Q-C-M ; FAUX OU FAUX

$$u_0 = 1, v_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}.$$

a. **Vrai** : le calcul n'est pas très marrant...

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{2u_n + 2\sqrt{2}v_n - (1+\sqrt{2})u_n - (1+\sqrt{2})v_n}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{2})u_n + (\sqrt{2}-1)v_n}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} w_n = \frac{3-2\sqrt{2}}{2(2-1)} w_n = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) w_n.$$

b. **Vrai** : On a $w_n = w_0 q^n = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^n$; la raison est positive ($\sqrt{2} \approx 1{,}414$) de même que le premier terme, donc $w_n > 0 \Rightarrow u_n \le v_n$.

c. **Vrai** : Au pif, on peut penser que les deux suites sont adjacentes puisque w_n tend évidemment vers 0 ; il faut donc que la suite v soit décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} - v_n$

$= \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n - v_n - \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}$.

$= \dfrac{u_n - v_n}{1+\sqrt{2}} = -\dfrac{w_n}{1+\sqrt{2}} < 0$

d. **Vrai** : les deux suites *u* et *v* convergent vers une même limite



5 Q-C-M ; VRAI OU FAUX

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. FAUX

La suite (U_n) définie par $u_n = (-2)^n$ n'est pas majorée et n'as pas de limite (cours de première).

2. Si uie suite est croissante. Alors elle tend vers $+\infty$. FAUX

La suite définie par $u_n = -\dfrac{1}{n}$ est croissante et converge vers 0.

3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée. VRAI (résultat de la définition)

4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante. FAUX

La suite définie par $u_n = n + 2(-1)^n$ tend vers $+\infty$ (puisque $u_n \geq n-2$) et n'est pas croissante (elle décroît d'rang pair à un rang impair) . $u_0 = 2$; $u_1 = -1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$; $u_4 = 6$,...

5. Une suite croissante a toujours une limite. VRAI

C'esy une limite finie si la suite est majorée et **c'est $+\infty$ si la suite n'est pas majoré.**

6. Une suite géométrique a toujours une limite. FAUX

La suite d éfinie par $u_n = (-2)^n$ est géométrique et n'a pas de limite (cours de première).



6 Q-C-M ; VRAI OU FAUX

Partie A: question de cours

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.

Daprès le résultat (2). on a pour tout entier naturel n: $u_0 \leq u_1 \leq ..... \leq u_n \leq v_n \leq ..... \leq v_1 \leq v_0$

En conséquence et d'après le résultat (3):

- La suite u est croissante et majorée par v_o donc converge vers le réel ℓ.
- La suite v est décroissante et minorée par u_B , donc converge vers le réel ℓ'.

Pour tout entier naturel n. on a: $u_n = (u_n - v_n) + v_n$

D'après le résultat (1) , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$; un passage à la limite dan l'inégalité précédente donne alors : $\ell = \ell'$.

On a démontré que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Partie B

Pour arriver à faire cet exercice. il faut déjà une idée de la réponse ! ! !

1. FAUX.

En effet, considérons la suite u pour tout n par :

$u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Alors aucun terme de u_n n'est nul, et u converse vers 0.

Mais $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2(n+1)$, donc v diverge vers $-\infty$.

2. VRAI

Si (u_n) est minorée par 2. alors pour tout entier n. on a : $2 \leq u_n$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $[2;+\infty[$, il vient : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{u_n}$

En multipliant par -2 : $-1 \leq v_n$.

Ainsi (v_n) est minorée par -1.

3. FAUX.

Soit u la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Cette suite est décroissante (avec aucun terme nul) et la suite v définie par $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2(n+1)$ est décroissante non constante, donc on ne peut pas dire qu'elle soit croissante.

4. FAUX.

Rappelons qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Donc soit elle tend vers $\pm\infty$. soit elle n'a pas de limite.

Pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver une suite (u_n) qui diverge mais sans tendre vers l'infini.

Par exemple : $u_n = -2(-1)^n$ donc $v_n = (-1)^n$.

Comme la suite de tenue général $(-1)^n$ diverge alors u et v divergent.

Preuve de la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$:

Raisonnons par l'absurde et supposons que cette suite converge vers un réel ℓ.

Alors tout intervalle ouvert centré en 1 contient tous les tennes $(-1)^n$ à partir d'un certain rang.

Ainsi il existe un rang N à partir duquel on aura:

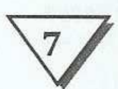
$(-1)^n \in \left]\ell-\frac{1}{2};\ell+\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow \ell-\frac{1}{2}<(-1)^n<\ell+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -(-1)^n-\frac{1}{2}<-\ell<\frac{1}{2}-(-1)^n$

$\Leftrightarrow -\left(-(-1)^n-\frac{1}{2}\right)>\ell>-\left(\frac{1}{2}-(-1)^n\right)$

$\Leftrightarrow (-1)^n-\frac{1}{2}<\ell<(-1)^n+\frac{1}{2}$

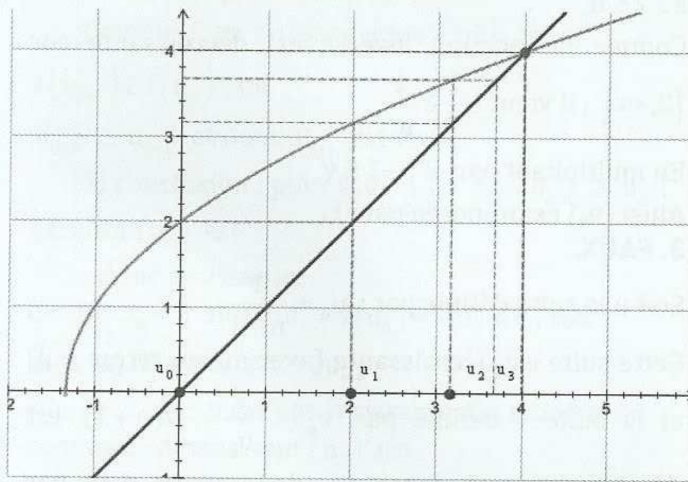
Mais si n pair. $(-1)^n=1$, donc l'encadrement donne $\frac{1}{2}<\ell<\frac{3}{2}$.



7 APPLIQUER

$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{4+3u_n}\text{ , pour tout n } \in \mathbb{N} \end{cases}$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture : *La suite (u_n) est croissante, majorée par 4 et elle converge vers 4.*

Réponses :

1. a) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $0\le u_n<4$.

- Pour n = 0, $0\le u_0=0<4$
- Pour $n\ge 0$, supposons que $0\le u_n<4$ et montrons que $0\le u_{n+1}<4$

En effet : $0\le u_n<4 \Rightarrow 0\le 3u_n<12 \Rightarrow 4\le 4+3u_n<16$

$\Rightarrow \sqrt{4}\le\sqrt{4+3u_n}<\sqrt{16}$

$\Rightarrow 0\le 2\le u_{n+1}<4$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $0\le u_n<4$.

b) $u_{n+1}^2-u_n^2=4+3u_n-u_n^2=\underbrace{(1+u_n)}_{>0 \text{ car } u_n\ge 0}\underbrace{(4-u_n)}_{>0 \text{ car } u_n<4}>0$

$\Rightarrow u_{n+1}^2>u_n^2 \Rightarrow u_{n+1}>u_n \ (u_n>0)$

$\Rightarrow (u_n)$ est strictement croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 4 donc (u_n) est convergente. Soit ℓ la limite de (u_n)

$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell\in[0,4] \\ u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{4+3u_n} \\ \text{avec } f(x)=\sqrt{4+3x} \ x\in\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[\\ f \text{ est continue sur } \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[\text{ donc en } \ell \end{cases}$

$\Rightarrow f(\ell)=\ell$

$\Rightarrow \sqrt{4+3\ell}=\ell$, avec $\ell\in[0,4]$

$\Leftrightarrow \ell^2-3\ell-4=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\ell=-1}_{\text{à rejeter}}$ ou $\ell=4 \Rightarrow \ell=4$

2. *Autre procédé de convergence :*

a) $4-u_{n+1}=4-\sqrt{4+3u_n}$

$=\frac{12-3u_n}{4+\sqrt{4+3u_n}}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}$

Or $u_n\ge 0 \Rightarrow \sqrt{4+3u_n}\ge 2$

$\Rightarrow 4+\sqrt{4+3u_n}\ge 6 \Rightarrow \frac{1}{4+\sqrt{4+3u_n}}\le\frac{1}{6}$

$\Rightarrow 4-u_{n+1}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}\le\frac{3}{6}(4-u_n)=\frac{1}{2}(4-u_n)$

b)

$4-u_{k+1}\le\frac{1}{2}(4-u_k)$, pour tout k de IN

$\begin{cases} \text{Pour } k=0,\ 0<4-u_1\le\frac{1}{2}(4-u_0) \\ \text{Pour } k=1,\ 0<4-u_2\le\frac{1}{2}(4-u_1) \\ \text{Pour } k=2,\ 0<4-u_3\le\frac{1}{2}(4-u_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Pour } k=n-1,\ 0<4-u_n\le\frac{1}{2}(4-u_{n-1}) \end{cases}$

On fait le produit terme à terme et on simplifie on aura

$0<4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$0<4-u_n\le 4\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\searrow 0}$

$\Rightarrow (u_n)$ converge et $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$



APPLIQUER

A) A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.

$A0 \quad A1\ A2\ B2\ B1 \quad B0$

Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_n, B_n]$ et $v_{n+1} = \dfrac{1.u_n + 2.v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ car B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

B) 1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$= \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$= \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{v_n - u_n}{6}$

donc w_n est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{1}{2} w_n > 0$ donc (u_n) est croissante ;

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\dfrac{1}{3} w_n < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Comme $w_n > 0$, on a $u_n < v_n$ donc u_n est croissante majorée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2\dfrac{u_n + v_n}{2} + 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

$= u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$

$= ... = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$

C) Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l, en remplaçant dans t_n on a :

$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \rightarrow 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \dfrac{36}{5}$.

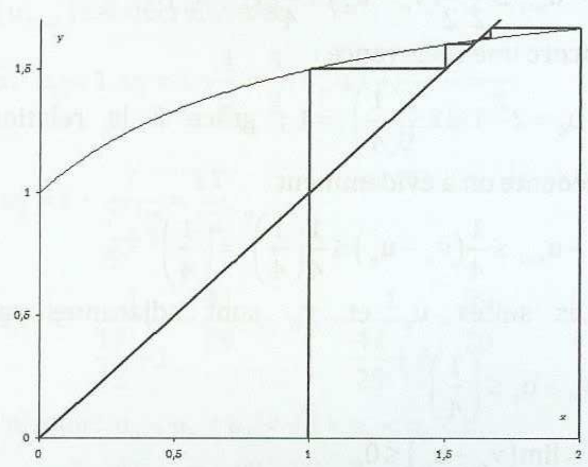


APPLIQUER

Soit f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante ; $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$

et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$ donc si $x \in [1 ; 2]$, $f(x) \in [1 ; 2]$.



2. a. Visiblement la suite u_n est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite $(y = x)$, soit environ 1,6 ; de même v_n semble décroissante et converger vers le même point.

b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle $[1 ; 2]$; par ailleurs si $1 \le v_n \le 2$ alors comme f est croissante,

$f(1) \le f(v_n) \le f(2) \Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le 2$;

la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \dfrac{5}{3} \le v_0$; par ailleurs si $v_{n+1} \le v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \le f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \le v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \dfrac{5}{3} \le v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de f. Pour u_n c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}$$

$$=\frac{2u_nv_n+2v_n+u_n+1-2u_nv_n-v_n-2u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$

$$=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$v_{n+1}-u_{n+1}$ est du signe de v_n-u_n ;

comme $v_0-u_0=2-1>0$, par récurrence on a $v_n-u_n\geq 0$; on a $v_n>1\Rightarrow v_n+1>2\Rightarrow\frac{1}{v_n+1}<\frac{1}{2}$ et pareil pour u_n donc

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(v_n-u_n)=\frac{1}{4}(v_n-u_n).$$

d. Encore une récurrence :

$v_0-u_0=2-1=1\leq\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$; grâce à la relation précédente on a évidemment

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(v_n-u_n)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

e. Les suites u_n et v_n sont adjacentes car

$$0\leq v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0\leq\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)\leq 0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$$

elles convergent bien vers une même limite α telle que $\alpha=f(\alpha)=\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha=2a+1$

$$\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha-1=0$$

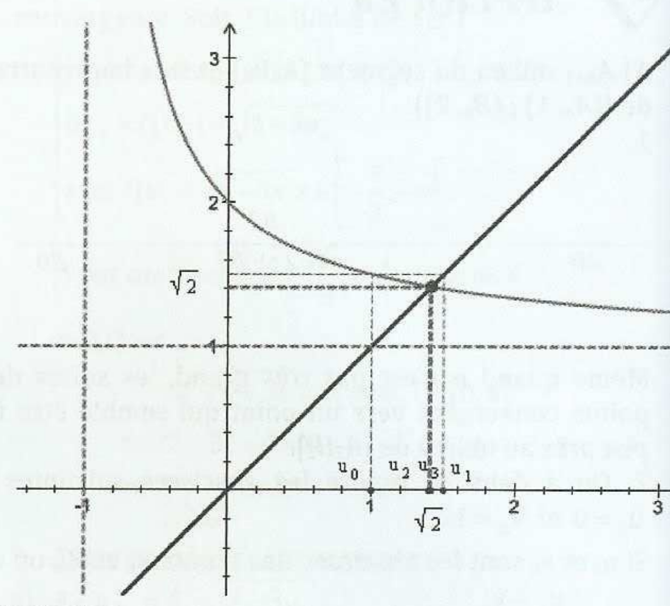
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618\\ \alpha_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}618\end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10 S'ENTRAINER

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=1+\frac{1}{1+u_n}\end{cases}$$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture :

- La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

Réponses :

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, on a : $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$.

- Pour n = 0, $u_0=1\geq 1$ et $u_0=1\neq\sqrt{2}$.
- Pour $n\geq 0$, supposons que $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1}\geq 1$ et $u_{n+1}\neq\sqrt{2}$.

En effet : $u_n\geq 1\Rightarrow 1+u_n>0\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}>0$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{1+u_n}\geq 1\Rightarrow u_{n+1}\geq 1$$

$$u_n\neq\sqrt{2}\Rightarrow 1+u_n\neq 1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}\neq\frac{1}{1+\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}\neq\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{1+u_n}\neq\sqrt{2}\Rightarrow u_{n+1}\neq\sqrt{2}$$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$.

2. $\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$?

$$(u_{n+1}-\sqrt{2})(1+u_n)=\left(1+\frac{1}{1+u_n}-\sqrt{2}\right)(1+u_n)=(1-\sqrt{2})(1+u_n)+$$

$$=(1-\sqrt{2})(1+u_n)-(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})$$

3. $k=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

• $\left|\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}$

Or $1+u_n\geq 2\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}\leq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}\leq\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}\leq k$

$\Rightarrow\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

•

$\left|u_{p+1}-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_p-\sqrt{2}\right|$, $\forall$ p $\in$ IN

Pour p = 0, $\left|u_1-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_0-\sqrt{2}\right|$

Pour p = 1, $\left|u_2-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_1-\sqrt{2}\right|$

⋮

⋮

Pour p = n - 1, $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq k^n\underbrace{\left|u_0-\sqrt{2}\right|}_{\sqrt{2}-1}\leq k^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$ car $k\in\left]-1,1\right[\Rightarrow(u_n)$ converge vers $\sqrt{2}$

4. $\left.\begin{array}{l}\frac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+u_{n+1}}\\ \frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\end{array}\right\}$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$$0<\frac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{\overbrace{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}^{>0}}{\underbrace{(1+u_{n+1})(1+u_n)}_{>0}}$$

$$\underset{\text{car}1+u_n\geq2\text{ et }1+u_{n+1}\geq2}{\leq}\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}<1$$

• Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_{2n}<\sqrt{2}$

Pour n = 0, $u_0=1<\sqrt{2}$

Pour n ≥ 0, supposons que $u_{2n}<\sqrt{2}$ et montrons que $u_{2n+2}<\sqrt{2}$

En effet :

$\frac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}>0$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}<0\Rightarrow u_{2n+2}<\sqrt{2}$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $u_{2n}<\sqrt{2}$

• Montrons que la suite (u_{2n}) est croissante :

$\frac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}<1$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}>u_{2n}-\sqrt{2}$

$\Rightarrow u_{2n+2}>u_{2n}$

On montre de même que $u_{2n+1}>\sqrt{2}$ et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. $u_0=1, u_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, u_2=1+\frac{1}{\frac{3}{2}+1}=\frac{7}{5},$

$u_3=1+\frac{1}{\frac{7}{5}+1}=\frac{17}{12},$

$u_4=1+\frac{1}{\frac{17}{12}+1}=\frac{41}{29}, u_5=1+\frac{1}{\frac{41}{29}+1}=\frac{99}{70}$

Puisque : $u_0<u_2<u_4<\sqrt{2}<u_5<u_3<u_1$

$\Rightarrow 1<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$

11 *S'ENTRAINER*

$u_n=\frac{n^{10}}{2^n}$.

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$u_{n+1}\leq 0{,}95u_n$

$\Leftrightarrow\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\leq 0{,}95\frac{n^{10}}{2^n}\Leftrightarrow\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}}\leq 0{,}95\frac{2^n.2}{2^n}$.

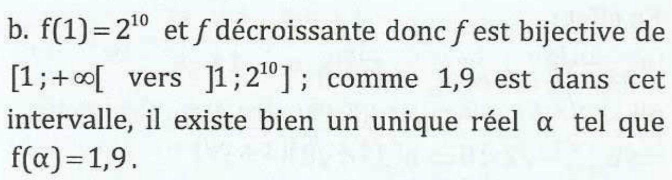
$\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9$

2. a. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$;

$f'(x)=10\left(1+\frac{1}{x}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)^9=10\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^9<0$

donc *f* est décroissante ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}=1^{10}=1$.



b. $f(1)=2^{10}$ et f décroissante donc f est bijective de $[1;+\infty[$ vers $]1;2^{10}]$; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.

c. On a $f(15)\approx 1{,}9067$ et $f(16)\approx 1{,}8335$ d'où $16-1=15\leq\alpha\leq 16$.

d. Lorsque $x\geq\alpha$, comme f est décroissante, on a : $f(x)\leq f(\alpha)=1{,}9$, donc pour tous les n tels que $n\geq 16\geq\alpha$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}=f(n)\leq f(16)\leq f(\alpha)=1{,}9$.

3. a. D'après ce que nous venons de dire, la suite (u_n) est telle que $u_{n+1}\leq 0{,}95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0\leq u_n\leq 0{,}95^{n-16}u_{16}$: on vérifie facilement au rang 16 car $0\leq u_{16}\leq u_{16}$; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1}\leq 0{,}95u_n\leq 0{,}95.0{,}95^{n-16}u_{16}=0{,}95^{(n+1)-16}u_{16}$, CQFD.

Comme $0{,}95<1$, $0{,}95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que u_n grâce à nos amis les gendarmes.

12 S'ENTRAINER

1) $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{2}{u_0}=\frac{2}{2}=1$

$u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$;

$v_1=\frac{2}{u_1}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

$v_2=\frac{2}{u_2}=\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}$.

2)

n	Un	vn
1	1.500000000	1.333333333
2	1.416666667	1.411764706
3	1.414215686	1.414211438
4	1.414213562	1.414213562

3) Démontrons, par récurence que, pour tout entier naturel n, on a $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$.

Initialisation (ou amorce) la propriété $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$ est vraie pour n=0 puisque $u_0=2$ et $v_0=1$ on a bien $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$.

Hérédité : soit n un entier naturel quelquenque mais fixé.

Si $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$, alors $\frac{1}{2}\leq\frac{u_n}{2}\leq\frac{2}{2}$ et

$2\leq u_n+v_n\leq 4$

$2\geq u_{n+1}\geq 1$ et $1\leq\frac{u_n+v_n}{2}\geq 2$

$1\leq u_{n+1}\leq 2$ et $1\leq v_{n+1}\leq 2$

Conclusion: La propriété $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$ est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de n = 0. D'après te principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2}{u_{n+1}}$$

$$=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{4}{u_n+v_n}$$

$$=\frac{(u_n+v_n)^2-8}{2(n_n+v_n)}$$

Puisque $v_n=\frac{2}{u_n}.2=u_n.v_n$

$$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n{}^2+2u_nv_n+v_n{}^2-8}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{u_n{}^2+2u_nv_n+v_n{}^2-4\times 2}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{u_n{}^2+2u_nv_n+v_n{}^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n{}^2+2u_nv_n+v_n{}^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$

5) Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geq v_n$.

Initialisaition (ou amorce) : La propriété $u_n\geq v_n$ est vraie pour n=0 puisque $u_0=2$ et $v_0=1$ on a bien: $u_0\geq v_0$

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque mais fixé

Si $u_n\geq v_n$ alors $\frac{(u_n+v_n)^2}{2(n_n+v_n)}\geq 0$

$u_{n+1}-v_{n+1}\geq 0$ $u_{n+1}\geq v_{n+1}$

Conclusion : La propriété $u_n\geq v_n$ est vraie pour n=0 et héréditaire à partir de n=0 ; D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

6) Pour tout $n \in IN$ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$ d'après la question précédente,
$u_{n+1} - u_n \le 0$, $u_{n+1} \le u_n$ la suite (U_n) est décroissante.

Pour tout $n \in IN$ $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n} = \frac{2(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1}.u_n}$

comme $u_{n+1} - u_n \le 0$, $u_n + u_{n+1} \ge 0$,
$v_{n+1} - v_n \ge 0$, $v_{n+1} \ge v_n$, la suite (V_n) est croissante.

7) La suite (U_n) et décroissante donc pour tout entier naturel n. $u_n \le u_0$, c'est-à-dire $u_n \le 2$.
La suite (V_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, $v_n \ge v_0$ $v_n \ge 1$ d'où $-v_n \le -1$; En additionnant membre à membre: $u_n - v_n \le 1$.
On sait déjà que $u_n - v_n \ge 0$. Il ne reste plus qu'a multiplier les deux membres de l'inegalité précédente par $u_n - v_n$: $(u_n - v_n)^2 \le u_n - v_n$

8) Daprès la relation (1). $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ or $u_n \ge 1$ et $v_n \ge 1$ d'où $u_n + v_n \ge 2$

$2(u_n + v_n) \ge 4$ et $\frac{1}{2(u_n + v_n)} \le \frac{1}{4}$.

On multiplie les deux membres par $(u_n - v_n)^2$ qui est positif : $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \le \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2$ et en utilisant la relation (2) : $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \le \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2 \le \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

c'est-à-dire $u_{n+1} - v_{n+1} \ge \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

Démontrons parrécurrence, que pour tout $n \in IN$ $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$

Initialisation : La propriété $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$ est vraie pour n=0 puisque $u_0 - v_0 = 1$ et $\frac{1}{4^0} = 1$. On a bien. : $u_0 - v_0 \le \frac{1}{4^0}$.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque mais fixé.

Si $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$, alors $\frac{1}{4}(u_n - v_n) \le \frac{1}{4^{n+1}}$ et comme $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{4^n}(u_n - v_n)$ a fortiori $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{4^{n+1}}$

Conclusion : La propriété $u_n - v_n \le \frac{1}{4^n}$ est vraie pour n =0 et héréditaire à partir de n =0 ; D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

9) On sait que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante .

La propriété précédente $0 \le u_n - v_n \le \frac{1}{4}$ et le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
les suites (U_n) et(V_n) sont donc adjacentes.Elles convergent donc vers le même réel ℓ.
Comme $u_n v_n = 2$, la limite donne $\ell \times \ell = 2$ d'où $\ell = \sqrt{2}$.
Les suites (U_n) et(V_n) ont tous leurs termes rationnels car les quotients et sommes de nombres rationnels sont des rationnels. Leur limite commune $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

13 SE PERFECTIONNER

1. Par récurrence : pour n = 0,
$(1+x)^0 \ge 1 + 0x \Leftrightarrow 1 \ge 1$; ok.
On suppose que $(1+x)^n \ge 1 + nx$ et on multiplie tout par $1+x$:
$(1+x)^{n+1} \ge (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2$
$= 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x$
La suite semble décroître et tendre vers 0.

3. $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\times n!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$
$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

On applique l'inégalité du 1. avec $x = \frac{1}{n}$:
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + n\frac{1}{n} = 2$. CQFD.

Tous les termes de la suite sont positifs évidemment donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2} < 1$, la suite est bien décroissante.

Par récurrence on a $u_1 = 1 \le \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$; puis $u_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$.

4. Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et que u $u_n \ge 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.



SE PERFECTIONNER

On a : $u_0=1$, $v_0=\sqrt{2}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}$ pour tout n.

1) Pour tout n, on pose $w_n=v_n-u_n$.

Pour tout n, $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{u_n+v_n}{2}$

$=\dfrac{2u_n+2\sqrt{2}v_n-(1+\sqrt{2})u_n+(1+\sqrt{2})v_n}{2(1+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{2})u_n+(\sqrt{2}-1)v_n}{2(1+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(v_n-u_n)}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}w_n$.

$w_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}w_n$.

On en deduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$

et de premier terme $w_0=v_0-u_0=\sqrt{2}-1$.

2) Montrons par récurence que, pour tout n : $v_n-u_n\geq 0$ (H_n).

$v_0-u_0=\sqrt{2}-1>0$ donc l'hypothèse (H_n) est vraie pour n=0.

Supposons qie H_n soit vraie pour un entier n donc que $v_n-u_n\geq 0$.

Alors : $v_{n+1}-u_{n+1}=w_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}w_n$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}(v_n-u_n)>0$ car l'hypothèse de récurrence, $v_n-u_n\geq 0$ et $q=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}>0$.

Par conséquent pour tout n, $u_n<v_n$.

3) Montrons que la suite v est décroissante :

Pour tout n, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}-v_n$

$=\dfrac{u_n+\sqrt{2}v_n-v_n-\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{u_n-v_n}{1+\sqrt{2}}<0$

En effet : $=u_n-v_n<0$ d'après la question précédente. Par conséquent, la suite v est décroissante.

Montrons de même que la suite u est croissante :

Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}>0$ d'après la question précédente. On en déduit que la suite u est décroissante.

4) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

$w_n=w_0q^n=w_0\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}\right)$

Or, $-1<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}\right)^n=0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

U est croissante, v est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$: u et v sont adjacentes, donc convergentes et elles ont même limite.



SE PERFECTIONNER

I) 1) Notons P(n) la propriété « $0\leq u_n\leq 1$. » et démontrons par récurrence que la propriété P(n) est vraie pour tout n $\in$ IN.

Puisque $u_0=1$, on a bien $0\leq u_0\leq 1$. Ce qui achève la phase Initialisation.

Supposons mainrtenant que pour un entier k $\in$ IN fixé. La propriété P(k) soit vraie c'est-à-dire $0\leq u_{k+1}\leq 1$

On écrit successivement :

$0\leq u_k\leq 1$, puis par croissance de la fonction carré sur $[0,+\infty[$, $0\leq u_k^2\leq 1$ donc $1\leq 1+u_k^2\leq 2$ puis par croissance de la fonction racine sur $[0,+\infty[$,

$\sqrt{1}\leq\sqrt{1+u_k^2}\leq\sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{2}\sqrt{1}\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{1+u_k^2}\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\leq u_k^2\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ .Puisque $0\leq\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\leq 2$, on conclut donc que $0\leq u_{k+1}\leq 1$, ce qui achève la phase d'héridité et la démonstration par récurrence.

La propriété P(n) est donc vraie pour tout n $\in$ IN.

2) Notons P(n) la propriété « $u_{n+1}\leq u_n$ » et démontrons par récurrence que la propriété P(n) est vraie pour tout n $\in$ IN.

On calcul $u_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+u_0^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pour s'assuer que $u_1\leq u_0$. Ce qui achève la phase Initialisation.

Supposons maintenant que pour un entier k $\in$ IN fixé. La propriété P(k) soit vraie c'est-à-dire $u_{k+1}\leq u_k$

On écrit successivement :

$u_{k+1} \le u_k$, puis par croissance de la fonction carré sur $[0,+\infty[$, $u_{k+1}^2 \le u_k^2$ donc $1+u_{k+1}^2 \le 1+u_k^2$ puis par croissance de la fonction racine sur $[0,+\infty[$, $\sqrt{1+u_{k+1}^2} \le \sqrt{1+u_k^2}$ donc $\frac{1}{2}\sqrt{1+u_{k+1}^2} \le \frac{1}{2}\sqrt{1+u_k^2}$

c'est-à-dire $u_{k+1} \le u_k$.

Puisque $0 \le \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2} \le 2$, on conclut donc que $0 \le u_{k+1} \le 1$ n ce qui achève la phase d'héridité et la démonstration par récurrence.

La propriété P(n) est donc vraie pour tout $n \in$ IN.

3) Puisque la suite (u_n) est décroissante (question 2) et minorée par 0 (question1) , elle est convergente.

Notons L sa limite.

4) Puisque pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f: \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$, puisque f est continue sur IR, comme composée des fonctions carrée, affine $t \mapsto 1+t$, racine et linéaire $u \mapsto \frac{1}{2}u$, et puisque la suite (u_n) est convergente, sa limite L doit vérifier $L = f(L)$.

Puisque pour tout $n \in$ IN on a $u_n \ge 0$, on doit avoir $L \ge 0$.

Pour $L \ge 0$, on a les équivalence suivantes :

$L = f(L) \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\sqrt{1+L^2}$

$\Leftrightarrow 4L^2 = 1 + L^2 \Leftrightarrow L^2 = \frac{1}{3}$.

$\Leftrightarrow L = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

II) Puisque la suite (v_n) est croissante (propriété (P_1)) est majorée par 1 (propriété (P_2)), elle est donc convergente.

Puisque pour tout $n \in$ IN , $v_{n+1} = f(v_n)$, où la fonction f est celle de la question I)4), la limite A de (v_n) est également positive et vérifie également $A = f(A) \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La suite (u_n) est décroissante, la suite (v_n) est croissante, Puisque les limites des suites (u_n) et (v_n) sont fines, on peut écrire

$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n$

$= A - L = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

Les deux suites (u_n) et (v_n) vérifient donc les trois hypothèses nous permettant d'affirmer qu'elles sont adjacentes.



16 SE PERFECTIONNER

1) P_n, qui est évidement continue, est également strictement croissante sur IR_+ comme somme de fonction strictement croissante sur IR_+. De plus , $P_n(0)<0$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$, P_n réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$ et comme 0 est élément de $[P(0),+\infty[$, il existe un unique $u_n \in [0,+\infty[$ tel que $P(u_n) = 0$.

2) On a

$P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + u_n^{n+1} \ge 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$

Puisque P_n est croissante, on en déduit que $u_n \ge u_{n+1}$.

3) Remarquons que, $x \in]0,1[$, on a :

$P_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{2x - 1 - x^{n+1}}{1-x}$

En particulier, on a $P_n(\frac{1}{2}) \le 0$, et donc, puisque P_n est croissante, on déduit $u_n \ge 1/2$ pour tout n.

4) Soit $\rho \in]1/2,1[$, alors pour tout n assez grand, d'après l'écriture précédente de P_n, $P_n(\rho) \ge 0$ puisque le numérateur converge vers $2\rho - 1 > 0$. Ainsi, toujours par croissnce de (P_n) , il existe un $n_0 \in$ IN tel que pour tout $n \ge n_0$, on a : $\frac{1}{2} \le u_n \le \rho$

Ceci prouve exactement que (u_n) converge vers1/2.



17 SE PERFECTIONNER

1. a) et b)

c) (u_n) est croissante et elle converge vers 1.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout n de IN, on a : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

- Pour n = 0, $\frac{1}{2} \le u_0 = \frac{1}{2} < 1$
- Pour $n \ge 0$, supposons que $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ et montrons que $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$

En effet : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ et f est strictement croissante sur [0, 1] $\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) < f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{4}{5} \le u_{n+1} < 1$, ainsi $\forall n \in IN$, $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n^3}{1+u_n^2} = \frac{u_n(1-u_n^2)}{1+u_n^2} > 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante

De plus on a (u_n) est majorée par 1 donc elle est convergente

Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, $\frac{1}{2} \le \ell \le 1$

$u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur IR donc en ℓ

$\Rightarrow f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$, or $\frac{1}{2} \le \ell \le 1$

$\Rightarrow \ell = 1$

3. a) Montrons que, pour tout n de IN,

$0 < 1 - u_{n+1} \le \frac{2}{5}(1-u_n)$

$1 - u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{1+u_n^2} = \frac{(1-u_n)^2}{1+u_n^2} = \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \times (1-u_n)$

Or $\frac{1}{2} \le u_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - u_n \le \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+u_n^2} \le \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \le \frac{2}{5}$

$\Rightarrow 0 < 1 - u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \times (1-u_n) \le \frac{2}{5}(1-u_n)$

b) $\forall k \in IN$, $0 < 1 - u_{k+1} \le \frac{2}{5}(1-u_k)$

Pour k = 0, $0 < 1 - u_1 \le \frac{2}{5}(1-u_0)$

Pour k = 1, $0 < 1 - u_2 \le \frac{2}{5}(1-u_1)$

⋮

Pour k = n - 1, $0 < 1 - u_n \le \frac{2}{5}(1-u_{n-1})$

On fait le produit membre à membre et on simplifie, on obtient : $0 < 1 - u_n \le \left(\frac{2}{5}\right)^n (1-u_0)$

$\Rightarrow 0 < 1 - u_n \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. a) $0 < 1 - u_k \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k \le u_k < 1$

5. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) \le \sum_{k=1}^{n} u_k < \sum_{k=1}^{n} 1$

$\Rightarrow n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) \le \sum_{k=1}^{n} u_k < n$

$\Rightarrow n - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} \le \sum_{k=1}^{n} u_k < n$

$\Rightarrow n - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \le S_n < n$.

b) $1 - \underbrace{\frac{1}{3n}}_{\searrow 0}\underbrace{\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}_{\searrow 0} \le \frac{S_n}{n} < 1$, $\forall n \in IN^*$

c) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

18 SE PERFECTIONNER

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1. $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}$,

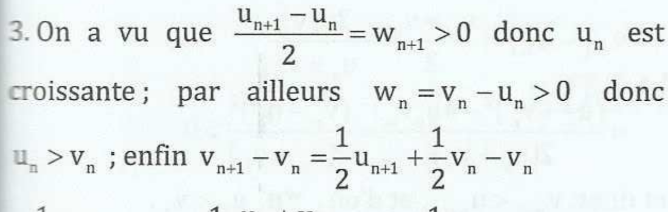
$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}$, $v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}$.

2. a.

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$

$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4}w_n$

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc $w_n = 1.\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.



3. On a vu que $\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=w_{n+1}>0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n=v_n-u_n>0$ donc $u_n>v_n$; enfin $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}v_n-v_n$

$=\frac{1}{2}(u_{n+1}-v_n)=\frac{1}{2}(\frac{u_n+v_n}{2}-v_n)=\frac{1}{4}(u_n-v_n)<0$ donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant...).

4. a. $t_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$.

On a donc $t_n=\frac{1}{3}(u_0+v_0)=\frac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(l+2l)\Rightarrow l=\frac{7}{3}$

19 SE PERFECTIONNER

1. $v_0=\frac{7}{u_0}=\frac{7}{3}$; $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{3+\frac{7}{3}}{2}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$;

$v_1=\frac{7}{u_1}=\frac{7}{\frac{8}{3}}=\frac{21}{8}$;

$u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2}=\frac{64+63}{48}=\frac{127}{48}$;

$v_2=\frac{7}{u_2}=\frac{7}{\frac{127}{48}}=\frac{336}{127}$;

$u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2}=\frac{32257}{12192}\approx 2{,}64575$;

$v_3=\frac{7}{u_3}=\frac{7}{\frac{32257}{12192}}=\frac{85344}{32257}\approx 2{,}64575$.

Il semble que les suites tendent vers 2,64575... et que la convergence soit très rapide.

2. P_n : $u_n>0$ et $v_n>0$.

P_0 : $u_0=3>0$ et $v_0=7/3>0$: P_0 est vérifiée.

Supposons P_n vraie : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}>0$ puisque u_n et v_n sont positifs, et bien sûr il en résulte que $v_{n+1}=\frac{7}{u_{n+1}}>0$ On a bien, quel que soit n de $\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

3. a. $(u_n+v_n)^2-28=(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow(u_n+v_n)^2-(u_n-v_n)^2=28$

$\Leftrightarrow 2(2u_nv_n)=28\Leftrightarrow u_nv_n=7\Leftrightarrow v_n=\frac{7}{u_n}$

3. b. $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2=\frac{1}{4u_{n+1}}\left((u_n+v_n)^2-28\right)$

$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(\frac{(u_n+v_n)^2}{4}-7\right)$

$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(u_{n+1}{}^2-7\right)=u_{n+1}-\frac{7}{u_{n+1}}=u_{n+1}-v_{n+1}$.

3.c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1}-v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit n, c'est-à-dire en remplaçant n+1 par n, on a u_n-v_n positif pour $n\geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour n = 0 : $u_0-v_0=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}>0$. On a bien $u_n-v_n>0$ ou encore $u_n>v_n$.

4.

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}<0$

car $v_n-u_n<0$;

$v_{n+1}-v_n=\frac{7}{u_{n+1}}-\frac{7}{u_n}=\frac{7(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}u_n}>0$ car $u_{n+1}-u_n<0$ et $u_n>0$ quel que soit n. La suite (u_n) est bien décroissante et la suite (v_n) est croissante.

5. a. On sait que $u_n>v_n$ or la suite v_n est croissante, donc $v_n>v_1$, on a donc : $u_n>v_n>v_1=\frac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow 4u_{n+1}\geq 10\Leftrightarrow u_{n+1}\geq\frac{5}{2}$

Or on sait que $u_n>\frac{21}{8}>\frac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété P_n: $u_n-v_n\leq\frac{1}{10^{2^n-1}}$.

Vérifions P_0 : $u_0 - v_0 = \frac{2}{3} < \frac{1}{10^{2^0-1}} = 1$, ok.

Démontrons P_{n+1} :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2 \le \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{\left(10^{2^n-1}\right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{(2^n-1)\times 2}}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^{2^n \times 2} \times 10^{-2}} = \frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}$$

5. d. On a $0 \le u_n - v_n \le \frac{1}{10^{2^n-1}}$ et on sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^{2^n-1}} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ (gendarmes).

6. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite λ. Celle-ci vérifie la relation $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{7}{\lim_{n\to+\infty} u_n} \Leftrightarrow l = \frac{7}{l} \Leftrightarrow l^2 = 7$; or l>0 donc $l = \sqrt{7}$.

7. $u_3 - v_3 \le \frac{1}{10^{2^3-1}} = \frac{1}{10^{8-1}} = 10^{-7}$: la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup... On se trouve en présence d'une convergence dite quadratique.

8. Pour trouver $\sqrt{a}$, il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{a}{u_n}$ puisque si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles ont même limite l telle que $l = \frac{a}{l} \Leftrightarrow l^2 = a$. Les démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

a) Soit (P_n) la propriété : u_n et v_n , sont strictement positifs ; (P_0) vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $u_0>0$ et $v_n>0$, donc $u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$: donc pour tout entier n on a u_n et v_n sont trictement positifs.

b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - n_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

et donc $v_{n+1} < u_{n+1}$; et d'où , $\forall n,\ u_n < v_n$.

c) On a 2x>0 ; d'où $0 < y - x < y + x$ d'où $\frac{x-y}{x+y} < 1$ d'où $\frac{x-y}{2(x+y)} < \frac{1}{2}$.

Ainsi $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)(v_n - u_n)}{2(u_n + v_n)} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

Soit (P_n) la propriété : $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$; (P_1) vraie : supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie :

$$v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

donc (P_n) vraie pour tout entier n $n \ge 1$. f) Comme 0<1/2<1 , on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

g) La suite (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{(v_n - u_n)u_n}{u_n + v_n} > 0$ et la suite (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{u - v_n}{2} W > 0$; et comme $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, donc ces deux suites sont adjacentes.

h) $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = u_0 v_0 = ab$, donc le produit est constant, Comme les suites sont adjacentes. Elles convegent vers la même limite ℓ et on a $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell^2 = ab$ et donc $\ell = \sqrt{ab}$.

i) On pose a = 2 et t' = 3 les suites (u_n)et(v_n) convergent vers $\sqrt{6}$; on calcule donc les premiers termes de la suite et dès que la différence $(v_n - u_n)$ est inférieur à 10^{-5} on a $u_1 = \frac{12}{5}$ et $v_1 = \frac{5}{2}$; $u_2 = \frac{120}{49}$ et $v_2 = \frac{49}{20}$; $u_3 = \frac{11760}{9602}$ et $v_3 = \frac{4801}{1960}$

$v_3 - u_3 < 10^{-5}$ donc $\frac{11760}{4801} < \sqrt{6} < \frac{4801}{1960}$.

Dérivabilité

I) Résumé du cours

A) Dérivée d'une fonction composée

- Si u est une fonction dérivable en x_0 et f une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors la fonction $f \circ u$ est dérivable en x_0 et : $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur u(I), alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$, pour tout réel x de I.

B) Théorème des accroissements finis

- ***Théorème 1 :*** (théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b] et vérifiant : f(a) = f(b)

Si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un élément x_o de]a, b[tel que $f'(x_o) = 0$

- ***Théorème 2 :*** (théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b]

Si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un élément x_o de]a, b[tel que $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- ***<u>Théorème 3 :</u>***

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b], dérivable sur]a, b[

On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour $x \in]a, b[$, on a alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

- ***Théorème 4 :***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in I$, on a alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous réels a et b de I

C) Point d'inflexion :

Soit f une fonction définie sur un domaine D et (Cf) sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

On dit qu'un point I(a, f(a)) est un point d'inflexion de (Cf) si et seulement si : (Cf) traverse sa tangente au point I

Dans le cas d'une fonction deux fois dérivable en a, I(a, f(a)) est un point d'inflexion de (Cf) si et seulement si : $f''(x)$ s'annule en a et change de signe

<u>Exemple :</u>

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$

I(2, - 7) ∈ (Cf) et (T) : y = - 12 x + 17 est la tangente à (Cf) en I

f(x) – (- 12x + 17) = $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

(Cf) est au dessous de (T) sur]- ∞, 2] et (Cf) est au dessus de (T) sur [2, + ∞[

⇒ I(2, - 7) est un point d'inflexion de (Cf)

D) Dérivée et sens de variation

✷ ***Du sens de variation au signe de la dérivée***

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I. (continue sur I , et dérivable sur l'intérieur de I suffit ...)

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$

✷ ***Du signe de la dérivée au sens de variation***

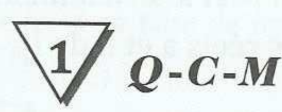
Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I. (continue sur I, et dérivable sur l'intérieur de I suffit)

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

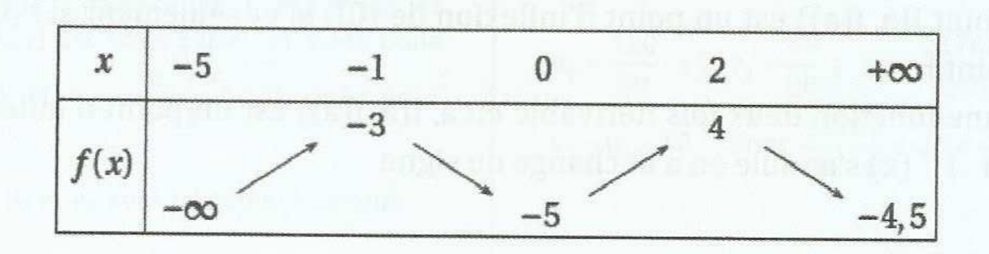
Si la dérivée f ' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

II) Exercices



Soit f une fonction définie et dérivable sur]- 5, + ∞[dont le tableau de variation est le suivant :



x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par (C) la courbe représentative de f

1) Sur l'intervalle]-5, + ∞[, l'équation $f(x) = -2$ admet :

a) Une seule solution

b) Exactement deux solutions

c) Quatre solutions

2) Sachant que $f'(2) = 0$ l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 2 est :

a) $y = 4$

b) $y = 4(x - 2)$

c) $x = 4$

3) sur l'intervalle [-1, 0], la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est :

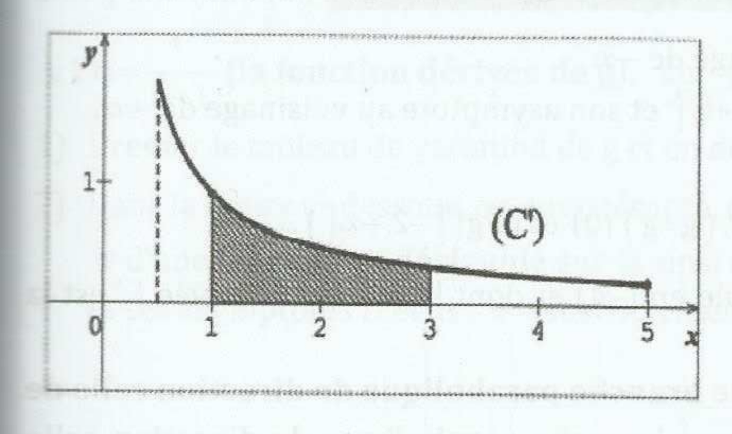
a) strictement croissante

b) strictement décroissante

c) n'est pas monotone



VRAI– FAUX (session principale 2012)



Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 5\right]$

Telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1, 0) et B(3, 1). Dans la figure ci contre on a représenté la courbe (C′) de la dérivée f ′ de la fonction f

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur – 1

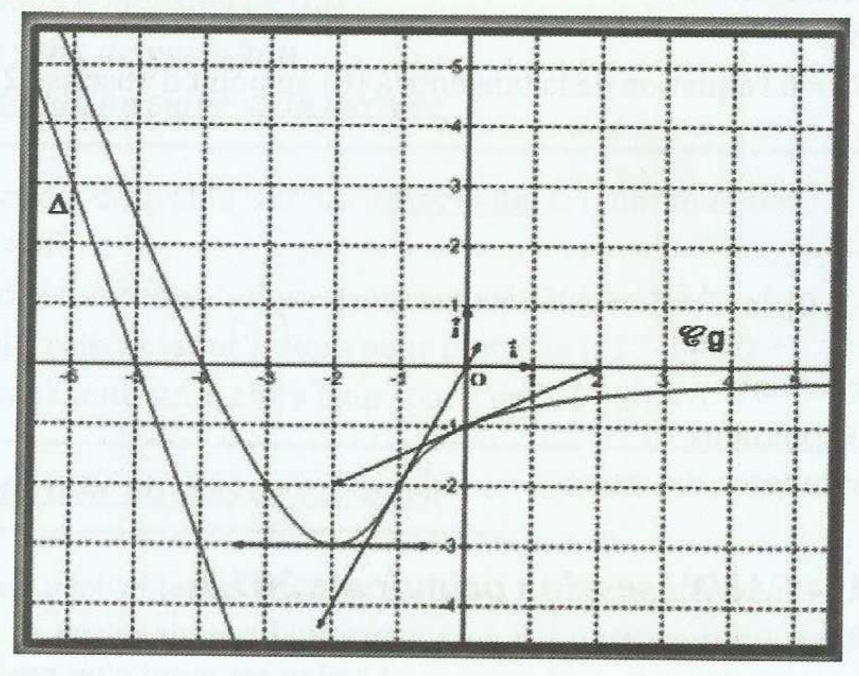
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1 (Question à traiter plus tard dans le chapitre « calcul intégral »)

3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$

4) Pour tous a et b de [1, 3], on a $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$

3 APPLIQUER

Dans le graphique ci-dessous **cg** est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g dérivable sur IR.



cg Possède une asymptote oblique Δ au voisinage de $-\infty$.
L'axe des abscisses est au dessus de **cg** sur $[-4\,;+\infty[$ et son asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) Déterminer par une lecture graphique :

$$\lim_{x\to+\infty} g,\ \lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+3x\right),\ g\circ g(0),\ \left(g\circ g\right)'(0) \text{ et } g\circ g\left(\left[-2,+\infty\right[\right).$$

2) Soit f la fonction dérivable sur IR qui s'annule en (−4) et dont la fonction dérivée f ' est la fonction g.
La courbe **cf** représentative de f possède **une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses** au voisinage de $+\infty$ et **une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées** au voisinage de $-\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de f sur IR et donner $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Justifier que **cf** possède un unique point d'inflexion I qu'on précisera l'abscisse.

4 APPLIQUER

La fonction *f* est définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$.

Vérifier que la fonction *f* est la composée d'une part des fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto\frac{1}{x+3}$ et d'autre part des fonctions $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto x^2+3$.

Calculer la fonction dérivée de f en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées en utilisant les deux décompositions.



Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont dérivables sur un intervalle I. préciser I et calculer leur dérivée sur cet intervalle.

1) $f : x \mapsto -2x+1$ et $g : x \mapsto x^2 - 6x + 4$

2) $f : x \mapsto 3x^2 + 6$ et $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$

4) $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

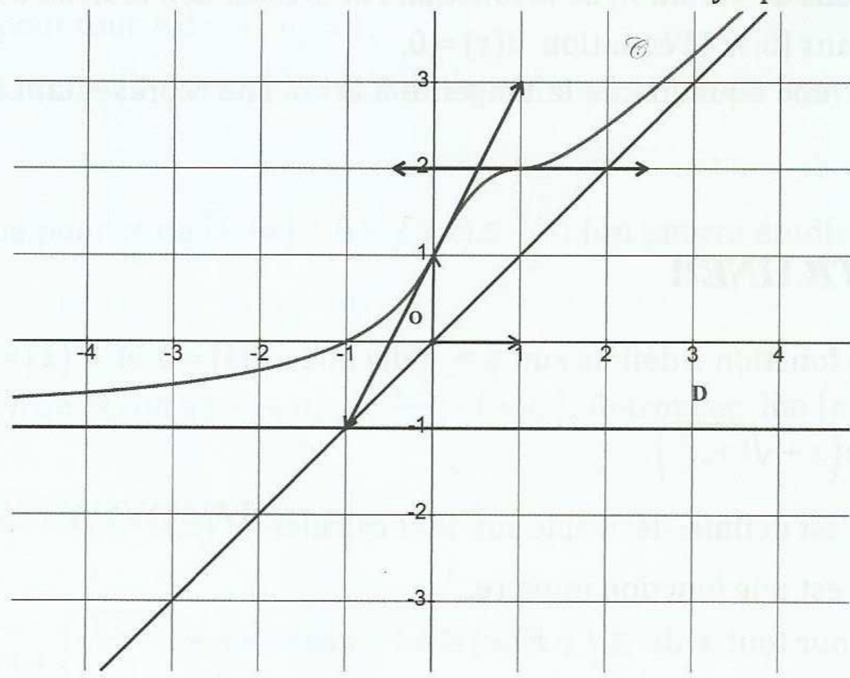
6 APPLIQUER

Soit g une fonction **dérivable** sur $]-1,+\infty[$ qui **s'annule en 1** telle que pour tout $x > -1$,

$g'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **(la fonction dérivée de g)**, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

1) Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$

2) Dans la figure ci-dessous, on a représenté, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f **dérivable** sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et ses asymptotes D et Δ. $\mathscr{C}$ est strictement au dessus de ses asymptotes.



Déterminer $g \circ f(0)$, $(g \circ f)'(0)$, $\lim\limits_{-\infty} g \circ f$, $g \circ f(\mathbb{R}_-)$



Soit f la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \dfrac{-1 + x\sin x}{x}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi]$ et calculer $f'(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de f'. En déduire l'existence d'un unique réel x_0 de $]0, \pi]$ tel que $f'(x_0) = 0$

   c) Donner alors le signe de $f'(x)$ sur $]0, \pi]$

2) a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. En déduire la position du réel x_0 par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ ainsi que le signe de $f(x_0)$

   b) Montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions p et q sur $]0, \pi]$



On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par : $f(x) = \cos\sqrt{x}$

1) a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = -2\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$

   b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner $f'(0)$

2) a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer $f'(x)$.

   b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) a) Résoudre dans $[0, \pi^2]$ l'équation : $f(x) = 0$.

   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$.

9 S'ENTRAINER

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1) = 0$ et $h'(x) = \dfrac{1}{x}$

On pose $F(x) = h\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1) Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2) Montrer que F est une fonction impaire.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$; $F(x) \leq x$.



10 S'ENTRAINER

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de IN, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^{\ 2}\right)$.

1. Soit la fonction définie sur [1,2] par $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

   a) Montrer que f est dérivable sur [1,2] et que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

   b) En déduire que pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

   b) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

   c) En déduire que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.



11 S'ENTRAINER

On définit dans $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

3) a) Démontrer que pour x de $[1, +\infty[$: $0 < f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. (on pourra étudier les variations de f' sur $[1, +\infty[$).

   b) Déduire pour n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 + u_{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + u_n)$. Retrouver $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$.



12 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - x + \pi & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité de f en 1.

2) a) Montrer que : $\forall x>1$, on a : $f(x)\geq\sqrt{x^2-1}+\pi x$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]1;+\infty[$.

b) Prouver que : $\forall x>1$, on a : $f'(x)>0$.

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) L'équation $f(x)=0$ possède – t- elle des solutions dans IR.

7) Soit la fonction $h:[0,\pi]\to IR$; $x\mapsto h(x)=f(3+\sin x)$.

a) Justifier la dérivabilité de h sur $[0,\pi]$ et calculer h'(x).

b) Dresser le tableau de variation de h.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x\in]0,2] \\ x-\dfrac{4}{x} & \text{si } x\in]2,+\infty[\end{cases}$

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1) a) Montrer que f est continue en 2.

b) Etudier la dérivabilité en 2.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,2[$, $f'(x)=\dfrac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]2,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

d) Tracer (ζ) (On précisera les demi tangentes au point d'abscisse 2)



SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur]– 1, 1[par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. (on prendra 2 cm comme unité graphique).

1) Calculer $\lim_{x \to (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Montrer que pour tout réel x de] − 1, 1 [, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; puis dresser le tableau de variation de f.

3) a) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Tracer (C_f) et Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans] − 1, 1 [une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout réel x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $|f'(x)| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

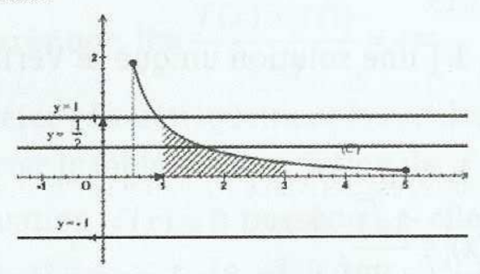
c) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $|f(x) - \alpha| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}|x-\alpha|$.

1 Q-C-M

1. b)
2. a)
3. a)

2 VRAI OU FAUX

Vrai – Faux :



1) $\forall x \in \left[\frac{1}{2},5\right]$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \neq -1$

$\Rightarrow$ (C) n'admet aucune tangente de coefficient directeur – 1 **(Faux)**

2) $A = \int_1^3 f'(x)dx = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1$

(Vrai)

3) La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe

(C ′) en un point donc il existe un réel $c \in \left[\frac{1}{2},5\right]$ tel

que $f'(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (C) admet une tangente de

coefficient directeur $\frac{1}{2}$ **(Vrai)**

Autrement : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [1,3] \\ f \text{ est dérivable sur }]1,3[\end{cases} \Rightarrow$ il existe au moins un réel $c \in]1, 3[$ tel que

$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

4) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,3] \\ \forall x \in [1,3],\ |f'(x)| \leq 1 \end{cases} \overset{\text{Théorème des accroissements finies}}{\Rightarrow}$

pour tous réels a et b de [1, 3], on a :
$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ **(Vrai)**



3 APPLIQUER

1°) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{0}$, $\lim_{x\to-\infty} (g(x)+3x) = \boxed{-15}$,

$g\circ g(0) = g(-1) = \boxed{-2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{0}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{+\infty}$

$(g\circ g)'(0) = g'(0)\times g'(g(0)) = g'(0)\times g'(-1) = \frac{1}{2}\times 2 = \boxed{1}$

et $g\circ g([-2,+\infty[) = g([-3,0[) = \boxed{[-3,-1[}$

2) a)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

3)
b)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$		+	0	−	

4 APPLIQUER

$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $x \in [1, +\infty[$

cf possède un unique point d'inflexion I d'abscisse −2.

Considérons les fonctions : $x \overset{u}{\mapsto} x^2$; $x \overset{v}{\mapsto} \frac{1}{x+3}$;

$x \overset{h}{\mapsto} \frac{1}{x}$ et $x \overset{g}{\mapsto} x^2+3$

$\Rightarrow f(x) = v\circ u(x) = h\circ g(x)$

$f'(x) = (v\circ u)'(x) = u'(x)\times v'(u(x))$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\times\left(-\frac{1}{(x^2+3)^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f'(x) = (h\circ g)'(x) = g'(x)\times h'(g(x))$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\times\left(-\frac{1}{(x^2+3)^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

5 APPLIQUER

1. $f : x \mapsto -2x+1$ et $g : x \mapsto x^2 - 6x + 4$

$f\circ g$ est dérivable sur IR et on a :

$(f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'(g(x))$

$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = (2x-6)\times(-2) = -4x+12$

$g\circ f$ est dérivable sur IR et on a :

$(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

$\Rightarrow (g\circ f)'(x)=-2\left[2(-2x+1)-6\right]=8x+8$

2. $f:x\mapsto 3x^2+6$ et $g:x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

$f\circ g$ est dérivable sur IR \ {-2} et on a :

$$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}\times 6\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{6(x+1)}{(x+2)^3}$$

$g\circ f$ est dérivable sur IR et on a :

$$(g\circ f)'(x)=\frac{6x}{(3x^2+8)^2}$$

3. $f:x\mapsto \sqrt{x}$ et $g:x\mapsto x^2-1$

$f\circ g$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et on a :

$$(f\circ g)'(x)=2x\times\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$g\circ f$ est dérivable sur IR^*_+ et on a :

$$(g\circ f)'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}=1$$

4. $f:x\mapsto x^3$ et $g:x\mapsto \dfrac{1}{x}$

$f\circ g$ est dérivable sur IR* et on a :

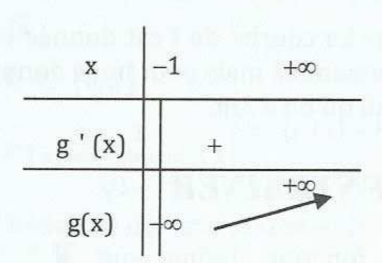
$$(f\circ g)'(x)=\frac{-1}{x^2}\times 3\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{-3}{x^4}$$

$g\circ f$ est dérivable sur IR* et on a :

$$(g\circ f)'(x)=3x^2\times\left(\frac{-1}{x^6}\right)=\frac{-3}{x^4}$$

6 APPLIQUER

1)



x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Si $-1<x<1$ alors $g(x)<g(1)\Rightarrow g(x)<0$

Si $x>1$ alors $g(x)>g(1)\Rightarrow g(x)>0$

Si $x=1$ alors $g(x)=0$

$g\circ f(0)=g(1)=0$;

2)

$$(g\circ f)'(0)=f'(0)\times g'(f(0))=2\times g'(1)=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{-\infty} f=(-1)^+\\ \lim\limits_{(-1)^+} g=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{-\infty} g\circ f=-\infty$$

$$g\circ f(\mathbb{R})=g(]-1,1])=\left]\lim_{(-1)^+} g, g(1)\right]=]-\infty,0]$$

 7 APPLIQUER

1) a) $\forall x\in]0,\pi]$, on a $f(x)=\dfrac{-1+x\sin x}{x}=\dfrac{-1}{x}+\sin x$

$\left(x\mapsto\dfrac{-1}{x}\right)$ est dérivable sur IR* en particulier sur $]0,\pi]$

$(x\mapsto\sin x)$ est dérivable sur IR en particulier sur $]0,\pi]$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,\pi]$ comme étant la somme de deux fonctions dérivables

Et on a $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\cos x$

b) $f''(x)=\dfrac{-2}{x^3}-\sin x\le 0$

x	0	π
f''(x)	‖	-
f'(x)	‖ $+\infty$ ↘	$\dfrac{1}{\pi^2}-1$

$f'(]0,\pi])=[\dfrac{1}{\pi^2}-1,+\infty[$

$0\in[\dfrac{1}{\pi^2}-1,+\infty[\Rightarrow$ il existe $x_0\in]0,\pi]$ tel que $f'(x_0)=0$, or f' est strictement décroissante sur $]0,\pi]\Rightarrow x_0$ est unique

c)

x	0		x_0		π
f'(x)	‖	+	0	-	

2) a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}+1$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}>0\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<x_0$

$0<\dfrac{\pi}{2}<x_0$ et $f'(x)\ge 0\ \forall x\in]0,x_0]\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]0,x_0]$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x_0) \Rightarrow -\frac{2}{\pi} + 1 < f(x_0) \Rightarrow f(x_0) > 0$

b)

x	0		x_0		π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	$\frac{1}{\pi}$

$f(]0, x_0]) =]-\infty, f(x_0)]$ et $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 \in]-\infty, f(x_0)] \Rightarrow$ il existe p $\in]0, x_0]$ tel que f(p) = 0 or f est strictement croissante sur $]0, x_0] \Rightarrow$ p est unique

$f([x_0, \pi]) = [-\frac{1}{\pi}, f(x_0)]$ et $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 \in [-\frac{1}{\pi}, f(x_0)] \Rightarrow$ il existe $q \in [x_0, \pi]$ tel que f(q) = 0 or f est strictement décroissante sur $[x_0, \pi] \Rightarrow$ q est unique

Ainsi l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions distinctes p et q dans $]0, \pi]$

8 S'ENTRAINER

$f(x) = \cos\sqrt{x}, \forall x \in [0, \pi^2]$.

1. a) Pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) = \cos\sqrt{x} = \cos\left(2\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow f(x) - 1 = 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

Cos2a = cos²a – sin²a = 2cos²a – 1 = 1 – 2sin²a

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. a) f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée.

Soit $U(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \pi^2]$.

U est dérivable sur $]0, \pi^2]$; $U(]0, \pi^2]) =]0, \pi]$

Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $]0, \pi]$

$\Rightarrow f = \cos \circ U$ est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et on a :

$f'(x) = U'(x) \times [-\sin(U(x))] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \forall x \in]0, \pi^2]$

Ainsi $\forall x \in [0, \pi^2]$,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in]0, \pi^2] \\ -\frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

b) Si $x \in]0, \pi^2]$ alors $0 < \sqrt{x} \leq \pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \geq 0$
$\Rightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in]0, \pi^2]$.

x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0
$f(x)$	1	↘	-1

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{x} \in [0, \pi] \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$

b) Soit (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$

$(T) : y = f'(\frac{\pi^2}{4})(x - \frac{\pi^2}{4}) + f(\frac{\pi^2}{4})$

$= -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$

Remarque : La courbe de f est donnée ci – dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.

9 S'ENTRAINER

h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1) = 0$ et $h'(x) = \frac{1}{x}$

(C'est une fonction qu'on va l'étudier plus tard appelée fonction logarithme népérien)

On pose $F(x) = h\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1. Domaine de définition de F :

$\forall x \in IR, 1 + x^2 > x^2 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$

Puisque h est définie sur $\mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow F(x) = h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est définie sur IR.

Domaine de dérivabilité de F :

$\left(\overset{U}{x \mapsto 1+x^2}\right)$ est dérivable et strictement positive sur IR $\Rightarrow \sqrt{U}$ est dérivable sur IR

$\Rightarrow \left(x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable sur IR

$\left.\begin{array}{l} \left(\overset{V}{x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}}\right) \text{ est dérivable sur IR} \\ h \text{ est dérivable sur } IR_+^* \\ V(IR) \subset IR_+^* \end{array}\right\} \Rightarrow$

F = h o V est dérivable sur IR.

Calcul de dérivée de F :

$F'(x) = V'(x) \times h'(V(x))$

$= \left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \times \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in$ IR.

2. Parité de F :

Soit $H(x) = F(x) + F(-x)$, $\forall x \in$ IR.

H est dérivable sur IR (n'oublier pas de traiter $F(-x)$ comme composée de deux fonctions dérivables sur IR)

$H'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0$ car F ' est paire.

$\Rightarrow$ H est une constante

Or $H(0) = 2F(0) = 2h(1) = 0$

$\Rightarrow H(x) = F(x) + F(-x) = 0$, $\forall x \in$ IR

$\Rightarrow F(-x) = -F(x)$, $\forall x \in$ IR.

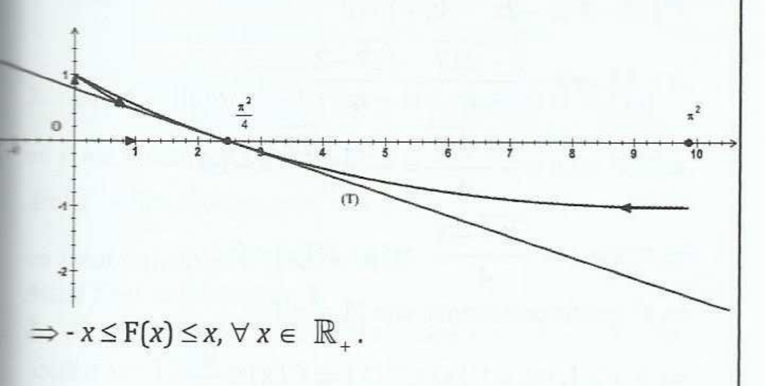
$\Rightarrow$ F est une fonction impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\left.\begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } [0,x] \\ \forall t \in [0,x],\ F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |F(x) - F(0)| \le |x|$

(D'après le théorème des accroissements finis)

$\Rightarrow |F(x)| \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.



$\Rightarrow -x \le F(x) \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Autrement :

On aurait pu démontrer l'inégalité précédente par une étude de fonction.

On pose $G(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}_+$

G est dérivable sur IR et on a : $G'(x) = F'(x) - 1$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$

$\Rightarrow$ G est strictement décroissante sur IR

$\Rightarrow$ Si $x \ge 0$ alors $G(x) \le G(0) \Rightarrow G(x) \le 0 \Rightarrow F(x) \le x$.

10 S'ENTRAINER

1. a) f est une fonction polynôme dérivable sur IR en particulier sur [1, 2] et on a :

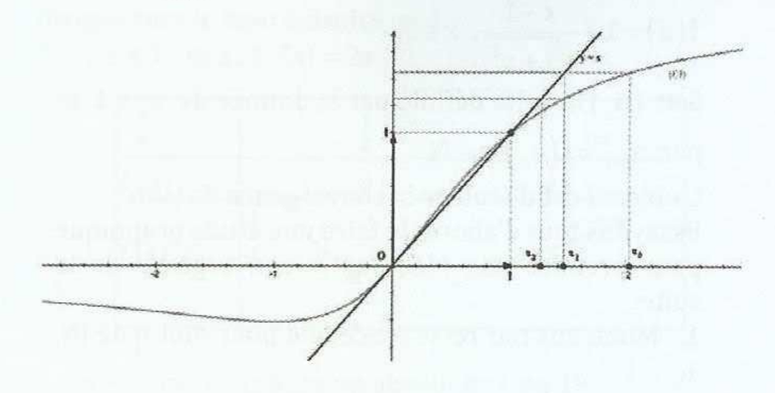
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x \Rightarrow |f'(x)| = f'(x) \le \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in [1, 2]$

b) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ |f'(x)| \le \dfrac{1}{2}\ \forall x \in [1,2] \\ \sqrt{2} \in [1,2] \end{array}\right. \Rightarrow \forall x \in [1,2]$, on a :

$\left|f(x) - f\left(\sqrt{2}\right)\right| \le \dfrac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$

2. a) Pour n = 0, $1 \le u_0 = 1 \le 2$

pour $n \ge 0$, supposons que $1 \le u_n \le 2$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le 2$



En effet : $1 \le u_n \le 2$ et f est strictement croissante sur $[1,2] \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

$\Rightarrow 1 < \dfrac{5}{4} \le u_{n+1} \le \dfrac{3}{2} < 2$

Ainsi pour tout n de IN, $1 \le u_n \le 2$.

b) Pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \le \dfrac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$

et $1 \le u_n \le 2 \Rightarrow \left|f(u_n) - f\left(\sqrt{2}\right)\right| \le \dfrac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

c) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour n = 0, $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Pour n ≥ 0, supposons que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

En effet : $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$ et $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Ainsi $\forall\, n \in$ IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Rightarrow$ (u_n) converge et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \sqrt{2}$

11 S'ENTRAINER

$f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.

L'objectif est d'étudier la convergence de suite. Essayons tout d'abord de faire une étude graphique pour prendre une idée sur la convergence de la suite.

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 1$

- Pour n = 0, $u_0 > 1$ (donnée)
- Pour n ≥ 0, supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$

En effet : $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}}$

$\Rightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{\overbrace{u_n - 1}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1+u_n^2}}_{>0}} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 1$

Ainsi : $\forall\, n \in$ IN, $u_n > 1$.

2. $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n$

$= \underbrace{(u_n - 1)}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1\right)}_{<0} < 0$

$\Rightarrow$ (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n$, on a $\ell \geq 1$.

$u_{n+1} = f(u_n)$, avec *f* continue sur IR en particulier en $\ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow 1 + \frac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \Rightarrow \frac{\ell-1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell - 1$

$\Rightarrow (\ell - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \ell = 1$ ou $\sqrt{1+\ell^2} = 1$

(c a d $\ell = 0$) Or $\ell \geq 1 \Rightarrow \ell = 1$.

3. <u>Autre procédé de convergence :</u>

a) $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (x-1)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$= \frac{1+x^2-x^2+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$

$\forall\, x \geq 1$

$f'(x) = \frac{1+x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\times 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+}{(1+x^2)^3}$

$= \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1+x^2) - 3x(1+x)\right]}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x^2-3x+1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 17 \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{-4} = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$

≈ 0.28 ou $x = \frac{3+\sqrt{17}}{-4} = -\frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx -1.7$

$\Rightarrow \forall\, x \geq 1 > \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, on a : $f''(x) < 0$

$\Rightarrow f'$ est décroissante sur $[1, +\infty[$

$\Rightarrow \forall\, x \geq 1$, on a $f'(x) \leq f'(1) \Rightarrow f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b)

•

f est dérivable sur $[1,+\infty[$

$|f'(x)| = f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_n \in [1,+\infty[$

$\Rightarrow |f(u_n) - f(1)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - 1|$

(D'après le théorème des accroissements finis)

$|u_{n+1} - 1| = u_{n+1} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1)$

$0 < u_{k+1} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(u_k - 1)$

Pour k = 0, $0 < u_1 - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(u_0 - 1)$

Pour k = 1, $0 < u_2 - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 - 1)$

⋮

• ⋮

Pour k = n - 1, $0 < u_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{n-1} - 1)$

On fait le produit terme à terme

et on simplifie on obtient : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (u_0 - 1)$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (u_0 - 1) = 0$ car $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1,1[\Rightarrow$

(u_n) converge et elle tend vers 1.

12 S'ENTRAINER

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2-1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - x + \pi & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1. $\lim_{1^+} f = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1} + \pi x + \cos \pi x + 1 = \pi = f(1)$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 1

$\lim_{1^-} f = \lim_{x\to 1^-} x^2 - x + \pi = \pi = f(1)$

$\Rightarrow f$ est continue à gauche en 1

Ainsi f est continue en 1.

2. a) $\forall$ x $\in$ IR, on a : $\cos \pi x \geq -1 \Rightarrow \cos \pi x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow \forall x > 1$, on a : $f(x) \geq \sqrt{x^2-1} + \pi x$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} + \pi x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. a) $\left(x \mapsto \sqrt{x^2-1}\right)$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$

$(x \mapsto \pi x + \cos \pi x + 1)$ est dérivable sur IR en particulier sur $]1, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme étant la somme de deux fonctions dérivables

b) $\forall x > 1$, on a :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}_{>0} + \underbrace{\pi - \pi\sin(\pi x)}_{\geq 0} > 0.$$

4. $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{\pi x - \pi}{x-1} + \frac{\cos(\pi x)+1}{x-1}$

Or $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

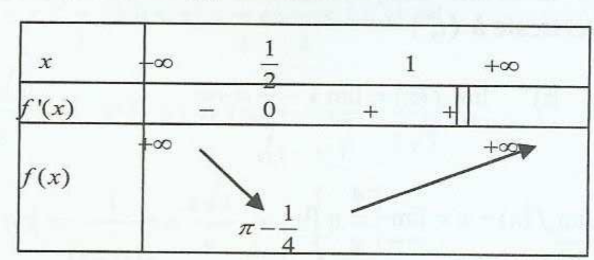
$\lim_{x\to 1^+} \frac{\pi x - \pi}{x-1} = \pi$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(\pi x)+1}{x-1} = -\pi \sin \pi = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 1

La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en 1.

5. $\forall x \leq 1$, on a : $f'(x) = 2x - 1$



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\pi - \frac{1}{4}$	↗		↗	$+\infty$

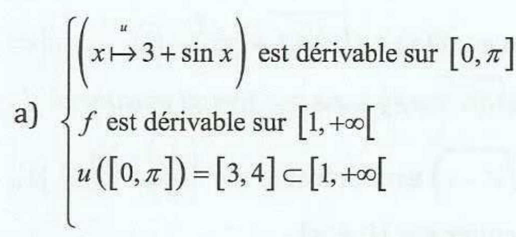
6. $\pi - \frac{1}{4}$ est un minimum absolu de f sur IR

$\Rightarrow f(x) \geq \pi - \frac{1}{4}, \forall x \in$ IR

Or $\pi - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x \in$ IR

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas des solutions dans IR.

7. $h(x) = f(3 + \sin x)$, $\forall x \in [0, \pi]$



a) $\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} 3+\sin x\right) \text{ est dérivable sur } [0,\pi] \\ f \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ u([0,\pi]) = [3,4] \subset [1,+\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow$ h = f o u est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a :

$h'(x) = u'(x)\times f'(u(x)) = \cos x \times \underbrace{f'(u(x))}_{>0}$

b) Le signe de h ′ (x) est celui de cos x sur $[0, \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$f(3)$ ↗	$f(4)$	↘ $f(3)$

13 SE PERFECTIONNER

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0,2] \\ x - \dfrac{4}{x} & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \left(\dfrac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \underbrace{\dfrac{4}{x}}_{\searrow 0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de $+\infty$.

2) a) $\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = 0$

$\lim\limits_{2^+} f = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x - \dfrac{4}{x} = 0$

$\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{2^+} f = f(2) \Rightarrow f$ est continue en 2.

b)

☛ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4-x^2}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)(2+x)}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} -\dfrac{2+x}{x\sqrt{4-x^2}}$

$= \left(-\dfrac{4}{0^+}\right) = -\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en 2.

☛ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-\frac{4}{x}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x} = 2$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$.

Ainsi f n'est pas dérivable en 2.

3) a) $\forall\ x \in]0,2[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

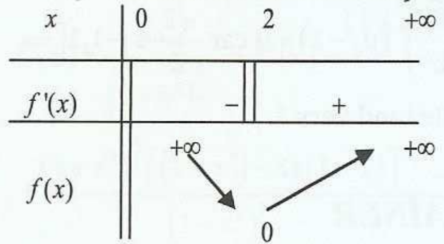
$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right) - \sqrt{4-x^2}}{x^2} = \dfrac{-x^2-4+x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

$= -\dfrac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

b) $\forall\ x \in]2,+\infty[$, $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

c) Tableau de variation de f :



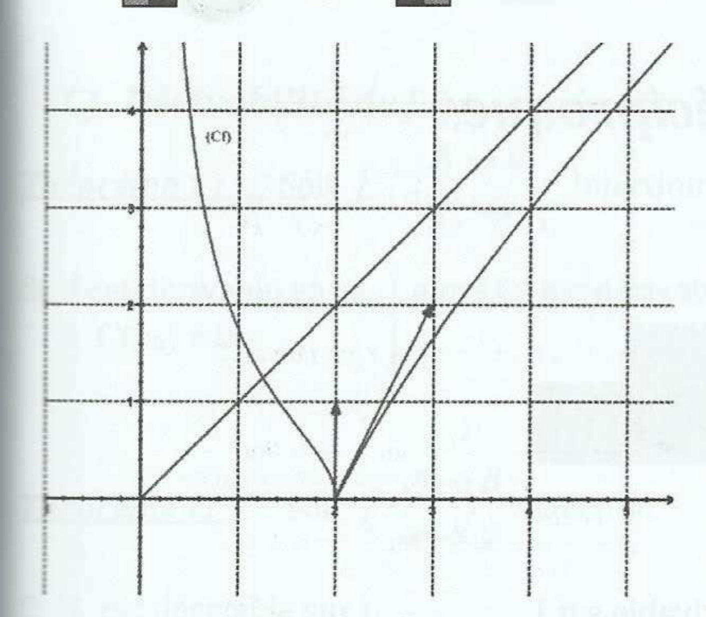
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	‖	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

d) <u>Traçage :</u>

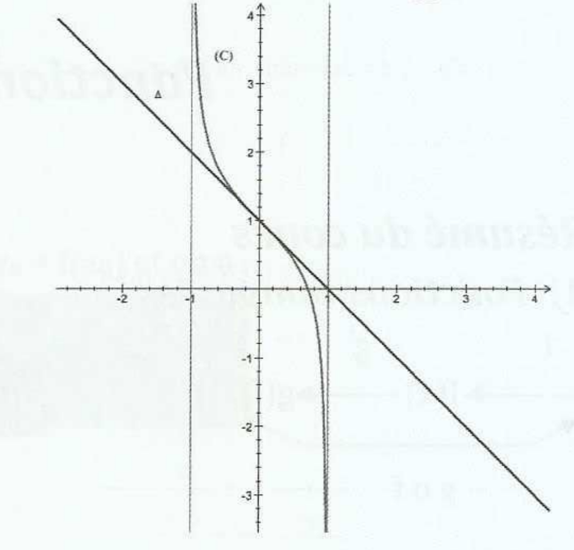
Les demi-tangentes au point d'abscisse 2 :

☛ (ζ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche en 2 ayant pour équation : $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq f(2) = 0 \end{cases}$

☛ (ζ) admet une demi-tangente à droite en 2 ayant pour équation : $\begin{cases} y = 2(x-2) \\ x \geq 2 \end{cases}$



b)



14 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur]−1,1[par $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

⇒ Les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont deux asymptotes verticales à (C_f).

2) $f'(x) = -\dfrac{1\times\sqrt{1-x^2} - x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$= -\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3) a) $\Delta : y = f'(0)\,x + f(0) = -x + 1$

4) a) On pose $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in]-1, 1[$

φ est dérivable sur]-1, 1[et on a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$, pour tout $x \in]-1, 1[$

φ est continue et strictement décroissante sur]-1, 1[donc φ réalise une bijection de]-1, 1[sur $\varphi(]-1, 1[) =]-\infty, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans]-1, 1[.

$\varphi(0) = f(0) = 1 > 0$

$\varphi(1/2) = f(1/2) - ½ = ½ - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < ½$.

b) Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Or $0 \le x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le 1 - x^2 \le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \le (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow |f'(x)| = \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9},\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \text{f est dérivable sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ |f'(x)| \le \frac{8\sqrt{3}}{9},\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\text{Théorème des accroissements finies}} |f(x) - f(\alpha)| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$

$\Rightarrow \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$

Fonctions réciproques

I) Résumé du cours

A) Fonctions composées :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

g o f

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Thé : si f est dérivable sur I + g est dérivable sur f(I) } alors g o f est dérivable sur I $\forall x \in I$

$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = f'(x)\, g'(f(x))$

B) Fonction bijective :

Définition :

$f : \begin{matrix} A \to B \\ x \to y \end{matrix}$ est bijective **si et seulement si** $\forall y \in B$ il existe un seul réel $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Remarque:

Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} existe: $f^{-1} : \begin{matrix} B \to A \\ y \to x \end{matrix}$

On a alors :

- $\forall x \in A$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B$ on a $f(f^{-1}(y)) = y$
- $(x \in A$ et $f(x) = y) \Leftrightarrow y \in B$ et $x = f^{-1}(y)$ $\quad x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$

Théorème :

Soit f une fonction ***strictement monotone*** sur I on a alors :

- f est bijective de I sur $f(I)$.
- f et f^{-1} ont le même sens de variation.
- Cf et Cf^{-1} sont symétrique par rapport à $\Delta : y = x$.
- Si de plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f(I)$.

$$M(x, y) \xrightarrow{S_\Delta} M'(y, x)$$

C) Dérivabilité de f^{-1}

Théorème 1 : Soit $f^{-1}: \begin{matrix} A \to B \\ y_0 \to x_0 \end{matrix}$ bijection

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Théorème 2: Soit $f: \begin{matrix} A \to B \\ x \to y \end{matrix}$ bijection

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a : $\forall y \in f(I)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

où $x = f^{-1}(y)$

D) Fonction racine $n^{ième}$:

Théorème et définition :

n étant un entier naturel $(n \geq 2)$; $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; x \to x^n$ f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction réciproque de f est appelé la fonction racine $n^{ième}$: $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; x \to \sqrt[n]{x}$.

Propriétés des radiaux :

1) La fonction racine $n^{ième}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise une bijection $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt[n]{x^n} = x$.

3) Soit p un entier naturel non nul et n un entier, $n \geq 2$; on a : $\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$.

4) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, n et p entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 2$, on a : $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$.

5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, n et p entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a : $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$.

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$.

7) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

Equation $x^n = a$: (Soit n entier naturel tel que $n \geq 2$ et a un réel non nul)

$x^n = a$	n pair	n impair
a > 0	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
a < 0	$S = \phi$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Remarque : si a est nul, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S = \{0\}$.

E) Exposants Rationnels :

Soient x réel strictement positif, r un rationnel et $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r ; $(p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}^*)$. On appelle puissance à exposant r du réel x, le réel noté x^r définie par : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

Propriétés : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $(r, r') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, on a :

$x^r . x^{r'} = x^{r+r'}$	$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r.r'}$	$(xy)^r = x^r . y^r$	$\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$

Dérivée de la fonction racine $n^{ième}$:

Pour tout entier $n \geq 2$; la fonction $x \to \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, définie sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa fonction dérivée est : $x \to \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

II) Exercices



Soit f une fonction continue dérivable sur $]-\infty, 3]$ On donne $f(0) = 4$, $f(2) = 0$ et $f'(0) = 2$

x	$-\infty$		3
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	↗	5

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) f réalise une bijection de $]-\infty, 3]$ sur $]-\infty, 5]$
2) f^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty, 5]$
3) f^{-1} est continue sur $]-\infty, 5]$

4) f^{-1} est dérivable en 4 et $\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{2}$

5) f^{-1} est dérivable à gauche en 5

6) f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,5[$

7) a) L'équation $f(x)=\frac{5}{n}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ admet une unique solution α_n sur $]-\infty,3]$

b) (α_n) est décroissante

c) (α_n) est convergente

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$



2 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j})$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Soit f un fonction bijective de I sur I et tel que la fonction réciproque de f est f .
On a la droite D : y = x est un axe de symétrie de Cf.

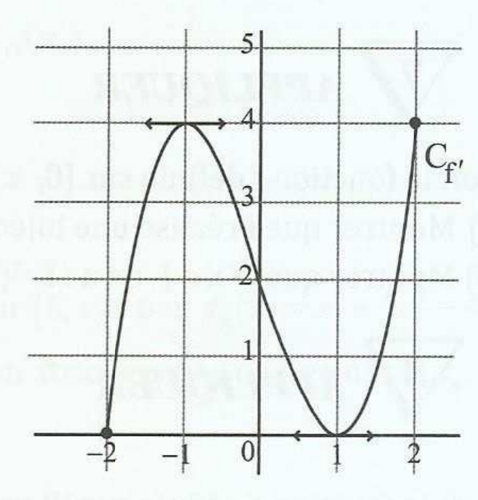
2) Soit f une fonction bijective de $[-5,5]$ sur $[-5,5]$
Si f est impaire alors f^{-1} est impaire.

3) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
Si f n'est pas dérivable à droite en 2 alors f^{-1} n'est pas dérivable à droite en f (2).



3 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le graphique ci-contre représente la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée f′ de f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur $f([-2,2])$.

2) f admet un minimum local en 1.

3) La courbe de f admet deux points d'inflexions.



4 APPLIQUER

On considère les fonction f et g définie sur IR par :

f(x) = x^4-6x^2+20x et g(x) = $x^3 - 3x+5$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\alpha\in\ ]-3\ ,\ -2[$.

3) Déterminer le signe de g(x).

4) Donner un encadrement de α à 0.1 prés

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Montrer que $f(\alpha) = -3\alpha^2 + 15\alpha$



5 APPLIQUER

On définit les deux fonctions : $g :]0, \pi[\rightarrow IR$, $x \rightarrow \cot x - 2x$ et $h :]0, \pi[\rightarrow IR$, $x \rightarrow x\cos^2 x$

1) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]0, \pi[$ une unique solution α et que le réel $\alpha \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$. Donner le signe de g (x) sur $]0, \pi[$.

2)

b) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a : $h'(x) = \sin x \cos x \, g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de h.



6 APPLIQUER

$f :]-1, 1[\rightarrow IR \quad x \rightarrow \tan(\frac{\pi}{2}x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de]-1, 1[sur un intervalle J.

2) Etudier la parité de f^{-1}.

3) Soit C la courbe de f et C ' la courbe de g avec $g(x) = f^{-1}(-x)$, $x \in IR$.

Montrer que C' = r (C) avec r est une rotation que l'on précisera.



7 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que $\forall x \in J$ on a : $f^{-1}(-x) = \pi - f^{-1}(x)$.



8 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2+1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer Cf dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on précisera.



APPLIQUER

Soit la fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Etudier f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Déterminer une valeur approchée de α à 0,1 près.



APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$, l'équation f(x) = n possède une unique solution notée x_n sur IR.

2) Montrer que la suite (x_n) est croissante.

3) Montrer que $\forall n \geq 1, n \leq x_n \leq n+1$ et En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.



S'ENTRAINER

Soit la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x) = x^n + 1 - nx \;\; , n \in IN^*$

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède dans $[0,1]$ une unique solution x_n .

2) Montrer que $\forall n \geq 2, \; \dfrac{1}{n} \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$,En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

4) En déduire la monotonie de la suite (x_n).



S'ENTRAINER

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n + 9n^2 - 4$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée x_n.

2) Montrer que $\forall n \in N^*$, on a : $0 < x_n < \dfrac{2}{3}$.

3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1})$ et en déduire la monotonie de (x_n).

4) Montrer que la suite (x_n) est convergente, On note ℓ sa limite.

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n^n$ et en déduire ℓ.



S'ENTRAINER

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x^3+2(n+1)x+2 \quad (n\in IN)$

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède une unique solution α_n est que sur $\alpha_n\in\left]-1,0\right[$

2) Prouver que la suite (α_n) est croissante et quelle est convergente.

3) Vérifier que $\alpha_n=\dfrac{-2}{\alpha_n^2+2(n+1)}$ en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n$.



S'ENTRAINER

Soit f : $[1,+\infty[\ \to IR$, $x\to\sqrt{x-1}+2x$.

1) Etablir la dérivabilité de f à droite en en 1.
2) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 5 et à droite en en 2 et (Indication calculer f(2)).
4) Expliciter $f^{-1}(x)$.



S'ENTRAINER

Soit f : $[0,\frac{\pi}{2}[\ \to IR$, $x\to -\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $I=[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que $\forall x\in\ ]-\infty,1[$

$$(f^{-1})'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}\,(2-x)}$$

16 S'ENTRAINER

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x\in J,\ g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3) Montrer que g est impaire.

4) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $0\le x-g(x)\le\dfrac{x^3}{3}$

5) En déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-x}{x^2}$



SE PERFECTIONNER

$f : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow IR \quad , x \rightarrow \sqrt{\tan x}$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ puis étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) Tracer C_g dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.

6) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

7) Soit la suite U définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g(n+k)$.

   a) Montrer que pour tout $n \in IN$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ on a :
   $g(n) \leq g(n+k) \leq g(2n)$.

   b) En déduire que $\forall_n \in IN^*$ on a : $g(n) \leq U_n \leq g(2n)$ puis déduire que U converge et calculer sa limite.



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par $f(x) = tg(\pi x)$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

3) Soit la fonction g définie par :

4) $\begin{cases} g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

5)

   a) Montrer que g est continue à droite en 0.

   b) En utilisant les inégalités des accroissements finis montrer que pour tout réel x positif :

$\frac{x}{\pi(1+x^2)} \leq f^{-1}(x) \leq \frac{x}{\pi}$

c) En déduire la dérivabilité de g à droite en 0

6) Soit la fonction h définie sur]0,+ ∞ [par h(x) = $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Calculer h'(x) en déduire que pour tout x >0 , $h(x) = -f^{-1}(x) + \frac{1}{2}$

b) Montrer que Ch se déduit de Cf par une isométrie que l'on précisera.

7) Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1,2,...,n\}$: $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \leq f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{\pi n^2}$

b) En déduire que : $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2\pi n}$; pour tout $n \in IN^*$

c) Etudier la convergence de la suite U.



19 SE PERFECTIONNER

Le plan est mini d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$

1)a) Etudier les variations de f sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que f est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seul solution $x_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et vérifier que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

d) Etudier la position relative de Cf est la droite $\Delta : y = x$

e)Tracer Cf et Cf^{-1} dans la même repère R

f) f^{-1} est elle dérivable à droite en 1 ?

g) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

2) a)Montrer que l'équation $f(x) = n\,(n \in N^*)$ admet une solution unique α_n sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \alpha_n$



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ par : $h(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$

1) a) Montrer que h est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $[1,+\infty[$

b) Montrer h^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $\forall x\geq 1$, $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2x^2-2x+1}$

2) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases}\varphi(x)=h^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x\prec 0\\ \varphi(0)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$

a) Montrer que φ est continue en 0.

b) Montrer φ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\prec 0$

c) Montrer que $\forall\ x\in]-\infty,0[$ il existe un réel $c\in]x,0[$ tel que $\frac{\varphi(x)+\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{-1}{(c-1)^2+1}$

En déduire φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$

3) Soit la fonction g_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ par $g_n(x)=h(x)+\frac{n}{x}$ pour tout entier naturel n non nul

a) Montrer que l'équation : $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n et que $\tan\alpha_n=-\frac{\alpha_n}{n}-1$

b) Etudier le signe de $g_{n+1}(\alpha_n)-g_{n+1}(\alpha_{n+1})$ En déduire que la suite (α_n) est décroissante

c) Montrer que la suite α_n converge vers un réel qu'on précisera.



SUR LE CHEMIN DU BAC

I) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Etudier f et construire sa courbe (C).

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe (C') de g dans le même repère $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Montrer que : $\forall x \in [0,2[; g(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$.

II) Soit la fonction h définie sur $[0,\pi[$ par $h(x) = g(1-\cos x)$.

1) Montrer que pour tout x de $[0,\pi[$, on a : $h(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

2) Montrer que h réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

4) Soit la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} \varphi(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ \varphi(0) = \pi \end{cases}$

a) Montrer que φ est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de φ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$

d) Montrer que φ est dérivable à droite en 0.

5) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$

a) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $p \in IN$ on a $\frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1) - h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$

b) En déduire que pour tout $n \in$ IN on a $\frac{1}{2}h^{-1}(n) + \frac{1}{n^2+1} \le U_n \le \frac{1}{2}h^{-1}(n) + 1$

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente est donner un encadrement de sa limite.

6) a)Montrer que pour tout x>0 on a $\varphi(x) = \pi - h^{-1}(x)$

b) En déduire que Cφ est l'image de Ch^{-1} par une isométrie que l'on caractérisera puis tracer Cφ dans le même repère R.

22 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction g définie sur $]-3,1[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ et Cg sa courbe représentative dans un repère orthonormé R $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

A)

1) Dresser le tableau de variation de g et tracer Cg dans le repère R

2) Monter que g réalise une bijection de $[-1,1[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3) On désigne par h la fonction réciproque de la restriction de g à $[-1,1[$

Tracer Ch et montrer que pour tout x ∈ J on a $h(x) = -1 + \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}$

4) On considère la fonction ψ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\psi(x) = h\left(\dfrac{1}{2\cos x}\right)$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\psi(x) = 2\sin x - 1$

b) Montrer que l'équation $\psi(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

c) Etudier la dérivabilité de ψ^{-1} et déterminer sa fonction dérivée.

B) Soit f la fonction définie dérivable sur $]-3,1[$ et tel que f '(x) = g(x) et f(0) =0

1) Soit φ la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = f(2\sin x - 1)$

a) Etudier la dérivabilité de φ et calculer $\varphi'(x)$

b) Calculer $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. En déduire que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = x - \dfrac{\pi}{6}$

2) Soit U la suite définie par : $U_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \quad \forall n \geq 2$

a) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{n(n+1)} g\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq U_n \leq g\left(\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n(n+1)}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 U_n$

3) On donne la suite $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} U_k \quad (n \geq 2)$. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\alpha - \dfrac{\pi}{6}$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x + 3 - \sqrt{x^2 + 1} & si \;\; x \prec 0 \\ 1 + \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$

dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est ζ

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de f et tracer ζ

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J qu'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

3) a) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a $|f'(x)| \leq 1$

b) Montrer que l'équation : $f(x) = 3x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

4) Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ 3U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour } n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n \in]0,1[$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

5) Soit S la suite définie sur IN^* par : $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kU_k$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $S_n - \alpha\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(U_k - \alpha)$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $3^n \geq 2n$, en déduire que $\left|S_n - \alpha\frac{n+1}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n}$, montrer alors que la suite S converge vers $\frac{\alpha}{2}$



1 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

1) Vrai, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,3]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty,3]$ sur $f(]-\infty,3]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(3)\right] =]-\infty,5]$

2) Faux, On a f est strictement croissante sur $]-\infty,3]$ alors f^{-1} est strictement sur $]-\infty,5]$ car f et f^{-1} ont le même sens de variation

3) Vrai

On f est continue sur $]-\infty,3]$ alors f^{-1} est continue sur $f(]-\infty,3]) =]-\infty,5]$

4) vrai On a : $f(0) = 4$

On a : f est dérivable en 0

$f'(0) = 2 \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable en 4 et $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

5) Faux, On a f est dérivable à gauche en 3 et $f'_g(3) = 0$ alors Cf admet au point $A(3,5)$ une demi tangente à gauche horizontale alors Cf^{-1} admet au point $A'(5,3)$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas alors f^{-1},n'est pas dérivable à gauche en 5 et $\lim_{x\to5^-}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(5)}{x-5} = -\infty$

6) Vrai, La fonction f est dérivable sur $]-\infty,3[$

$\forall x \in]-\infty,3[, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(]-\infty,3[) =]-\infty,5[$

7) a) On a f réalise une bijection de $]-\infty,3]$ sur $]-\infty,5]$ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{5}{n} \in]-\infty,5]$ alors l'équation $f(x) = \dfrac{5}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]-\infty,3]$

b) On a : $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$

On a $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow f(\alpha_n+1) < f(\alpha_n)$

Or f est croissante sur $]-\infty,3]$ $\alpha_n \in]-\infty,3]$ et $\alpha_{n+1} \in]-\infty,3]$

alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ alors (α_n) est décroissante

c) Vrai

On a :

x	$-\infty$		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On a :

$f(\alpha_n) = \dfrac{5}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(\alpha_n) \geq 0$ alors $\alpha_n \in [2,+\infty[$

Alors (α_n) est minorée par 2 or (α_n) est décroissante alors (α_n) converge vers un réel α

d) Faux

on a : $f(\alpha_n) = \dfrac{5}{n} \Rightarrow \alpha_n = f^{-1}\left(\dfrac{5}{n}\right)$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n} = 0$

$\lim_{x\to0^+} f^{-1}(x) = 2$

alors $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{5}{n}\right) = 2$ alors $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 2$



2 Q-C-M ; FAUX OU VRAI

1) Vrai

En effet : Soit M un point du plan et $M' = S_\Delta(M)$ où $\Delta : y = x$

Montrons que $M \in Cf \Leftrightarrow M' \in Cf$

On a $M \in Cf \Leftrightarrow S_\Delta(M) \in S_\Delta(Cf)$

$\Leftrightarrow M' \in Cf^{-1} \Leftrightarrow M' \in Cf$ alors la droite D : y = x est un axe de symétrie de Cf.

2) Vrai

On a : f^{-1} est définie sur $[-5,5]$ alors si $x \in Df^{-1}$, on a $-x \in Df^{-1}$

Montrons que $\forall y \in [-5,5], f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

On a : $f\left(f^{-1}(-y)\right) = -y$

$f\left(-f^{-1}(y)\right) = -f\left(f^{-1}(y)\right) = -y$

alors $f\left(f^{-1}(-y)\right) = f\left(-f^{-1}(y)\right)$

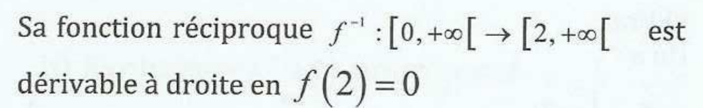
alors $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

3) Faux

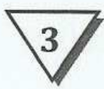
Contre exemple : $f : [2,+\infty[\to [0,+\infty[$

$x \longrightarrow \sqrt{x-2}$

f n'est pas dérivable à droite en 2 car $\lim_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$


Sa fonction réciproque $f^{-1}:[0,+\infty[\rightarrow[2,+\infty[$ est dérivable à droite en $f(2)=0$

$x \longrightarrow x^2+2$



Q-C-M ; FAUX OU VRAI

1) a) Vrai

On a $\forall x\in[-2,2], f'(x)\geq 0$

On a f est continue et strictement croissante sur $[-2,2]$ alors f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur $f([-2,2])$

2) Faux f est strictement croissante sur $[-2,2]$ alors f n'admet pas un minimum local en 1

3)

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		↗	4	↘	0	↗	4
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $f''(x)$ s'annule et change de signe en -1 et 1 alors f'' admet deux points d'inflexion



APPLIQUER

1) g est dérivable sur IR , pour tout x $\in\mathbb{R}$ on a $g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

2)

*sur $[-1,+\infty[$ on a 3 est un minimum absolue de g(x) d'où l'équation g(x) = 0 n'admet pas des solutions sur $[-1,+\infty[$

* On a g est continue et strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et g($]-\infty,-1]$)= $]-\infty,7]$

Comme $0\in]-\infty,7]$ alors l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α sur $]-\infty,7]$

__Conclusion :__ l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α sur IR.

$\left.\begin{array}{l}\text{g est continue sur } [-3,-2] \\ g(-3)\ g(2)=(-13)\times 3=-39\quad \alpha\in]-3,-2[\end{array}\right\}$

➔Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

3) *La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]-\infty,\alpha[$, alors elle garde un signe constant sur $]-\infty,\alpha[$

or $-3\in]-\infty,\alpha[$ et $g(-3)<0$ alors pour tout $x\in]-\infty,\alpha[$ on a $g(x)<0$

*La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]\alpha,+\infty[$, alors elle garde un signe constant sur $]\alpha,+\infty[$

Or $-2\in]\alpha,+\infty[$ et $g(-2)>0$ alors pour tout $x\in]\alpha,+\infty[$; on a $g(x)>0$

Conclusion

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4)

x	-3	$-2,9$	$-2,8$	$-2,7$	$-2,6$	$-2,5$	$-2,4$	$-2,3$	$-2,2$	$-2,1$	-2
$g(x)$	-13					$-3,12$	$-1,6$	$-0,2$	$0,9$		3
signe $g(x)$	$-$					$-$	$-$	$-$	$+$		$+$

On a $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [-2,3\ ;\ -2,2] \\ g(-2,3)\ g(-2,2)<0 \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans IR or α est l'unique solution dans IR alors $-2,3<\alpha<-2,2$

5) a) On a pour tout réel x,

$f'(x)=4x^3-12+20=4(x^3-3x+5)=4g(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

b) On a $f(\alpha)=-3\alpha^2+15\alpha$?

On a : $f(\alpha)=\alpha^4-6\alpha^2+20\alpha$

Or $g(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha^3-3\alpha+5=0\Leftrightarrow\boxed{\alpha^3=3\alpha-5}$

D'où : $f(\alpha)=\alpha\ \alpha^3-6\alpha^2+20\alpha$

$=\alpha(3\alpha-5)-6\alpha^2+20\alpha$

$=3\alpha^2-5\alpha-6\alpha^2+20\alpha$

$=-3\alpha^2+15\alpha$

5 APPLIQUER

On a : $g:]0,\pi[\rightarrow\mathbb{R}$ $\qquad h:]0,\pi[\rightarrow\mathbb{R}$

$x\rightarrow \cot gx-2x$ $\qquad x\rightarrow x\cos^2 x$



1)

a) $\forall x \in]0,\pi[\; g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} - 2 < 0$

x	0		α		π
$g'(x)$		$-$			
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cot g x - 2x = +\infty$

b) g est continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ alors elle réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $g(]0,\pi[) =]-\infty,+\infty[$.

Comme 0 appartient $]-\infty,+\infty[$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $]0,\pi[$.

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cot g\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} > 0$

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cot g\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = 1 - \dfrac{\pi}{2} < 0$

g est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right).g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire : $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$

*La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]0,\alpha[$, alors elle garde un signe constant sur $]0,\alpha[$

On a : $\dfrac{\pi}{6} \in]0,\alpha[$ et $g(\dfrac{\pi}{6}) > 0$ alors pour tout $x \in]0,\alpha[$; on a $g(x) > 0$

* La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]\alpha,\pi[$, alors elle garde un signe constant sur $]\alpha,\pi[$ Or on a : $\dfrac{\pi}{4} \in]\alpha,\pi[$ et $g(\dfrac{\pi}{4}) < 0$ alors pour tout $x \in]\alpha,\pi[$; on a $g(x) < 0$

x	0		α		π
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖

2)

a) $\forall x \in]0,\pi[$; $h'(x) = \cos^2 x + 2x\cos x(-\sin x)$

$= \sin x \cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - 2x\right)$

$= \sin x \cos x(\cot g x - 2x)$

$= \underbrace{\sin x}_{\geq 0}.\cos x.g(x)$

b)

x	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

6 APPLIQUER

$f :]-1,1[\to \mathbb{R} \; x \to \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

1) $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right) > 0$

f est continue et strictement croissante $]-1,1[$ alors f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur

$f(]-1,1[) = \left]\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

2) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$x \to y$

Montrons que : $\forall y \in \mathbb{R}$ on a ; $-y \in \mathbb{R}$ et $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

si

$\boxed{f^{-1}(-y) = \alpha} \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(-y)\right) = f(\alpha)$

$\Leftrightarrow -y = f(\alpha) \Leftrightarrow y = -f(\alpha)$

$\Leftrightarrow y = f(-\alpha)$ *car f est impaire*

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -f^{-1}(y)}$

d'où $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ d'où f^{-1} est impaire.

3) $g(x) = f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ car f^{-1} est impaire

$Cf \xrightarrow{S_\Delta} Cf^{-1} \xrightarrow{S_{(o,\vec{i})}} C(-f^{-1})$ avec $\Delta : y = x$

$\Rightarrow S_{(o,\vec{i})} o S_\Delta(C) = C'$

Or $(o,\vec{i}) \cap \Delta = \{O\}$ alors $S_{(o,\vec{i})} o S_\Delta = r_{(O,2(\overline{U_\Delta},\vec{i}))} = r_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$



APPLIQUER

a) $f(x) = \cos x$

$\forall x \in [0,\pi]; f'(x) = -\sin x \le 0$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↘	-1

f est continue strictement décroissante sur $[0,\pi]$ alors f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [-1,1] = J$

b) $\forall x \in J \Rightarrow f^{-1}(-x) = \pi - f^{-1}(x)$?

Il suffit de montrer que : $-x = f\left(\pi - f^{-1}(x)\right)$

On a : $f\left(\pi - f^{-1}(x)\right) = \cos\left(\pi - f^{-1}(x)\right)$

$= -\cos\left(f^{-1}(x)\right)$

$= -f\left(f^{-1}(x)\right)$

$= -x$

D'où : $\pi - f^{-1}(x) = f^{-1}(-x)$



APPLIQUER

f est définie sur IR par $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2+1}$

1) f est dérivable sur IR ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{\overset{\in\mathbb{R}}{x}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>0}}$$

* si $x \ge 0$ on a : $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

* si $x < 0$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{>0} + \overset{<0}{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}_{>0}} > 0$$

<u>2ème méthode pour déterminer le signe de f'(x):</u>

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = -x$

Conditions d'existence il faux que $\begin{cases} x^2+1 \ge 0 \\ -x \ge 0 \end{cases}$ donc $x \in \left]-\infty, 0\right]$

Pour $x \in \left]-\infty, 0\right]$

$\sqrt{x^2+1} = -x \Leftrightarrow x^2+1 = x^2$ Impossible

$f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur IR alors $f'(x)$ garde un signe constant sur IR or $f'(0) = 1 > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - 2 + \sqrt{x^2+1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x - 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} - 2 = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ alors la droite d'équation y = -2 est asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - 2 + \sqrt{x^2+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}$

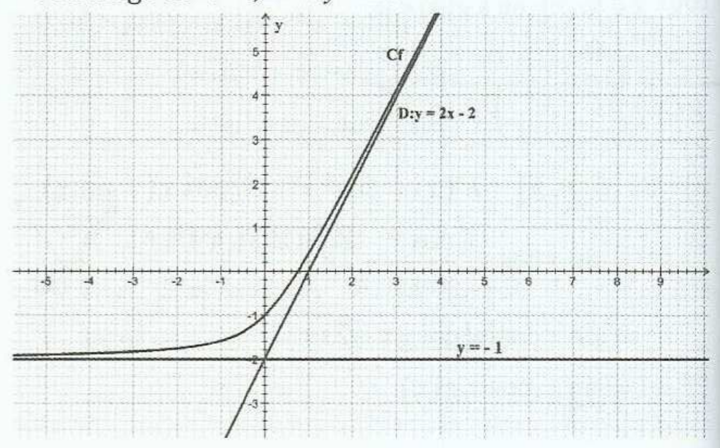
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right) = 1 + 1 = 2 = a$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x - 2$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} - 2 = -2 = b$

$D : y = 2x - 2$ est asymptote oblique à Cf au voisinage de $+\infty$; $D : y = 2x - 2$



3) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-2,+\infty[$, d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-2,+\infty[$

$f : \mathbb{R} \to]-2,+\infty[$

$y \to x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y - 2 + \sqrt{y^2+1} = x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = x - y + 2 \quad (2)$$

(On a : $x - y + 2 > 0$ car si non la relation (2) est impossible est par la suite f n'est pas bijective)

$\Leftrightarrow y^2 + 1 = (x - y + 2)^2$

$y^2 + 1 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x$

$2xy + 4y = x^2 + 3 + 4x$

$\Rightarrow \underbrace{(2x+4)}_{\neq 0} y = x^2 + 4x + 3$

car $x \in]-2,+\infty[\Rightarrow y = \dfrac{x^2+4x+3}{2x+4} = f^{-1}(x)$

9 APPLIQUER

1) On a : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$Df = \mathbb{R}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 + \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - \left(\sqrt{x^2+1}\right)' x}{x^2+1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$
on a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} > 0$$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ 2

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

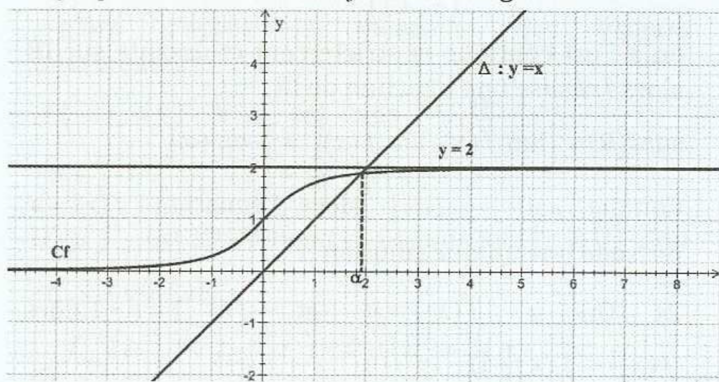
$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation y= 0 est une asymptote horizontal à Cf au voisinage $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation y= 2 est une asymptote horizontal à Cf au voisinage $+\infty$



2) $f(x) = x$ admet une unique solution ?

On a $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

où $g(x) = f(x) - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in IR$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}_{\geq 1}}\right)}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$

g est continue et strictement décroissante sur IR alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 2 - (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0 - (-\infty) = +\infty$

comme $0 \in \left]-\infty, +\infty\right[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

interprétation graphique : Cf coupe la droite $\Delta : y = x$ est un unique point M d'abscisse α.

2) D'après le graphique, on remarque $\alpha \in [1,2]$

$g(1,8) \simeq 0,07$ et $g(1,9) \simeq -0,01$

On a g est continue sur $[1,8 \ ; 1,9]$ et $g(1,8) \times g(1,9) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires on $1,8 < \alpha < 1,9$



10 APPLIQUER

1) f est définie dérivable sur IR,

$$\forall x \in IR, f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0$$

on a f est continue et strictement croissante sur IR alors f réalise une bijection de IR

sur f(R)= $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\infty, +\infty\right[$

Comme $n \in \left]-\infty, +\infty\right[$ alors l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n.

2) On a $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$ alors $f(x_n) < f(x_n + 1)$

Or f est croissante sur IR alors $x_n < x_{n+1}$ alors (x_n) est croissante.

3) Pour montrer que $\forall n \geq 1, n \leq x_n \leq n+1$, il suffit de montrer que $\forall n \geq 1, f(n) \leq f(x_n) \leq f(n+1)$.

*On a : $f(n) - f(x_n) = \dfrac{n^3}{n^2+1} - n$

$$= \frac{n^3 - n\left(n^2+1\right)}{n^2+1} = -\frac{n}{n^2+1} \leq 0 \Rightarrow f(n) \leq f(x_n)$$

*on a : $f(n+1) - f(x_n) = \dfrac{(n+1)^3}{(n+1)^2+1} - n$

$$= \frac{(n+1)^3 - n\left[(n+1)^2+1\right]}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+1} \geq 0$$

alors $\forall n \geq 1$, $f(n+1) \geq f(x_n)$

Conclusion : $\forall n \geq 1$, $f(n) \leq f(x_n) \leq f(n+1)$ et f est croissante sur IR alors $n \leq x_n \leq n+1$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

On a $\forall n \geq 1$, $1 \leq \dfrac{x_n}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$.

11 S'ENTRAINER

1) Soit $n \geq 2$, $\forall n \in [0,1]$

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(n^{n-1} - 1) \leq 0$$

On a f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ alors f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f_n\,[0,1] = [f_n(1), f_n(0)] = [2-n, 1]$.

On a $n \geq 2 \Rightarrow 2-n \leq 0$ alors $0 \in [2-n, 1]$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet sur $[0,1]$ une unique solution x_n.

2) On a $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + 1 - 1 = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 0$

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^4 + 1 - n\frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \leq 0$$

On a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) \leq f_n(x_n) \leq f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

On a f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ alors $\dfrac{1}{n} \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3)

$\forall n \in IN^*, x \in [0,1]$

$$f_{1+1}(x) - f_n(x) = \left[x^{n+1} + 1 - (n+1)x\right] - \left[x^n + 1 - nx\right]$$

$$= x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x \leq 0$$

On a : $x_n \in [0,1] \Rightarrow f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \leq 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) - 0 \leq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) \leq 0$

4) On a $f_{n+1}(x_n) \leq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$

Or f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $x_n \geq x_{n+1}$ alors (x_n) est décroissante.



12 S'ENTRAINER

1) f_n est dérivable sur $[0,\infty[$, $\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geq 0$

On a f_n est continue et strictement croissante sur $[0,\infty[$ alors f_n réalise une bijection de

$[0,\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [-4,+\infty[$

comme $0 \in [-4,+\infty[$ alors l'equation $f_n(x)=0$ admet une seule solution $x_n \in [0,+\infty[$.

On a : $0^n + 9\times 0^2 - 4 = -4 \neq 0$ alors 0 n'est pas solution alors $x_n \in]0,+\infty[$.

2) On a $f_n(0) = -4$

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 - 4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

On a f_n est continue sur $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ et $f_n(0)\times f_n\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a $0 < x_n < \frac{2}{3}$

3) On a

$f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_n) - 0 = x_n^{n+1} + 9x_n^2 - 4$

or on a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9x_n^2 - 4 = -x_n^n$

D'où $f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = x_n^{n+1} - x_n^n = \underbrace{x_n^n}_{>0}\underbrace{(x_n - 1)}_{<0} < 0$

car $0 < x_n < \frac{2}{3}$

On a $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ est f_{n+1} s est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ $\Rightarrow x_n < x_{n+1}$

alors (x_n) est une suite croissante

4) On a (x_n) est croissante majorée par $\frac{2}{3}$ alors (x_n) converge vers une limite ℓ.

5) On a $\forall n \in N^*, 0 < x_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < (x_n)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$

On a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 0 + 9\ell^2 - 4 = 0$ (car d'aprés 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$)

$\Rightarrow \ell^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}$ ou $\ell = -\frac{2}{3}$

Or $0 < x_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}$

13 S'ENTRAINER

1) * La fonction f_n est dérivable sur IR

$\forall x \in IR, f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+1) > 0$

On a f_n est continue et strictement croissante sur IR alors f_n réalise une bijection de IR sur f(IR) =IR

Comme $0 \in IR$ alors l'équation f_n (x) =0 admet une unique solution α_n sur IR

• $f(-1) = -1 - 2(n+1) + 2 = 1 - 2(n+1) < 0$

$f(0) = 1 > 0$ On a f est continue sur $[-1,0]$;

→alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire

$f(-1)f(0) < 0$ α_n est dans $]-1,0[$

$\forall x \in]-1,0[, f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+1) > 0$

D'où f_n est strictement croissante sur $[-1,0]$ d'où α_n est unique.

2) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) = 0 - (\alpha_n^3 + 2(n+2)\alpha_n + 2)$

$= -(\alpha_n^3 + 2(n+1)\alpha_n + 2) - 2\alpha_n$

$= -f_n(\alpha_n) - 2\alpha_n$

$= 0 - 2\alpha_n > 0$

D'ou $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n)$

Or f_{n+1} est croissante alors $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ d'où (α_n) est croissante.

* On a (α_n) est croissante et majorée par 0 alors (α_n) converge vers une limite ℓ.

3) On a : $f_n(\alpha_n) = 0$

Alors $\alpha_n^3 + 2(n+1)\alpha_n + 2 = 0$

Alors $\alpha_n\left(\alpha_n^2+2(n+1)\right)=-2 \Rightarrow \alpha_n=\dfrac{-2}{\alpha_n^2+2(n+1)}$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n - \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{\alpha_n^2+2(n+1)}=\dfrac{-2}{\ell^2+(+\infty)}=0$

14 S'ENTRAINER

On a : $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$; $Df=[1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}+2x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}+2=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}+2$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+2=\dfrac{1}{0^+}+2=+\infty$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 1.

2) La fonction $x\to x-1$ est dérivable et strictement supérieur à 0 sur $]1,+\infty[$ d'où la fonction f $x\longrightarrow\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. D'où f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$\forall x>1$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+2>0$

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$

3) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $f([1,+\infty[)=[2,+\infty[=J$

4) **Rappel :**

$f:I\to J$ bijection

$x_0\to y_0$

> Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

* $f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection

$2\to5$

On a f est dérivable en 2 et $f'(2)=3\neq0$ alors f^{-1} est dérivable en 5.

$\left(f^{-1}\right)'(5)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$

*On a $f'_d(1)=0$ alors Cf admet à droite au point A(1,2) une demi- verticale de direction et de sens de $\vec{j}$ alors Cf^{-1} admet au point $A'(2,1)$ à droite une demi-tangente horizontale

Alors f^{-1} est dérivable à droite 2 et $\left(f^{-1}\right)'_d(2)=0$

Ou bien : $f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection

$1\to2$

$x\to y$

$\lim\limits_{y\to2^+}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(2)}{y-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{f(x)-f(1)}$

(car $x\to1^+$ équivaut $y\to2^+$).

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

D'où f^{-1} est dérivable à droite en 2.

5)

$f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection $\boxed{f(y)=x\Leftrightarrow y=f^{-1}(x)}$

$y\to x$

On a : $f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{y-1}+2y=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{y-1}=x-2y$

(necessairement $x-2y\geq0$ car si non f n'est pas bijective)

$\Leftrightarrow y-1=(x-2y)^2$

$\Leftrightarrow y-1=x^2-4xy+4y^2\Leftrightarrow4y^2-y(1+4x)+1+x^2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1+4x)^2-4\times4\times(1+x^2)$

$=16x^2+1+8x-16x^2-16$

$=8x-15>0$ car $x\geq2$

$y'=\dfrac{1+4x-\sqrt{8x-15}}{8}$ et $y''=\dfrac{1+4x+\sqrt{8x-15}}{8}$

Or $f(2)=5$ d'où si x = 5 on a y =2.

Vérification dans y" on a :

$\dfrac{1+2\times5+\sqrt{8\times5-15}}{8}=\dfrac{26}{8}\neq2$ d'où $y\neq y''$

D'où $y=\dfrac{1+4x-\sqrt{8x-15}}{8}=f^{-1}(x)$

15 S'ENTRAINER

$f(x)=-\dfrac{1}{\cos^2x}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

1) $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = 0 - \left(\frac{-\left(\cos^2 x\right)'}{\cos^4 x}\right)$$

$$= -\left(\frac{-2(-\sin x)\cos x}{\cos^4 x}\right) = -\frac{\overbrace{2\sin x}^{\geq 0}\overbrace{\cos x}^{>0}}{\cos^4 x > 0} \leq 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0 $-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 2 - \frac{1}{\underbrace{\cos^2 x}_{0^+}} = -\infty$$

f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty, -1\right]$

2)

Rappel :
$f : I \to J$ bijection
$t \to x$
si f est dérivable sur I et $f'(t) \neq 0, \forall t \in I \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $f(I) = J$

$$\forall x \in J; \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(t)}$$

On a f est dérivable sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ ; \ f'(t) = -\frac{2\sin t \cos t}{\cos^4 t} \neq 0$$

alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty, 1\right[$

On a : $\forall x \in \left]-\infty, 1\right[\ ; \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{-\cos^4 t}{2\sin t \cos t}$

Or $f(t) = x \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\cos^2 t} = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 t} = 2 - x \Leftrightarrow \boxed{\cos^2 t = \frac{1}{2-x}}$$

On a : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{(2-x)} = \frac{1-x}{2-x} > 0$$

$$\Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{1-x}{2-x}} \quad \text{car } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{d'où } \left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\sqrt{\frac{1}{2-x}}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\,(2-x)} < 0$$

16 S'ENTRAINER

$f(x) = \tan(x)$

1) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to \frac{-\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right[= \left]-\infty, +\infty\right[$

D'où f admet une fonction réciproque g définie un intervalle J=IR

2)

$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$
$t \to x$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ; f'(t) = 1 + \tan^2 t \neq 0$ alors g est une dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g)'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{1 + \tan^2 t}$$

or $f(t) = x \Leftrightarrow \tan t = x$ d'où $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

3) On a g est définie sue IR. Montrons que pour tout réel x on a $g(-x) = -g(x)$

On pose : $h(x) = g(-x) + g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = (-1) \times g'(-x) + g'(x)$

$$= -1\frac{1}{1 + (-x)^2} + \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

D'où h est une fonction constante sur IR

Or on a : $h(0)=g(-0)+g(0)=2g(0)=2\times 0=0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(-x)=-g(x)$

D'où g est paire.

4) $\forall x\in[0,+\infty[,0\le x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$?

* On pose : $\varphi(x)=x-g(x)$

$\forall x\in[0,+\infty[,\varphi'(x)=1-g'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\ge 0$

$x\ge 0$, φ est croissante sur $[0,+\infty[$ alors

$\varphi(x)\ge\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)\ge 0\Rightarrow x-g(x)\ge 0$

*On pose : $T(x)=\frac{x^3}{3}-x+g(x)$

$\forall x\in[0,+\infty[$;

$T'(x)=x^2-1+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^4-1+1}{1+x^2}=\frac{x^4}{1+x^2}\ge 0$

$x\ge 0\Rightarrow$ T est croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow T(x)\ge T(0)\Rightarrow\frac{x^3}{3}-x+g(x)\ge 0\Rightarrow x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

Conclusion : $\forall x\in[0,+\infty[,0\le x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}$?

*$\forall x\in]0,+\infty[$, on a : $0<x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow\frac{-x^3}{3}\le g(x)-x\le 0\Rightarrow-\frac{x}{3}\le\frac{g(x)-x}{x^2}\le 0$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{3}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$

* $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}$?

On pose $t=-x$ si $x\to 0^-\Leftrightarrow t\to 0^+$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{g(-t)-(-t)}{(-t)^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-g(t)+t}{t^2}$ car g est impaire

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{g(t)-t}{t^2}\right)=-0=0$

Conclusion :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-x}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$

18 SE PERFECTIONNER

f : $[0,\frac{\pi}{2}[\to$ IR , $x\to\sqrt{\tan x}$

8) * La fonction $x\to\tan x$ est dérivable et strictement positif sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ alors f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

* On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan x}}{x}$

$=\lim\limits_{n\to 0^+}\frac{\sqrt{tanx}}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{n\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\tan x}{x}}=\frac{1}{0^+}\times 1=+\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite de 0

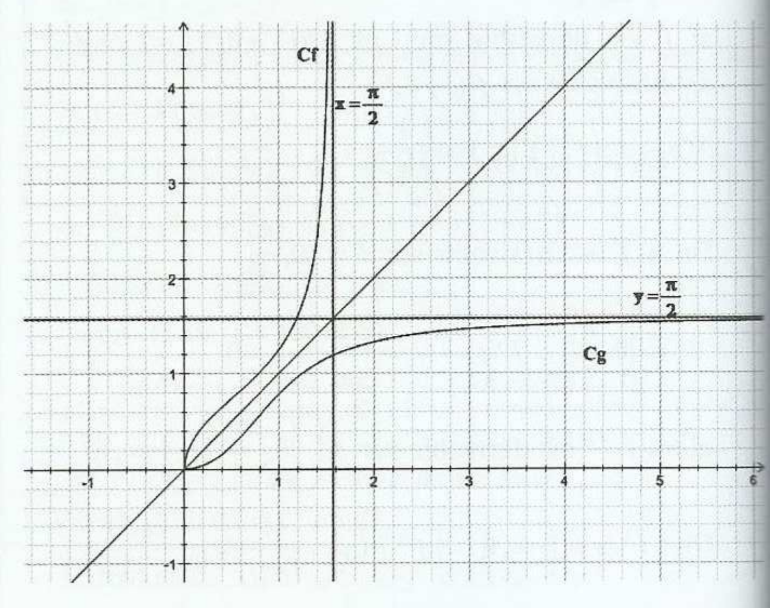
9) Pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a

$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{2\sqrt{\tan x}}=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}>0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sqrt{\tan x}=+\infty$

alors la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à Cf



10) f est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ alors f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur

$f([0,\frac{\pi}{2}[)=[0,+\infty[=J$ d'où f admet une fonction réciproque g définie sur J.

4) $Cg=S_\Delta(Cf)$ où $\Delta: y=x$

5) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow [0,+\infty[$ bijection

$t \longrightarrow x$

f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

→ alors g est dérivable sur f ($]0, \frac{\pi}{2}[$)= $]0,+\infty[$

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\ f'(t) \neq 0$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{2\sqrt{\tan t}}{1+\tan^2 t}$

Or f(t) =x $\Leftrightarrow \sqrt{\tan t} = x \Leftrightarrow \tan t = x^2$

d'où $\forall x \in]0,+\infty[$ $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.

<u>Etudions la dérivabilité de g en 0 :</u>

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ alors Cf admet au poin O une demi-tangente verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point $O = S_\Delta(O)$ une demi-tangente horizontale à droite

D'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.

6) Montrons que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$?

On pose $k(x) = g(x) + g(\frac{1}{x})$ $\forall x \in]0,+\infty[$

- On a g est dérivable sur $]0, +\infty[$
- On a la fonction h : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positif sur I =$]0, +\infty[$ d'où

D'où g est dérivable sur h(I)=$]0, +\infty[$

D'où la fonction $x \longrightarrow g(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

D'où la fonction k est dérivable sur $]0,+\infty[$

On a $\forall x \in]0,+\infty[$, $k'(x) = g'(x) + (\frac{1}{x})' g'(\frac{1}{x})$

$= \frac{2x}{1+x^4} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{2\times\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^4} = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{x^2} \times \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^4+1}{x^4}}$

$= \frac{2x}{1+x^4} - \frac{2x}{1+x^4} = 0$

D'ou k est une fonction constante sur $]0,+\infty[$

Or $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\tan(\frac{\pi}{4})} = 1$ alors $g(1) = \frac{\pi}{4}$

D'où $k(1) = g(1) + g(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Conclusion pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $k(x) = \frac{\pi}{2}$

d'où $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

7) $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{g(n+k)}$ pour tout $n \in IN^*$

a) On a pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $n \le n+k \le 2n$ d'où de plus g est croissante sur $[0, +\infty[$ alors $g(n) \le g(n+k) \le g(2n)$.

b) $\forall n \in IN^*$, $g(n) \le U_n \le g(2n)$?

On a pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $g(n) \le g(n+k) \le g(2n)$.

alors $\sum_{k=0}^{n} g(n) \le \sum_{k=0}^{n} g(n+k) \le \sum_{k=0}^{n} g(2n)$

alors $(n+1)g(n) \le \sum_{k=0}^{n} g(n+k) \le (n+1)g(2n)$

alors $g(n) \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(n+k) \le g(2n)$

alors $g(n) \le U_n \le g(2n)$.

On a <u>g est continue et strictement croissante</u> et réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

D'où $\lim_{x\to+\infty} g(n) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(2n) = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$ et la suite U converge vers $\frac{\pi}{2}$

<u>**2ème méthode**</u> pour calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

On a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - g(0) = \frac{\pi}{2}$

19 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

par $f(x) = \text{tg}(\pi x)$

1) f est dérivable sur I pour tout $x \in I$,

$f'(x) = \pi\left(1+\tan^2(\pi x)\right) > 0$

f est continue et strictement croissante sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I) =]-\infty, +\infty[$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J =IR .

2) $f : I \longrightarrow IR$ est un bijection

$y \longrightarrow x$

On a $\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur I} \\ \forall y \in I, f'(y) = \pi\left(1+\tan^2(y)\right) \neq 0 \end{array}\right\}$

alors f^{-1} est dérivable sur J=f(I)=IR

Pour tout x ∈ J on a :

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\pi\left(1+\tan^2(\pi y)\right)}$

Or $f(y) = x \Leftrightarrow \tan(\pi y) = x$

D'où tout x ∈ J, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$

3) g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x-0}$

$= \left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{\pi}$ (car f est dérivable à droite en 0)

D'où $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ d'où g est continue à droite en 0.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$

on a f est continue sur $[0,x]$

on f est dérivable sur $]0,x[$

Soit $t \in]0,x[$ on a

$1 \le 1+t^2 \le 1+x^2$

$\Rightarrow \pi \le \pi\left(1+t^2\right) \le \pi\left(1+x^2\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \le \frac{1}{\pi\left(1+t^2\right)} \le \frac{1}{\pi}$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \le \left(f^{-1}\right)'(t) \le \frac{1}{\pi}$

Alors d'après le théorème des accroissements finis on a

$\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}(x-0) \le f^{-1}(x) - f^{-1}(0) \le \frac{1}{\pi}(x-0)$

d'où $\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} \le f^{-1}(x) \le \frac{x}{\pi}$

*Pour x = 0 on a $\frac{0}{\pi\left(1+0^2\right)} \le f^{-1}(0) \le \frac{0}{\pi}$

Conclusion : Pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} \le f^{-1}(x) \le \frac{x}{\pi}$

a) Pour tout $x > 0$,

b) $\frac{x}{\pi(1+x^2)} \le f^{-1}(x) \le \frac{x}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\pi(1+x^2)} \le \frac{f^{-1}(x)}{x} \le \frac{1}{\pi}$.

$\frac{1}{\pi(1+x^2)} \le g(x) \le \frac{1}{\pi} \Rightarrow \frac{-x^2}{\pi(1+x^2)} \le g(x) - \frac{1}{\pi} \le 0$

$\Rightarrow \frac{-x^2}{\pi(1+x^2)} \le g(x) - g(0) \le 0$

$\Rightarrow \frac{-x}{\pi(1+x^2)} \le \frac{g(x)-g(0)}{x} \le 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\pi(1+x^2)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ alors g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

4) h définie sur]0,+∞ [par $h(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Calculer h'(x) en déduire h(x) en fonction de $f^{-1}(x)$

$x \xrightarrow{u} \frac{1}{x} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ on a $h = f^{-1} o U$

La fonction U est dérivable sur $]0,+\infty[$ la fonction f^{-1} est dérivable sur IR en particulier sur $U(]0,+\infty[)$ alors $h = f^{-1} o U$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x > 0, h'(x) = \left(f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{-1}{x^2} \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{\pi\left(1+x^2\right)} = -\left(f^{-1}\right)'(x)$

D'où $h(x) = -f^{-1}(x) + k$ (k appartient IR)

On $f\left(\frac{1}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{1}{4}$

On a : $h(1) = -f^{-1}(1) + k$ alors $\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + k$ alors

$k = \frac{1}{2}$ D'où $h(x) = -f^{-1}(x) + \frac{1}{2}$

b)Montrer que Ch se déduit de Cf par une isométrie que l'on précisera.

On a pour tout x>0 , $h(x) = -f^{-1}(x) + \frac{1}{2}$

$$Cf \xrightarrow{S_\Delta} Cf^{-1} \xrightarrow{S_{(o,\vec{i})}} C\left(-f^{-1}\right) \xrightarrow{t_{\frac{1}{2}\vec{j}}} Ch$$

où $\Delta : y = x$ On a : $Ch = \left(t_{\frac{1}{2}\vec{j}} o S_{(o,\vec{i})} o S_\Delta\right)(Cf)$

5) Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Soit $n \in IN^*$, $k \in \{1,2,...,n\}$ d'après 5)a) pour $x = \frac{k}{n^2}$ on obtient

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\pi\left(1+\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{\frac{k}{n^2}}{\pi}$$

alors $\frac{kn^2}{\pi\left(n^4+k^2\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

alors $\underbrace{\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{\left(n^4+k^2\right)}}_{1\le} \frac{k}{\pi\left(n^2+1\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

alors $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

b) Soit $n \in IN^*$, $k \in \{1,2,...,n\}$

on a $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

Alors $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\pi(n^2+1)}\right) \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\pi n^2}\right)$

Alors $\frac{1}{\pi(n^2+1)}\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{1}{\pi n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

Alors $\frac{1}{\pi(n^2+1)}\frac{n(n+1)}{2} \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{1}{\pi n^2}\frac{n(n+1)}{2}$

Alors $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \le U_n \le \frac{n+1}{2\pi n}$;

c) pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \le U_n \le \frac{n+1}{2\pi n}$

on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{2\pi(\frac{1}{n^2}+1)} = \frac{1}{2\pi}$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2\pi n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2\pi}$ alors la suite (U_n) converge vers $\frac{1}{2\pi}$.

19 SE PERFECTIONNER

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

1)a) La fonction $x \longrightarrow \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors la fonction $x \longrightarrow \sqrt{\sin x}$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de plus fonction $x \leftrightarrow \sqrt{\sin x}$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{\left(\sqrt{\sin x}\right)'}{\left(\sqrt{\sin x}\right)^2}$

$$= -\frac{\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}} \le 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	1

b) On a f est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty[$

c) On pose g(x)=f(x)-x

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\le 0} - 1 < 0$

On a g est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors g relise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dur

$g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim_{x\to 0^+} g(x)\right[=\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

Comme $0\in\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ l'équation g(x)= 0 admet une unique solution $x_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

On a :

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}>0$

et $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{\pi}{3}<0$

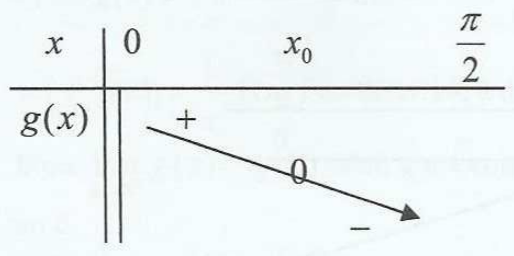
On a g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$

et $g\left(\frac{\pi}{4}\right)\times g\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire on a :

$x_0\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

d) La position relative Cf par rapport à $\Delta: y=x$ est donnée par le signe de g(x)= f(x) –x



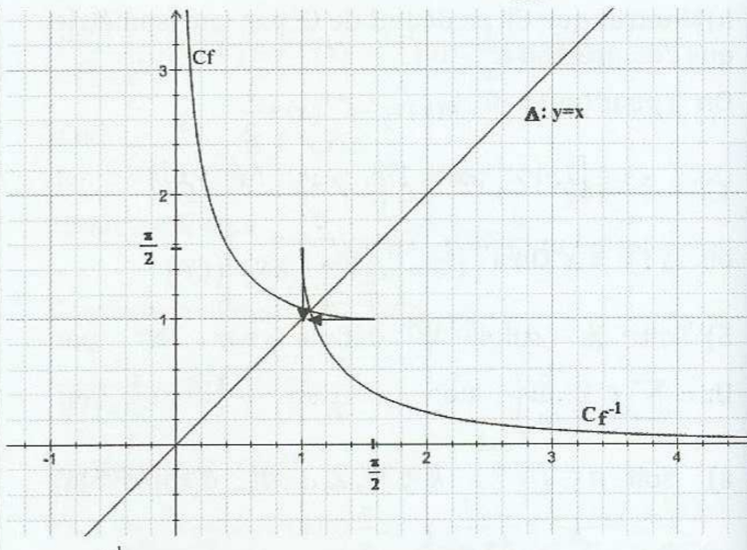
Alors

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	‖	+	0	–	

Sur $]0,x_0]$ on a Cf est au dessus de Δ

Sur $\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a Cf est au dessous de Δ

e) $Cf^{-1}=S_\Delta(Cf)$ où $\Delta: y=x$



f) f^{-1} est elle dérivable à droite en 1 ?

On a Cf^{-1} admet au point $M_0'\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas alors Cf^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1.

g)

$f:\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[1,+\infty[$

$y\longrightarrow x$

On a f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Pour tout $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[, f'(y)\neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$

et que

Et on a pour tout

$x\in]1,+\infty[,\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{2\sin(y)\sqrt{\sin y}}{\cos y}$

Or $f(y)=x\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\sin y}}=x\Rightarrow\sin y=\frac{1}{x^2}$

On a $\cos^2 y+\sin^2 y=1$

$\Rightarrow\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-\frac{1}{x^4}=\frac{x^4-1}{x^4}$

Or $\cos y>0\Rightarrow\cos y=\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}$

Pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{2\sin(y)\sqrt{\sin y}}{\cos y}=-\frac{2\frac{1}{x^2}\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}}=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

2) a) On a f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1,+\infty[$

On a $n\in[1,+\infty[$ alors l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique α_n sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

b) On a $f(\alpha_n)=n\Rightarrow \boxed{\alpha_n=f^{-1}(n)}$

Or f^{-1} réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et f^{-1} est continue est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

alors $f^{-1}([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x),f^{-1}(1)\right]$

alors $\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x),f^{-1}(1)\right]=\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(n)=0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n=0$



20 SE PERFECTIONNER

La fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ par :

$h(x)=\dfrac{1}{1+\tan(x)}$

1) a) La fonction $x\to 1+\tan x$ est dérivable et ne s'annule pas sur I= $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$

alors la fonction h est dérivable sur I.

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right],h'(x)=-\dfrac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}<0$

On a h est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors h réalise une bijection de

$\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $h\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\right)=\left[h(0),\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+}h(x)\right[=[1,+\infty[$

Car $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+}h(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+}\dfrac{1}{1+\tan x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

b) h : $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\longrightarrow[1,+\infty[$

$y\longrightarrow x$

$\left.\begin{array}{l}h \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{4},0\right]\\ \forall y\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right],h'(y)\neq 0\end{array}\right\}$

alors h^{-1} est dérivable sur $h\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\right)=[1,+\infty[$

$\forall x\geq 1,\left(h^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{h'(y)}=-\dfrac{(1+\tan y)^2}{1+\tan^2 y}$

or $h(y)=x\Rightarrow\dfrac{1}{1+\tan y}=x\Leftrightarrow 1+\tan y=\dfrac{1}{x}$

D'où
$$\forall x\geq 1,(h^{-1})'(x)=-\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{-1}{x^2+(1-x)^2}=\dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$$

2) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases}\varphi(x)=h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x<0\\ \varphi(0)=-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

a) $\varphi(0)=-\dfrac{\pi}{4}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=-\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to0^-}h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$

Alors $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\varphi(0)$ alors φ est continue à gauche en 0

<u>En effet :</u>

On a h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $[1,+\infty[$ alors h^{-1} réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors $h^{-1}([1,+\infty[)=\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$

D'autre part, h est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors h^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

$\Rightarrow h^{-1}([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x),h^{-1}(1)\right]$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=-\dfrac{\pi}{4}$

$$x\xrightarrow{U}\dfrac{x-1}{x}\xrightarrow{h^{-1}}h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$$

a) $\varphi=h^{-1}oU$

* On a U est dérivable sur $I=]-\infty,0[$

* On a : $\forall x<0, U(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}>1$

alors $U(x)>1$ alors $U(]-\infty,0[)=]1,+\infty[$

D'où h^{-1} est dérivable sur $U(]-\infty,0[)$

D'où φ est dérivable sur $]-\infty,0[$

$$\forall x<0, \varphi'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)'(h^{-1})'\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{x^2}}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1-\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$=\frac{-1}{2(x-1)^2-2(x^2-x)+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2-2x+2}=\frac{-1}{(x-1)^2+1}$$

c) Soit $x\in]-\infty,0[$

on a : φ est continue sur $[x,0]$

φ est dérivable sur $]0,x[$

Alors d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c\in]x,0[$ tel que $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(C)$

D'où il existe un réel $c\in]0,x[$ tel que

$$\frac{\varphi(x)+\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{-1}{(c-1)^2+1}$$

On a : $x<c<0$ si $x\to0^-$ alors $c\to0^-$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{c\to0^-}\frac{-1}{(c-1)^2+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

D'où φ est dérivable à gauche en 0 et

$$\varphi'_g(0)=-\frac{1}{2}$$

3) g_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ par $g_n(x)=h(x)+\frac{n}{x}$ pour tout entier naturel n non nul

a) On a g_n est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ on a $g_n'(x)=h'(x)-\frac{n}{x^2}<0$

On a g_n est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ alors g_n réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ sur

$$g_n\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right[\right)=\left]\lim_{x\to0^-}g_n, \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\right[=]-\infty,+\infty[$$

On a $0\in]-\infty,+\infty[$ alors l'équation : $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

On a $g_n(\alpha_n)=0 \Leftrightarrow h(\alpha_n)+\frac{n}{\alpha_n}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\tan(\alpha_n)}=-\frac{n}{\alpha_n}\Leftrightarrow 1+\tan(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha_n=\frac{\alpha_n}{n}-1$$

b) Pour tout entier naturel n non nul

$$g_{n+1}(\alpha_n)-g_{n+1}(\alpha_{n+1})=g_{n+1}(\alpha_n)-0=h(\alpha_n)+\frac{n+1}{\alpha_n}$$

$$=\left(h(\alpha_n)+\frac{n}{\alpha_n}\right)+\frac{1}{\alpha_n}=g_n(\alpha_n)+\frac{1}{\alpha_n}=0+\frac{1}{\alpha_n}<0$$

On a : $g_{n+1}(\alpha_n)<g_{n+1}(\alpha_{n+1})$

g_{n+1} est décroissante sur $\left]\frac{\pi}{4},0\right[$ $\alpha_n>\alpha_{n+1}$

$\alpha_n\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ et $\alpha_{n+1}\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

→Alors la suite (α_n) est décroissante

a) On a la suite α_n est décroissante et minorée par $-\frac{\pi}{4}$ alors (α_n) est convergente vers une limite ℓ.

On a $-\frac{\pi}{4}<\alpha_n<0\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\leq\ell\leq0$

On a $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\ell$

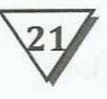
et la fonction tan est continue en ℓ

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\tan(\alpha_n)=\tan(\ell)$

D'autre part $\lim_{n\to+\infty}\tan(\alpha_n)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{\alpha_n}{n}-1=0-1=-1$

D'où $\tan(\ell)=-1$ or $\ell\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\Rightarrow\ell=-\frac{\pi}{4}$

Conclusion : (α_n) converge vers $-\frac{\pi}{4}$.

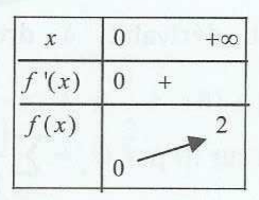


21 SUR LE CHEMIN DU BAC

I.

a) f est une fonction rationnelle donc elle est continue dérivable sur $[0,+\infty[$. $\forall x\in[0,+\infty[$, on a

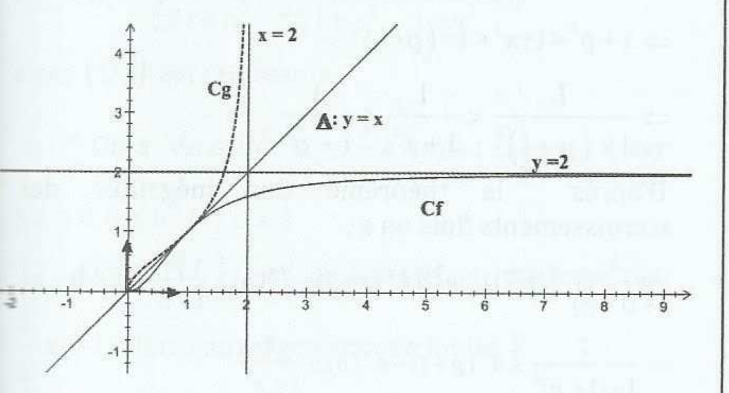
$$f'(x)=\frac{4\times(1+x^2)-2x(2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	0 ↗	2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

alors la droite D: y = 2 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.



1)

a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,2[$. D'où f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0,2[$

b) (C') est le symétrie de (C) par rapport à $D: y = x$.

2) a)

$f: [0,+\infty[\longrightarrow [0,2[$ bijection

$y \longrightarrow x$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$f(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x \Leftrightarrow 2y^2 = x(1+y^2)$

$\Leftrightarrow 2y^2 - xy^2 = x \Leftrightarrow y^2(2-x) = x$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{x}{2-x} \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

ou $y = -\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, or $y \in [0,+\infty[$

donc $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} = f^{-1}(x) = g(x)$.

II.1)

$h(x) = g(1-\cos x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2-1+\cos x}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$

$= \sqrt{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ car $x \in [0,\pi[$.

2) $\forall x \in [0,\pi[$, on a : $h'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) > 0$

h est continue et strictement croissante sur $[0,\pi[$ donc h réalise un bijection de $[0,\pi[$ sur $h([0,\pi[) = [0,+\infty[$.

3) $h: [0,\pi[\longrightarrow [0,+\infty[$ une bijection

$t \longrightarrow x$

h est dérivable sur $[0,\pi[$ et $\forall t \in [0,\pi[$,

$h'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) \neq 0$

donc h^{-1} est dérivable sur $h([0,\pi[) = [0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[$, on a :

$(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(t)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}$

or $h(t) = x \Leftrightarrow tg\left(\dfrac{t}{2}\right) = x$ d'où $(h^{-1})'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

4) Soit la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par

$\varphi(x) = h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in]0,+\infty[$

$\varphi(0) = \pi$

a)On a h^{-1} réalise une bijection de $[0,+\infty[\to [0,\pi[$ alors $h^{-1}[0,+\infty[= [0,\pi[$

D'autre part on a h^{-1} est continue croissante sur $[0,+\infty[$ alors $h^{-1}([0,+\infty)) = \left[h^{-1}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)\right[$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = \pi$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \pi$

D'où φ est continue à droite en o

b/ * La fonction $x \xrightarrow{U} \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

* La fonction $x \to h^{-1}(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en particulier sur $U(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$

d'ou la fonction $h^{-1}oU$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,

d'ou φ est dérivable sur $]0,+\infty[$

On a

$$\forall x>0, \varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

c) Soit $x \in]0,+\infty[$

on a φ est continue sur [0,x]

φ est dérivable sur sur]0,x[

Alors d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(c)$ c'est-à-dire $\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$

d) On a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+c^2}$$

(Rq c n'est pas constante elle dépend de x)

$= \lim_{c\to 0^+}\frac{-2}{1+c^2} = -2$ (car on a 0<c<x donc si $x \to 0^+$ on a $c \to 0^+$)

D'où φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = -2$.

<u>**2ème méthode :**</u>

On a $\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\pi}{x}$

Or il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$$\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$$

On a $0<c<x \Rightarrow 0<c^2<x^2 \Rightarrow 1<1+c^2<1+x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \Rightarrow -2 < \frac{-2}{1+c^2} < \frac{-21}{1+x^2}$$

D'où $-2 < \frac{\varphi(x)-\pi}{x} < \frac{-2}{1+x^2}$

Comme $\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+x^2} = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = -2$

D'où φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = -2$.

5) (U_n) définie sur IN par $U_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$

a) Soit $p \in$ IN on a

* h^{-1} est continue sur $[p, p+1]$

* h^{-1} est dérivable sur $]p, p+1[$

* $p<x<p+1 \Rightarrow p^2<x^2<(p+1)^2$

$$\Rightarrow 1+p^2<1+x^2<1+(p+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(p+1)^2} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+p^2}$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$\frac{2}{1+(1+p)^2}[(p+1)-p] \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}[(p+1)-p]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$$

Conclusion pour tout $p \in IN$ on a $\frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$

b) Soit $p \in IN, n \in IN^*$

$$*\frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{1+(1+p)^2} \le \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1) - \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(1+p)^2} \le \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1) - \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow 2(U_n-1) \le h^{-1}(n)-h^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow U_n \le \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1 \text{ car } h^{-1}(0)=0$$

$$*h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1) - \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p) \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(n)-h^{-1}(0) \le 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(n)-h^{-1}(0) \le 2\left(U_n - \frac{1}{1+n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}h^{-1}(n) + \frac{1}{1+n^2} \le U_n$$

Pour n = 0

$$\underbrace{\frac{1}{2}h^{-1}(0)+\frac{1}{0^2+1}}_{1} \leq \underbrace{U_0}_{1} \leq \underbrace{\frac{1}{2}h^{-1}(0)+1}_{1}$$

l'inégalité est vraie

Conclusion d'où pour tout $n \in IN$ on a

$$\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1$$

c) * On a $\forall n \in IN$

$$U_{n+1}-U_n=\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1}{1+p^2}-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+p^2}=\frac{1}{1+n^2}>0$$

alors (U_n) est croissante.

* On a $\forall n \in IN$, $U_n \leq \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1 \leq \frac{1}{2}\pi+1$ (car $\forall x \geq 0, 0 \leq h^{-1}(x) \leq \pi$)

Alors (U_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}\pi+1$ alors converge vers une limite ℓ

On pour tout $n \in IN$ $\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}\pi+1$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1}\right)=\frac{1}{2}\pi+0=\frac{1}{2}\pi$$

Alors $\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}+1$

22 SUR LE CHEMIN DU BAC

On a : $g(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$; $x \in]-3,1[$

A.1) g est dérivable sur $]-3,1[$.

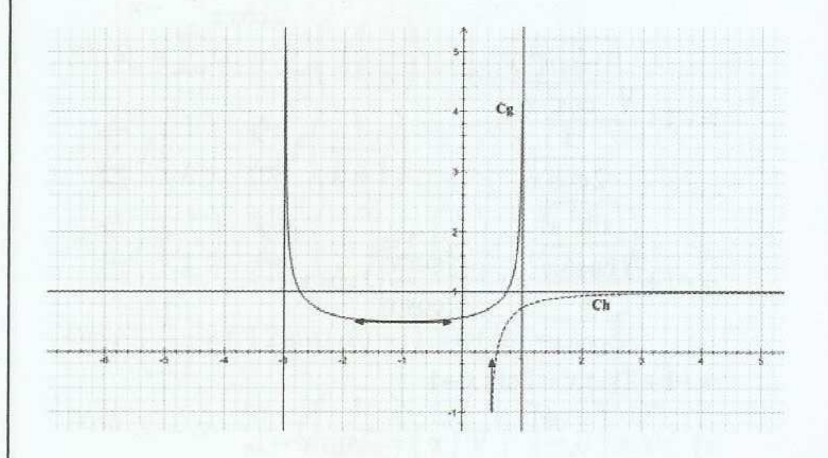
$$\forall x \in]-3,1[, g'(x)=-\frac{\left(\sqrt{-x^2-2x+3}\right)'}{\sqrt{-x^2-2x+3}^2}$$

$$=-\frac{\frac{-2x-2}{2\sqrt{-x^2-2x+3}}}{\left(-x^2-2x+3\right)}$$

$$=\frac{2x+2}{2\underbrace{\left(-x^2-2x+3\right)}_{>0}\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

Le signe de g'(x) est celui de 2x + 2

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$



2)

g est continue et strictement croissante sur $[-1,1[$ alors g réalise une bijection de $[-1,1[$ sur $g([-1,1[)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[=J$

3) $C_g=S_\Delta(\Gamma)$ avec $\Delta : y=x$ et Γ la partie de C_g relative à $[-1,1[$.

$h:[-1,1[\rightarrow \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

$y \rightarrow x$

$$g(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-y^2-2y+3}}=x$$

$$\Leftrightarrow -y^2-2y+3=\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y \neq 1=4-\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (y+1)^2=\frac{4x^2-1}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y+1=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \text{ ou } y+1=-\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$$

$$\Leftrightarrow y=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \text{ ou } y=-1-\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}<0$$

Impossible car y d'écrit l'intervalle $[-1,1[$.

D'où $y=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \Rightarrow h(x)=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$

4) on a: $\psi(x)=h\left(\frac{1}{2\cos x}\right)$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $h\left(\frac{1}{2\cos x}\right)=-1+\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}}{\frac{1}{2\cos x}}$

$=-1+\frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}}{\frac{1}{2\cos x}}$

$=-1+\frac{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}{\frac{1}{2\cos x}}=-1+\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|2\cos x$

$=-1+2\sin x=2\sin x-1$

b) $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\Psi(x)=2\sin x-1$

la fonction Ψ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$;

$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\Psi'(x)=2\cos x>0$

Ψ est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\Psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[\Psi(0),\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[=[-1,1[$

Comme $\frac{1}{2}\in[-1,1[$ alors l'équation $\Psi(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

c) On a: Ψ est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\Psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[-1,1[$

$\Psi:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to[-1,1[$

$t\to x$

On a: Ψ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ^{-1} est dérivable sur $\psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[-1,1[$

$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\Psi'(t)=2\cos t\neq 0$

$\forall x\in[-1,1[;(\Psi^{-1})'(x)=\frac{1}{\Psi'(t)}=\frac{1}{2\cos t}$

Or on a: $\Psi(t)=x \Leftrightarrow 2\sin t-1=x \Leftrightarrow \sin t=\frac{x+1}{2}$

Or $\cos^2 t+\sin^2 t=1\Rightarrow\cos^2(t)$

$=1-\frac{(1+x)^2}{4}=\frac{4-(1+2x+x^2)}{4}=\frac{-x^2-2x+3}{4}$

Or $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos t>0\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{2}$

Conclusion: $(\varphi^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}=g(x)$.

B. $\begin{cases} f'(x)=g(x), x\in]-3,1[\\ f(0)=0 \end{cases}$

1) $\varphi(x)=f(2\sin x-1), x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) $x\xrightarrow{\Psi}2\sin x-1\xrightarrow{f}f(2\sin x-1)$

$\varphi=fo\Psi$

* La fonction Ψ est dérivable sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

* La fonction f est dérivable sur $]-3,1[=\Psi(I)$

D'où $\varphi=fo\Psi$ est dérivable sur I.

$\forall x\in I,\varphi'(x)=\Psi'(x)f'(\Psi(x))=2\cos x\ g(\Psi(x))$

$=2\cos x\ g(2\sin x-1)$

$=\frac{2\cos x}{\sqrt{-4\sin^2 x+4\sin x-1-4\sin x+2+3}}$

$=\frac{2\cos x}{\sqrt{4-4\sin^2 x}}=\frac{2\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{2\cos x}{2\underbrace{|\cos x|}_{>0}}=1$

b) on a $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(2\sin\frac{\pi}{6}-1\right)=f(0)=0$

On a: $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $\varphi'(x)=1\Rightarrow\varphi(x)=x+k$

or $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ alors $\frac{\pi}{6}+k=0$ alors $k=-\frac{\pi}{6}$

d'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x)=x-\frac{\pi}{6}$

2) $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right); n \geq 2$

a) $\forall n \geq 2, \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq g\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n(n+1)}$?

Soit $n \geq 2$

On a: * f est continue sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

* f est dérivable sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$

* $\forall x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$; on a $f'(x) = g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ g \text{ est croissante sur } [-1,1[\\ \frac{1}{n+1} \in [-1,1[\\ \frac{1}{n} \in [-1,1[\end{array}\right\}$$

alors $g\left(\frac{1}{n+1}\right) < g(x) < g\left(\frac{1}{n}\right)$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis.

On a :

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n(n+1)}$$

b) on a: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

* on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

* on a:

$$\forall n \in N^* \setminus \{1\} : \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq n^2 U_n \leq \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 U_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} U_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$

$= \sum\limits_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) - \sum\limits_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k+1}\right)$

$= \sum\limits_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) - \sum\limits_{k=3}^{n+1} f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2\sin(\alpha) - 1\right) = \varphi(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{6}$

D'où $S_n = \alpha - \frac{\pi}{6} - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

On a: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\alpha - \frac{\pi}{6} - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \alpha - \frac{\pi}{6} - 0 = \alpha - \frac{\pi}{6}$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 - \sqrt{x^2+1} & si \ \ x < 0 \\ 1 + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$$

dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est ζ

1/ * $f(0) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + 1 = 2 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x + 3 - \sqrt{x^2+1} = 3 - 1 = 2 = f(0)$

Alors f est continue en 0

* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x + 3 - \sqrt{x^2+1} - 2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x + 1 - \sqrt{x^2+1}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^2-(x^2+1)}{x\left(x+1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+1}} = 1 = f_g'(0)$$

*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

=1

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

On a f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$

Alors f est dérivable en 0 et f'(0) = 1.

b) f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ alors $\forall x < 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$, $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+x)'\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}\,'(1+x)}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)-(1+x)x}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	2

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+3-\sqrt{x^2+1} = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1+\frac{1}{1} = 2$$

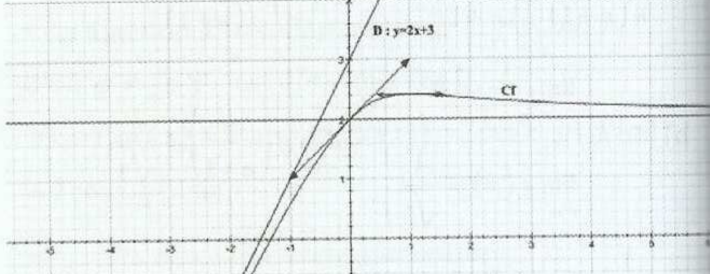
Alors la droite d'équation $y = 2$ est une horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3-\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} x+3-\sqrt{x^2+1}-2x$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 3 = b$$

D'où $D: y = 2x+3$ est une asymptote oblique à Cf au voisinage de $-\infty$



2/ a) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 2] = J$

b) $f :]-\infty, 0] \to]-\infty, 2]$

$y \to x$

On a $\forall y \in]-\infty, 0[$ $f(y) = y+3-\sqrt{y^2+1}$ et f(0) = 2

alors $\forall y \in]-\infty, 0]$ $f(y) = y+3-\sqrt{y^2+1}$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in]-\infty,0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3-\sqrt{y^2+1}=x \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3-x=\sqrt{y^2+1} \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((y+3)-x)^2=\sqrt{y^2+1}^2 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

(Nécessairement y+3-x ≥ 0 car si non $\underbrace{y+3-x}_{<0}=\underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{>0}$ est impossible et donc f n'est pas bijective)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2-2x(y+3)+x^2=y^2+1 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y+9-2xy-6x+x^2=y^2+1 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(6-2x)=-x^2+6x-8 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x} \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \text{ D}$$

'où $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}=\dfrac{x^2-6x+8}{2x-6}, x\in]-\infty,2]$

Remarque :

* On a $\forall y\in]-\infty,0[\quad f(y)=y+3-\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}$ et $x\in]-\infty,2[$

* On a : $f(0)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=0$

Conclusion : $\begin{cases} f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{2x-6} & \text{si } x\in]-\infty,2[\\ f^{-1}(2)=0 \end{cases}$

C'est-à-dire pour tout $x\in]-\infty,2]$ on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}$

3) a) on a si $0\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq -x\leq 0 \Rightarrow 0\leq 1-x\leq 1$ $\Rightarrow |1-x|\leq 1$

D'où pour tout x de $[0,1]$ on a

$$|f'(x)|=\frac{|1-x|}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\leq \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\leq 1$$

b) On pose $g(x)=f(x)-3x$

g est définie dérivable sur $]0,1[$, $\forall x\in]0,1[$, $g'(x)=\underbrace{f'(x)}_{\leq 1}-3<0$ g est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ alors g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)=]g(1),g(0)[=]\sqrt{2}-2,2[$

comme $0\in]\sqrt{2}-2,2[$

Alors l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur $]0,1[$

4) Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{2} \\ 3U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour } n\in IN \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a $U_n\in]0,1[$

* on a : $U_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow U_0\in]0,1[$

* Soit $p\in\mathbb{N}$, supposons que $0<U_p<1$ et montrons que $0<U_{p+1}<1$?

On a : $0<U_p<1$ et f est croissante sur $[0,1]$ alors $f(0)<f(U_p)<f(1)$

Alors $2<f(U_p)<1+\sqrt{2}$

Alors $2<3U_{p+1}<1+\sqrt{2}$

Alors $\dfrac{2}{3}<U_{p+1}<\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

Alors $0<U_{p+1}<1$

D'après le principe de raisonnement par récurrence la propriété est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$

b) ■ on a f est dérivable sur $I=[0,1]$

$\forall x\in [0,1], |f'(x)\leq 1|$ alors d'après le corollaire de Théorème des inégalités

$U_n\in [0,1]$ accroissements finis, on a : $\alpha\in [0,1]$

$|f(U_1)-f(\alpha)|\leq 1|U_n-\alpha| \Rightarrow |3U_{n+1}-3\alpha|\leq 1|U_n-\alpha|$

$\Rightarrow |U_{n+1}-\alpha|\leq \dfrac{1}{3}|U_n-\alpha|$

■ Montrons par récurrence P

$"\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n"$

* on a : $|U_0-\alpha|\leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^0$?

On a $|U_0-\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|\leq 1$

car $0<\alpha<1 \Rightarrow -1<-\alpha<0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\alpha<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}-\alpha\right|<\frac{1}{2}\leq 1$

Alors P est vraie pour $n=0$

* Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Montrons que $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

On a : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{3}|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$

■ On a $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

car $-1<\frac{1}{3}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$

5/ S la suite définie sur IN^* par : $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kU_k$

c) $\forall k\in IN^*$,

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kU_k-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\alpha$

$=S_n-\frac{1}{n^2}\alpha\sum_{k=1}^{n}k=S_n-\frac{1}{n^2}\alpha\frac{n(n+1)}{2}=S_n-\alpha\frac{(n+1)}{2n}$

$S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)$

d) * $\forall n\in IN^*, 3^n\geq 2n$? Soit $n\in IN^*$ d'après la formule de binôme on a

$3^n=(1+2)^n=C_n^0 1^n 2^0+C_n^1 1^{n-1}2^1+\ldots+C_n^n 2^n=1+2n\underbrace{+\ldots+2^n}_{>0}$

alors $\forall n\in IN^*, 3^n\geq 2n$

*$\forall n\in IN^*$,

$\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|=\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)\right|\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|$

Or $\forall k\in IN^*$

$|U_k-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^k$ et $\frac{1}{3^k}\leq\frac{1}{2k}\Rightarrow|U_k-\alpha|\leq\frac{1}{2k}$

$\Rightarrow k|U_k-\alpha|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\leq n\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\leq\frac{1}{2n}$

$\Rightarrow\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|\leq\frac{1}{2n}$

*On a $\forall n\in IN^*$,

$\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|\leq\frac{1}{2n}\Rightarrow-\frac{1}{2n}\leq S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\leq\frac{1}{2n}$

$\Rightarrow\alpha\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n}\leq S_n-\leq\alpha\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}=\frac{\alpha}{2}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}=\frac{\alpha}{2}$

alors que la suite S converge vers $\frac{\alpha}{2}$

Fonctions primitives

I) Résumé du cours

A) Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 2

Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle I alors f admet une infinité de fonctions primitives sur I et qui sont toutes de la forme F + c où c désigne une constante réelle arbitraire. C'est-à-dire l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 3

Etant donnés un intervalle I, un réel a de I et un réel b.

Toute fonction f continue sur I admet une unique fonction primitive F sur I telle que $F(a) = b$.

B) Opérations sur les fonctions primitives

Théorème 4

Etant donnés deux fonctions continues f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux réels α et β.

Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $(\alpha.F + \beta.G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

C) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est intervalle de	Fonction f définie sur I par	Fonctions primitives F de f définies sur I par
$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\ ;\ (a \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto ax + c\ ;\ (c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c\ ;\ (c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n\ ;\ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\ ;\ (c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c\ ;\ (c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto x^n\ ;\ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\ ;\ (c \in \mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^*_+$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto tgx + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\cot gx + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax+b)$; $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}$ tel que $ax+b = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto 1+\tan^2(ax+b)$; $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}$ tel que $ax+b = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto (1+\text{cotan}^2(ax+b))$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto -\frac{1}{a}\text{cotan}(ax+b) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

D) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :	*Fonction f*	*Fonctions primitives F de f sur I*
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u' + v'$	$u + v + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I.	au' ; *a réel.*	$au + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'.v + v'.u$	$(uv) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.	$u'.u^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^n}$; $n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et strictement positive sur I.	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

u et v deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annulant pas sur I.	$\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}+c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions telles que vou soit dérivable sur I.	$(v' o\, u).u'$	$(v\ o\ u)+c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.

E) Exemples de calcul de fonctions primitives

Exemple 1

Une primitive de la fonction $f: x \mapsto 3x^2-5x-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction

$F: x \mapsto x^3-\dfrac{5}{2}x^2-x-2\sqrt{x}+c$ où c désigne une constante réelle arbitraire.

Exemple 2

Soit la fonction $f: x \mapsto x(1-x^2)^2$.

1) En posant $u(x)=(1-x^2)$, vérifier que $f(x)=-\dfrac{1}{2}u'(x)[u(x)]^2$.

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto -\dfrac{1}{6}(1-x^2)^3+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3

Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) En posant $u(x)=(x^2+1)$, vérifier que $f(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto \sqrt{x^2+1}+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{4x+2}{(x^2+x-2)^2}$.

1) En posant $u(x)=(x^2+x-2)$, vérifier que $f(x)=\dfrac{2u'(x)}{[u(x)]^2}$.

2) En déduire que la fonction $F: x \mapsto \dfrac{-2}{x^2+x-2}+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

Exemple 5

Soit la fonction f : $x \mapsto \frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}$.

1) En posant $u(x)=5x^3$, vérifier que $f(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

2) En déduire que la fonction F : $x \mapsto 2\sqrt{5x^3}+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Exemple 6

Soit la fonction f : $x \mapsto (2x+1)\cos(x^2+x+1)$.

1) En posant $u(x)=(x^2+x+1)$ et $v(x)=\sin x$, vérifier que $f(x)=u'(x)\times(v'\circ u)(x)$.
2) En déduire que la fonction F : $x \mapsto \sin(x^2+x+1)+c$; où c est une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7

Soit la fonction f : $x \mapsto (x^2+1)^3$.

1) Montrer que $f(x)=x^6+3x^4+3x^2+1$.
2) Déterminer alors, la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 1.

Exemple 8

Soit la fonction $f: x \mapsto \cos x-\cos^3 x$.

a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) En écrivant $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$, vérifier que $f(x)=u'(x).u^2(x)$ où u est une fonction dérivable sur I = $]0,\pi[$ et trouver alors, une primitive F de f sur l'intervalle I.

II) Exercices

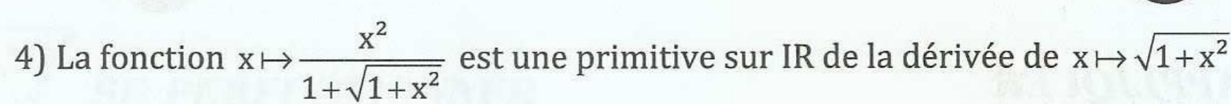


FAUX OU VRAI

1) $f: x \mapsto \left(\frac{x}{3}+1\right)^2$ a pour primitive $F: x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}+1\right)^3$

2) Les deux fonctions : $F: x \mapsto \frac{x^2+6x+1}{2x-3}$ et $G: x \mapsto \frac{x^2+10}{2x-3}$ sont deux primitives d'une même fonction f sur $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$

3) La fonction $x \mapsto 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{3}\cos x-\sin x$ qui s'annule pour $x=5\frac{\pi}{6}$



4) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ est une primitive sur IR de la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$

5) Si F est une primitive sur IR de f alors $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de $x \mapsto f(2x)$

2 APPLIQUER

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une fonction primitive F sur un intervalle que l'on précisera :

1) $f : x \mapsto x^5 - 5x^2 + 2 - \dfrac{3}{x^2}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2}$.

3) $f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x-4)^8$

4) $f : x \mapsto (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$.

5) $f : x \mapsto (x^2-1)(x^3-3x+5)$

6) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

7) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$.

8) $f : x \mapsto (2x+1)^3$.

9) $f : x \mapsto \cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

10) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\sqrt{x^2-1})$.

11) $f : x \mapsto (\cos x) \times \sin^3 x$

12) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$



3 APPLIQUER

Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = 4x et la fonction F définie par :

$F(x) = x^4 + 2$ si $x \geq 0$, $F(x) = x^4 - 2$ si $x < 0$

F est elle une primitive de f sur ℝ ?.

4 APPLIQUER

Soit la fonction $f : x \mapsto (\cos x) \times (2\sin x - 1)$

Justifier l'existence des primitives de f sur ℝ et déterminer la primitive F de f qui s'annule en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5 APPLIQUER

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x - 3\cos x + 2$

1) Vérifier que pour tout x réel on a : $f(x) = -(\cos x) \times \sin^2 x - 2\cos x + 2$

2) En déduire la primitive F de f sur ℝ qui s'annule en $(-\dfrac{\pi}{2})$.



Soit la fonction $f : x \mapsto 5\sin x + 3\sin^3 x$

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x réel.

2) En déduire l'expression générale des primitives de f sur $\mathbb{R}$.



Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{(x-1)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

2) En déduire une fonction primitive de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.



Soit la fonction $f : x \mapsto \sin(3x) \times \cos x$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}[\sin(4x) + \sin(2x)]$.

2) En déduire la fonction primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

9 SE PERFECTIONNER

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ pour x appartenant à $]0, \pi[$.

1) Etudier et représenter la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé.

2) Soit g la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.

c) Déterminer une primitive F de la fonction $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.



SE PERFECTIONNER

Soit f une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application u qui à tout réel t, associe $u(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}$ et g l'application de l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=f\left(\frac{1+\text{tg}x}{2}\right)$

1) Prouver que g est dérivable sur I.
2) Montrer que g est une application affine.
3) Calculer f(1) - f(0) .



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction $f: x\mapsto 3\sin x-2\sin^3 x$

1) Trouver deux réels a et b tels que la fonction :
$x\mapsto a\cos x+b\cos^3 x$ soit une primitive de f sur l'intervalle $[0,\pi]$.

2) En écrivant $\sin^3 x=(1-\cos^2 x)\sin x$ retrouver une primitive de f sur $]0,\pi[$.



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction

$f:]0,+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{1}{x}$

1) Montrer que f admet une primitive et une seule F qui s'annule en 1.

2) Etudier le sens de variation de F, en déduire que :
$\forall x\in]0,1[,\ F(x)<0$ et
$\forall x\in]1,+\infty[,\ F(x)>0$

3) Soit H(x) = F(ax) pour x > 0 ;
(où a est un réel strictement positif donné).

a) Montrer que H est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que F(ax) = F(a) + F(x).

c) Montrer que $F(\frac{x}{a})=F(x)-F(a)$.

4) Déterminer, à l'aide de F, la primitive G de la fonction
$g:]-\infty,0[\rightarrow\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x}$ et qui s'annule en (-1).

13 SUR LE CHEMIN DU BAC

A) Soit la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur $[0,+\infty[$ s'annulant en 0.

2) On pose pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, K(x)= F(tgx).

a) Montrer que la fonction K est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer K'(x).

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

K(x) = x puis calculer $F(\frac{\sqrt{3}}{3})$ et F(1).

3) On pose pour tout réel positif x,

$U(x) = F(\frac{1}{1+x}) + F(\frac{x}{x+2})$.

a) Montrer que U est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer U'(x).

b) En déduire la valeur du réel $F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{3})$.

B) Soit g(x) = - f(x)

1) Montrer que g admet une primitive et une seule G sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

2) Soit la fonction :

$T : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto T(x) = G(\text{cotg} x)$

a) Montre que T est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer T '(x).

b) En déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $T(x) = x - \frac{\pi}{2}$. puis calculer G(1) et $G(\sqrt{3})$

3) On pose : $\forall x \in [0,+\infty[$, $V(x) = G(\frac{1}{x}) + G(\frac{x}{x+2})$

a) Montrer que V est dérivable sur $[0,+\infty[$ et déterminer V'(x).

b) En déduire que : $G(\frac{1}{4}) + G(\frac{3}{5}) = \frac{\pi}{4}$.



FAUX OU VRAI

1) **Faux** : une primitive de f: $x \mapsto \left(\frac{x}{3}+1\right)^2$ est F : $x \mapsto \left(\frac{x}{3}+1\right)^3$

2) **Vrai :** F(x) – G(x) = 3

3) **Vrai**

4) **Vrai :** $\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 1$

5) **Faux :** une primitive de $x \mapsto f(2x)$ est $x \mapsto \frac{1}{2}F(2x)$



APPLIQUER

1- $f(x) = x^5 - 5x^2 + 2 - \frac{3}{x^2}$;

$F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5}{3}x^3 + 2x + \frac{3}{x}$; $I =]0,+\infty[$

2- $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$;

$I =]-\infty, 0[$

3- $f(x) = u'(x)[u(x)]^n$ où $u(x) = x^2 - 4$,

$F(x) = \frac{(x^2-x-4)^9}{9}$; I=IR.

4- $f(x) = x - \sqrt{x} - 2$, $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x$

, $I =]0,+\infty[$

5- $f(x) = (x^2-1)(x^3-3x+5)$

$= \frac{1}{3}3(x^2-1)(x^3-3x+5)$,

$F(x) = \frac{1}{6}(x^3-3x+5)^2$

6- $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}} = \frac{1}{2}.\frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+5}}$,

$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}$, I=IR.

7- $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} = -\frac{-(2x+2)}{2(x^2+2x+5)}$,

$F(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{(x^2+2x+5)}$; I=IR.

8- $f(x) = (2x+1)^3 = \frac{1}{2}2(2x+1)^3$,

$F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4$, I=IR.

9- $f(x) = cos(2x+\frac{\pi}{6})$, $F(x) = \frac{1}{2}sin(2x+\frac{\pi}{6})$; I=IR.

10- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}cos(\sqrt{x^2-1})$ de la forme $u'(x)cos[u(x)]; u(x) = \sqrt{x^2-1}$

$F(x) = sin(\sqrt{x^2-1})$; $I =]1,+\infty[$

11- $f(x) = cos\,sin^3 x$; $F(x) = \frac{sin^4 x}{4}$; I=IR.

12- $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2}{3}.\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$,

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$; $I =]-1;+\infty[$



APPLIQUER

F ne peut pas être une primitive de f sur IR,
F n'est pas continue en 0 (elle ne l'est pas donc dérivable)



APPLIQUER

$f(x) = cos\,x(2sin-1)$, f est continue sur IR, elle admet alors sur IR une infinité de primitives de la forme $F(x) = \frac{1}{4}(2sin\,x-1) + c$; $c \in IR$

$F(\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{4}$

$F(x)=\frac{1}{4}(2\sin x-1)^2-\frac{1}{4}$ est la primitive de

f *telle que* $F(\frac{\pi}{2})=0$

5 APPLIQUER

1-
$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2=\cos^3 x-3\cos x-2\cos x+2$

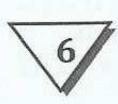
$=-\cos x(1-\cos^2 x)-2\cos x+2$

$=-\cos x\sin^2 x-2\cos x+2$

2- $F(x)=-\frac{\sin^3 x}{3}-2\sin x+2x+c$, $c\in IR$

$F(\frac{-\pi}{2})=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}+2-\pi+c=0\Leftrightarrow\pi-\frac{7}{3}$

$F(x)=-\frac{\sin^3 x}{3}-2\sin x+2x+\pi-\frac{7}{3}$



APPLIQUER

$f(x)=5\sin x+3\sin^3 x$

1- $f'(x)=5\cos x+9\cos x\sin^2 x$

$f''(x)=-5\sin x+(-\sin x.\sin^2 x+2\sin x.\cos x.\cos x)$

$=-5\sin x-9\sin^3 x+18\sin x.xos^2 x$

D'où

$9\sin^3 x=-5\sin x+18\sin x.\cos^2 x-f''(x)$

Donc

$3\sin^3 x=-\frac{5}{3}\sin x+6\sin x.\cos^2 x-\frac{1}{3}f''(x)$

2) l'expression générale des primitives F de f sur IR est de la forme :

$F(x)=-5\cos x+\frac{5}{3}\cos x-6\frac{\cos^3}{3}-\frac{1}{3}f'(x)+c$; $c\in IR$

$F(x)=-5\cos x+\frac{5}{3}\cos x-2\cos^3 x-\frac{5}{3}\cos x$

$-3\cos x.\sin^2 x+c;c\in IR$

$F(x)=-5\cos x-2\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x+x;c\in IR$.



SE PERFECTIONNER

$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^2},d_f=IR/\{1\}$

1- $\forall xcD_f;f(x)=x-1+\frac{1}{(x-1)^2}$

2- Une primitive F de f sur $]1,+\infty[$ est

$F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x-1}$



SE PERFECTIONNER

1- On rappelle que $\forall a,b\in IR$;
$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a.\cos b$

D'où $\sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

Ainsi :

$\sin 3x.\cos x=\frac{1}{2}(\sin(3x+x)+\sin(3x-x))$

$=\frac{1}{2}[\sin(4x)+\sin(2x)]$

2- Une primitive F de f sur IR est :

$F(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x)+c$

$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

$F(\pi)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{3}{8}$,

d'où $F(x)=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}$ est primitive de f sur IR *telle que* $F(x)=0$



SE PERFECTIONNER

$f(x)=\frac{1}{\sin x}$, $x\in]0,\pi]$,

$f(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

1-

2-a- g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, elle réalise alors une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $J=f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=[1,+\infty[$

b) $g^{-1}(y)=\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}=\frac{1}{g'(x)}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

or $g(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{sinx}=y \Leftrightarrow sin^2 x=\frac{1}{y^2}$ et

$1-cos^2 x=\frac{1}{y^2} \Leftrightarrow cos^2 x=1-\frac{1}{y^2} \Rightarrow cos x=-\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$

d'où : $(g^{-1})'(y)=\frac{\frac{1}{y^2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}=\frac{-y}{y\sqrt{y^2-1}}=\frac{-1}{\sqrt{y^2-1}}$

Ainsi : $\forall x>1$, $(g^{-1})'(x)'=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\forall x>\frac{3}{2}$, $k(x)=-(g')^{-1}(x)$, d'où une primitive de K sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ est $x \mapsto f^{-1}{}'(x)+x \quad c \in IR$.

10 SE PERFECTIONNER

f une primitive sur IR de :

$u: t \mapsto u(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}$

$g: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to IR$; $x \mapsto g(x)=f\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$

1- $\varphi : x \mapsto \frac{1+tgx}{2}$ est dérivable sur I et $\varphi(I)=IR$

f est dérivable sur IR (f est une primitive sur IR de u)

donc $g=f \circ \varphi$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables.

2- $\forall x \in I$, $g'(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2x)u(\frac{1+tgx}{2})$

$=\frac{1}{2}(1+tg^2x).\frac{1}{2\left(\frac{1+tgx}{2}\right)^2-2\left(\frac{1+tgx}{2}\right)+1}$

$=\frac{1}{2}(1+tg^2x).\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tg^2x+2tgx\right)-1-tgx+1}$

$=\frac{1}{2}(1+tg^2x).\frac{2}{1+tg^2x+2tgx-2-2tgx+2}=1$

D'où $\forall x \in I$, $g(x)=x+c$, $c \in IR$

Ainsi f est une application affine

3- $g(\frac{\pi}{4})=f\left(\frac{1+tg\frac{\pi}{4}}{2}\right)=f(\frac{1+1}{2})=f(1)$

$g(-\frac{\pi}{4})=f\left(\frac{1+tg-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=f(\frac{1-1}{2})=f(0)$

D'où

$f(1)-f(0)=g(\frac{\pi}{4})-g(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+c-(-\frac{\pi}{4}+c)=\frac{\pi}{2}$

11 SE PERFECTIONNER

$f(x)=3sinx-2sin^3 x$

Soit $F(x)=a cos x+b cos^3 x$ définie sur $[0,\pi]$

1- F est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$F'(x)=-a sin x-3b sin x.cos^2 x$

$F'(x)=-a sin x-3b sin x(1-sin^2 x)$

$F'(x)=(-a-3b) sin x+3b sin^3 x$

F est primitive de f sur $[0,\pi]$ si et seulement si

$\begin{cases}-a-3b=3\\3b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$

2- $f(x)=3sinx-2sinx(1-cos^2 x)$

$=3sinx-2sinx+2sinx.cos^2 x$

Une primitive de f sur $[0,\pi]$ s' écrit :

$-3cos x+2cos x-2\frac{cos^3 x}{3}=-cos x-\frac{2}{3}cos^3 x$

12 SE PERFECTIONNER

$f(x)=\frac{1}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$

1- f est continue sur $]0,+\infty[$, elle admet alors sur cet intervalle une seule primitive vérifiant $F(1)=0$.

3- $\forall x>0$, $H(x)=F(ax)$, (a>0)

a- $\varphi : x \mapsto ax$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\varphi(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ (a>0)

F est dérivable sur $]0,+\infty[$ (primitive de f sur $]0,+\infty[$)

d'où $H=F\circ\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et

$$H'(x)=aF'(ax)=af(x)=a.\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}=f(x)$$

Ainsi H est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

b- On a $H(x)=F(x)+c$; $c\in IR$ (H et F sont deux primitives sur $]0,+\infty[$ de f, elles diffèrent donc d'une constante), or :

$H(1)=F(1)+c\Leftrightarrow F(a)=0+c\Leftrightarrow c=F(a)$

Ainsi, $H(x)=F(x)+F(a)$, c'est-à-dire $F(ax)=F(x)+F(a)$

b- posons $K(x)=F(\frac{x}{a})$, K est dérivables sur $]0,+\infty[$ et $K'(x)=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a})=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}.\frac{a}{x}=\frac{1}{x}=f(x)$

d'où K est une primitive de f sur $]0,+\infty[$,

d'où $\forall x\in]0,+\infty[$; $F(x)=K(x)+c$, $c\in IR$

$$\Leftrightarrow F(x)=F\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

Or $F(1)=F(\frac{x}{a})+c=0\Leftrightarrow c=-F(\frac{1}{a})$

ainsi $\Leftrightarrow F(\frac{x}{a})=F(x)-F(\frac{1}{a})$

13 SUR LE CHEMIN DU BAC

A) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

1- f est continue sur IR_+ elle admet alors une seule primitive F sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, vérifiant F(0)=0

2- $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $K(x)=F(tgx)$

a) tg est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $tg\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ et F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables et

$$K'(x)=(1+tg^2x)F'(tgx)$$
$$=(1+tg^2x)f(tgx)$$
$$=(1+tg^2x)\frac{1}{1+tg^2x}$$
$$=1$$

b) $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $K'(x)=1$,

donc $K(x)=x+c;c\in IR$

or $K(0)=F(tg0)=F(0)=0$

donc $0+c=0\Leftrightarrow c=0$ d'où $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$K(x)=x$.

$$F(\frac{\sqrt{3}}{3})=F(tg\frac{\pi}{6})=K(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$$

$$F(1)=F(tg\frac{\pi}{4})=K(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$$

3- $x\geq 0$, $U(x)=F(\frac{1}{1+x})+F(\frac{x}{x+2})$

$\varphi:x\mapsto\frac{1}{1+x}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi([0,+\infty[)\subset[0,+\infty[$

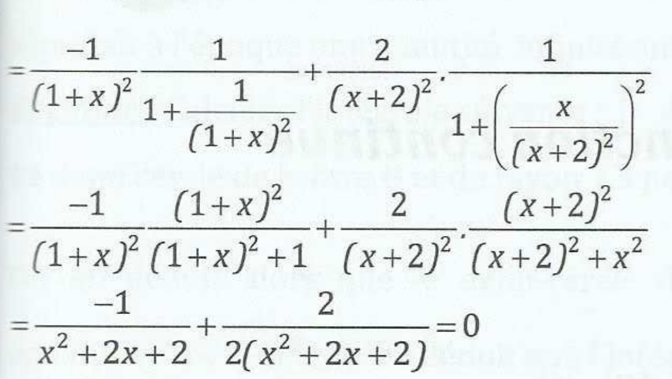
$F\circ\varphi$ est donc dérivable sur $[0,+\infty[$

$\psi:x\mapsto\frac{1}{x+2}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\psi([0,+\infty[)\subset[0,+\infty[$

$F\circ\psi$ est donc dérivable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi U est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$.

$$U'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}f(\frac{1}{1+x})+\frac{2}{(x+2)^2}f(\frac{x}{x+2})$$



$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}+\frac{2}{(x+2)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{(x+2)^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\cdot\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+1}+\frac{2}{(x+2)^2}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2+2x+2}+\frac{2}{2(x^2+2x+2)}=0$$

Ainsi $U(x)=\ c;c\in IR$;

or $U(0)=F(1)+F(0)=\frac{\pi}{4}$

Donc :

$U(x)=\frac{\pi}{4}\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) $F(\frac{1}{2})+F(\frac{1}{3})=U(1)=\frac{\pi}{4}$

B- $g(x)=-f(x)=\frac{-1}{1+x^2}$

1- g est continue sur $[0,+\infty[$, elle admet alors une seule primitive G sur $[0,+\infty[$ tel que G(0)=0

2- $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $T=(x)=G(\cot gx)$

Cotg est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

$\cot g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,+\infty[$

G est dérivable sur $[0,+\infty[$

Ainsi $T=G\circ\cot g$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

et $T'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}G'(\cot gx)=\frac{-1}{\sin^2 x}.g(\cot gx)$

$$=\frac{-1}{\sin^2 x}\left(\frac{-1}{1+\cot g^2 x}\right)=\frac{1}{\sin^2 x}.\sin^2 x=1$$

b) $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $T'(x)=1$ donc $T(x)=x+c$, $c\in IR$.

Or :

$T(\frac{\pi}{2})=G(\cot g\frac{\pi}{2})=G(0)=0=\frac{\pi}{2}+c\Leftrightarrow c=-\frac{\pi}{2}$

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[$, $T(x)=x-\ \frac{\pi}{2}$

3) $V(x)=G(\frac{1}{1+x})+G(\frac{x}{x+2})$

a) comme dans A 3-a- , V est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$V'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}g(\frac{1}{1+x})+\frac{2}{(x+2)^2}g(\frac{x}{x+2})$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\cdot\frac{-1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}+\frac{2}{(x+2)^2}\cdot\frac{-1}{1+\frac{x^2}{(x+2)^2}}$$

$$=\frac{1}{1+x^2+2x}-\frac{2}{2(x^2+2x+1)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2+2x}-\frac{1}{1+x^2+2x}=0$$

Ainsi

$V(x)=cste=V(0)=G(1)+G(0)=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$

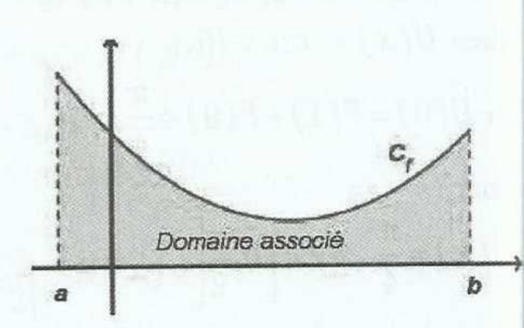
b) $V(3)=G(\frac{1}{4})+G(\frac{3}{5})=-\frac{\pi}{4}$

Intégrale d'une fonction continue

I) Résumé du cours :

A) Notion d'intégrale :

Le but de l'intégration est de calculer la surface délimitée entre la courbe et l'axe des abscisses.



Aire du domaine associé à une fonction positive

Le domaine associé :

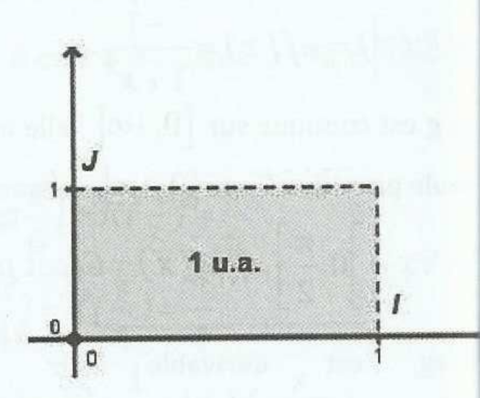
Nous appellerons domaine associé à une fonction f positive sur $[a;b]$, le domaine ξ délimité par la courbe ζ_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x=a et x=b ($a \leq b$).

Ce domaine est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



Unité d'aire :

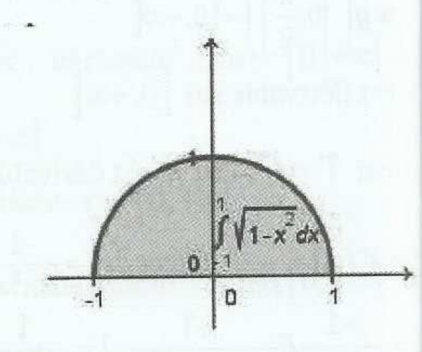
le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J.



Si l'on a : OI=3cm et OJ=2cm alors l'unité d'aire est égale à 6 cm^2.

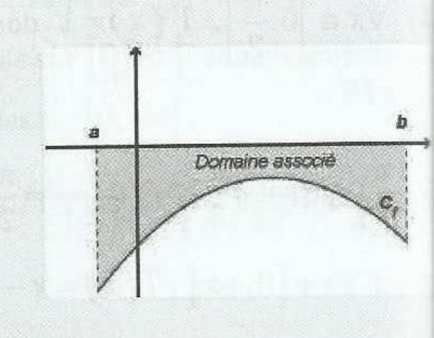
Définition 1 :

Soit une fonction **continue** (ou continue par intervalle) **positive** sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f, l'aire du domaine associé à f sur l'intervalle $[a;b]$ exprimé en u.a, le nombre noté : $\int_a^b f(x)dx$



Remarque :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : « somme ou intégrale de a à b de f(x) dx »
- a et b sont les bornes de l'intégrale.
- La variable " x " est une variable muette, c'est-à-dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.
- La variable x peut être remplacé par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.
- Le symbole dx n'a pas de signification sinon on rappelle la démarche des concepteurs du XVII[e] siècle (Leibniz). Il



signifiait à l'époque une quantité infinitésimale (largeur des rectangles).

Exemple : Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

Le demi cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation : $x^2+y^2=1$.

On en déduit alors que le demi-cercle de centre O et de rayon 1 pour $y\geq 0$ a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$. On en déduit que l'intégrale est l'aire du demi-cercle de rayon 1 soit $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

B) Fonction continue d'un signe quelconque :

Définition 2 :

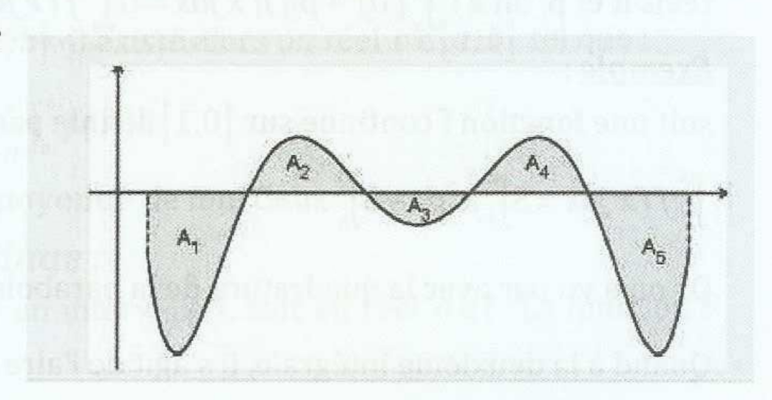
Soit une fonction continue (ou continue par intervalle) sur l'intervalle $[a;b]$.

- Si f est négative sur $[a;b]$, on a alors

$\int_{a}^{b}f(x)dx=-A$

- Si f a une signe quelconque sur $[a;b]$.

$\int_{a}^{b}f(x)dx=-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+...$



C) Propriété algébriques :

Propriété 1: Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors :

1) $\forall a\in I$ on a : $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$

2) Pour tous a, b et c de I tels que $a<b<c$, on a : $\int_{b}^{c}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{c}f(x)dx$

Remarque : Ces deux propriétés résultent directement de la définition de l'intégrale en termes d'aire.

Définition 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors : $\int_{b}^{a}f(x)dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

A partir de cette définition, on en déduit le théorème (admis) suivant :

Théorème 1 : Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, contenant a,b et c, alors :

$\int_{a}^{c}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{c}f(x)dx$

Remarque :

Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)dx$$

Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= 0$$

Théorème 2 : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tous les réels α et β, on a : $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

Exemple :

soit une fonction f continue sur $[0,1]$ définie par : $f(x) = 5x^2 - 3x$.

$\int_a^b f(x)dx = 5\int_0^1 x^2dx - 3\int_a^b xdx$

Or on a vu par avec la quadrature de la parabole que : $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

Quand à la deuxième intégrale, il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle de côté 1 donc :

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors que :

$$\int_0^1 f(x)dx = 5\times\frac{1}{3} - 3\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6} u.a.$$

D) Inégalité et valeur moyenne

Théorème 3 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ $(a \leq b)$.

1) Positivité :

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2) Intégration d'une inégalité :

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

3) Inégalité de la moyenne :

$\forall x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Exemple :

Encadrement de l'intégrale suivante : $\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.

On encadre la fonction sur $[0,9]$:

$0 \le x \le 9$

$0 \le \sqrt{x} \le 3$

$1 \le 1+\sqrt{x} \le 4$

$\frac{1}{4} \le \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 9$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$\frac{1}{4}(9-0) \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 1(9-0)$

$\frac{9}{4} \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \le 9$

Théorème 4 :

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$. Il existe alors un réel $c \in [a;b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

On pose alors : μ=f(c) qui est appelée **valeur moyenne** de fonction.

E) Primitive d'une fonction continue :

Théorème 7 : soit f une fonction continue sur un intervalle I. soit un réel $a \in I$. La fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

est alors l'unique primitive de f sur l qui s'annule en a.

Règles d'intégration :

Du fait des règles de deriviation et de la linéarisation de l'intégrale, on en déduit les règle suivantes en reprenant comme constante d'intégration k=0 :

F) Primitives élémentaires et règles d'intégration :

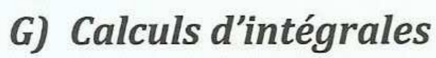
Primitive de la somme $\int (u+v) = \int u + \int v$

Primitive du produit par un scalaire $\int (ku) = k\int u$

Primitive de u'u'' $\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

Primitive de $\frac{u'}{u}$ n≠1 $\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

Primitive $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$



G) Calculs d'intégrales

1) Calcul à partir d'une primitive

Théorème 8 : f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive quelconque de f sur I, alors pour tous réels a et b on a : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On note alors : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Exemple

1) Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)dx$

$$\int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\times4 + 3\times2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + \frac{1}{3} + 2 + 3 = 6$$

2) Calculer l'intégrale : $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$

$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{6}{5}$$

Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues.

Alors $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Calcul des surfaces et des volumes :

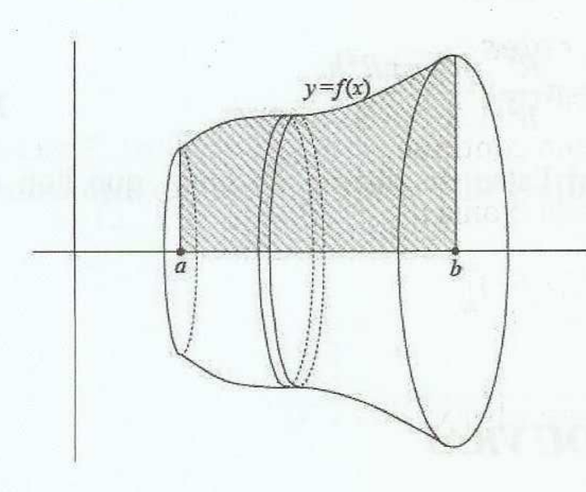
Théorème : Etant donné deux fonction f et g continues sur l'intervalle $[a;b]$ l'aire du domaine délimité par les représentations graphiques de f et g et les droites d'équation x=a et x=b est, en unités d'aire, égale à :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Calcul de volumes :

Volume d'un solide de révolution

Théorème : Etant donné une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$, le volume du solide de révolution engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine délimité par l'axe des abscisses , la représentation graphique de f et les droites d'équation x = a et x=b en unités de volume, égale à : $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.



Exemples :

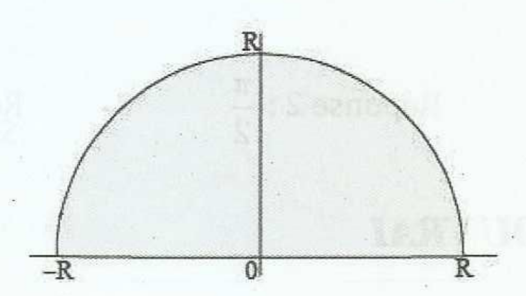
Calculer le volume d'une boule de rayon R.

Une boule de rayon R est engendrée par la ratotion d'un demi-disque autour de son diamètre. Pour simplifier des choses, utilisons un demi-disque centré en O et dont le diamètre est sur l'axe des abscisses. Il est défini par : $\begin{cases} x^2+y^2 \le R^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le R^2-x^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$

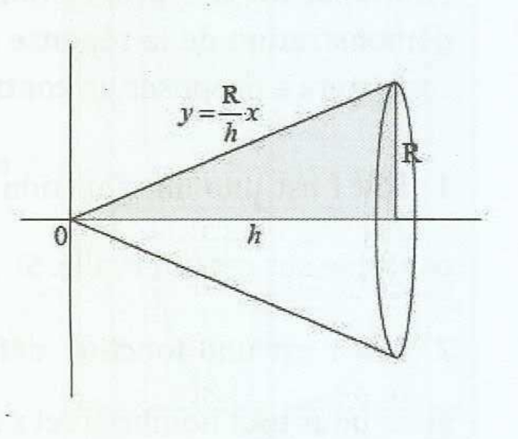
Ce qui montre est sous la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{R^2-x^2}$.

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left[f(x)^2\right]dx=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=2\int_{0}^{R}\pi(R^2-x^2)dx \text{ (fonction paire)}$$

$$V=2\pi\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

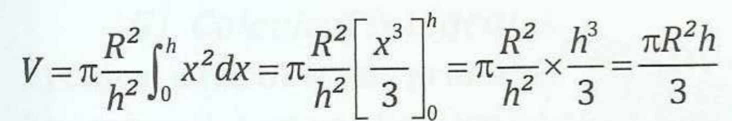


Calculer le volume d'un cône de hauteur h et dont le cercle de base a pour rayon R.



Le cône est engendré par la rotation d'un triangle rectangle . le cours de seconde donne immédiatement une équation de la droit sous laquelle se trouve le triangle. Elle représente la fonction : $f : x \mapsto \frac{R}{h}x$.

$$V=\int_{0}^{h}\pi[f(x)]^2dx=\int_{0}^{h}\pi\frac{R^2}{h^2}x^2dx$$



$$V=\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\pi\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\frac{R^2}{h^2}\times\frac{h^3}{3}=\frac{\pi R^2 h}{3}$$

En remarquant que πR^2 est l'aire du disque de base, que l'on désigne souvent par B, la formule devient : $V=\frac{Bh}{3}$.

II) Exercices



1 QCM ; FAUX OU VRAI

Trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

1) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx =$

Réponse 1 : $\frac{1}{16}$ Réponse 2 : $-\frac{1}{16}$ Réponse 3 : $\frac{3}{16}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)dx =$

Réponse 1 : 1 Réponse 2 : 0 Réponse 3 : 2π.

3) La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ est égale à

Réponse 1 : $-\frac{\pi}{2}$ Réponse 2 : $\frac{\pi}{2}$ Réponse 3 : $\frac{\pi}{2}$

2 QCM ; FAUX OU VRAI

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple.

1) Soit f est une une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Si $f(-1)=-f(1)$, alors : $\int tf'(t)dt=-\int_{-1}^{1}f(t)dt.$

2) Soit f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;3]$. Si $\int_0^3 f(t)dt\le\int_0^3 g(t)dt$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0;3]$, : $f(x)\le g(x)$.



APPLIQUER

On considère les fonctions suivantes définies sur l'intervalle I = [0 ; 1] par :

- $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
- $g(x)=1-\dfrac{x}{2}$
- $h(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$

1) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

2) En déduire que pour tout $x \in I$, on a : $\dfrac{3}{4} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \dfrac{5}{6}$.



APPLIQUER

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{1} x^3 \cos x\,dx$; b) $\int_{-3}^{3} |x|\,dx$; c) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x\,dx$; d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,dx$



APPLIQUER

Calculer les intégrales suivantes : **a)** $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ **b)** $\int_0^{\pi} (x+2)\sin x\,dx$.



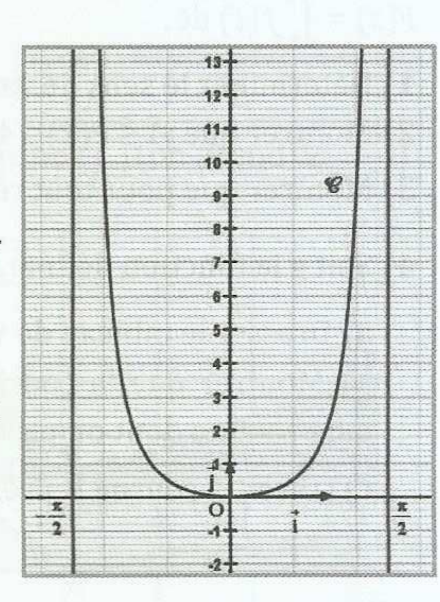
APPLIQUER

1) Prouver que : $\int_1^3 \sin(t^2)\,dt \le 2$.

2) Montrer que : $0 \le \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx \le 1$.



S'ENTRAINER



La courbe **C** ci-contre représente dans ce repère une fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan^2 x$.

On note **D** la partie du plan délimitée par **C**, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$

1) a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

b) En déduire l'aire de **D**.

c) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$.

2) a) Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$

b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de **D** autour de l'axe des abscisses.



Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$

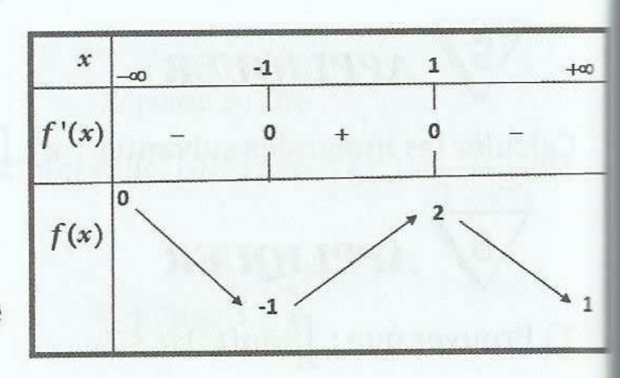
1) Montrer que F est dérivable sur IR puis calculer $F'(x)$ pour tout $x \in$ IR.

2) Soit $\varphi(x) = F(1-x) + F(x)$, $x \in$ IR.

a) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x de IR puis $\varphi(\frac{1}{2})$.

b) En déduire que le point I $(\frac{1}{2}\,;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de F.





x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	2	↘	1

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur IR telle que $f(0)=0$

On définie la fonction F qui, à tout réel x, associe

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Déterminer le sens de variation de F.

2) Montrer que : $1 \leq F(2) \leq 4$

3) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $F(x) \geq x - 1$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que la courbe représentative de g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

c) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction définie sur par $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a)Étudier les variations de *f*. En déduire que : $\dfrac{1}{2}\leq f(x)<2$, pour tout $x\in[1,2[$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans IR₊ et que : $\dfrac{1}{2}<\alpha\leq 1$.

c) Tracer la courbe (C) de *f* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Montrer que *f* réalise une bijection de IR₊sur $J=[-2,+\infty[$.

e) On note h la réciproque de *f*.

On désigne par (C′) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe (C′) de h dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit H une primitive du h sur J.

a) Montrer que $H\circ f$ est dérivable sur IR₊ et déterminer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $(a,b)\in IR_+^2$, on a $\displaystyle\int_{F(a)}^{F(b)}h(x)\,dx=\int_a^b x\,f'(x)dx$

c) Calculer alors l'aire de domaine D limitée par : (C′), $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\dfrac{1}{2}$

3) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{1}{t^2}f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer F′(x).

b) Montrer que pour tout $x\geq 1$; on a : $F(x)\leq 2-\dfrac{2}{x}$.

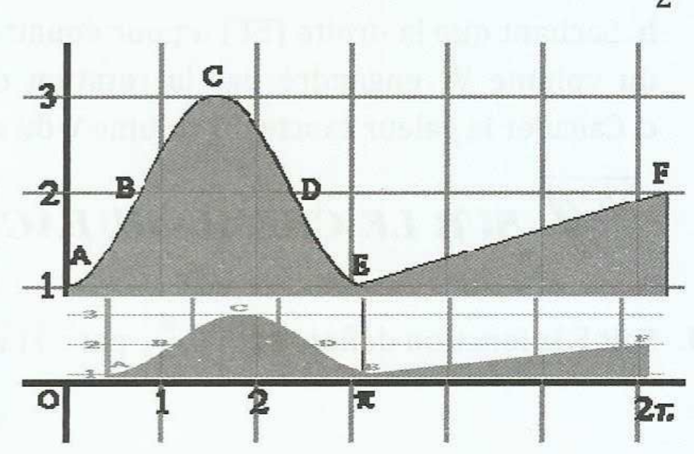
En déduire que F admet une limite finie l lorsque *x* tend vers (+∞).

c) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe (Γ) (on prend $\mathscr{L}=\dfrac{3}{2}$)



SE PERFECTIONNER

Le but de l'exercice est de calculer le volume d'une vase. Le vase est le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D colorié sur le graphique de votre sujet autour de l'axe des abscisses et vidé de son intérieur.



Le graphique a été réalisé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités 2 cm.

1. Soit $f_1(x)$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $f_1(x) = 2 - \cos 2x$.

a. Calculer $f'_1(x)$

b. Reporter le tableau ci dessous sur votre copie et le compléter pour déterminer les variations de f_1.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
2x			
$f'_1(x)$			
$f_1(x)$			

On admet que la courbe représentative de la fonction f_1 est la courbe (C_1) passant par les points A, B, C, D, E du graphique ci-dessus dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

2. Soit f_2 la fonction définie sur l'intervalle $[\pi;2\pi]$ et dont la courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est le segment de droite [EF] du graphique de votre sujet. Calculer $f_2(x)$.

3. Le domaine D colorié sur le graphique est la réunion D_1 et D_2 où :

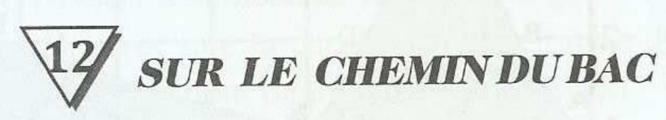
- D_1 est le domaine limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$
- D_2 est le domaine limité par le segment [EF], l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \pi$ et $x = 2\pi$.

  On rappelle que si h est une fonction dérivable et positive sur [a, b] et si E est le domaine limité par la courbe représentative de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b dans un repère orthonormé, alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses est, en unités de volume : $V = \pi\int_a^b (h(x))^2\,dx$

a. Linéariser $(\cos 2x)^2$. En déduire en cm^3 la valeur exacte du volume V_1 engendré par la rotation du domaine D_1 autour de l'axe des abscisses.

b. Sachant que la droite (EF) a pour équation $y = (1/\pi)x$, calculer en cm^3 la valeur exacte du volume V^2 engendré par la rotation du domaine D_2 autour de l'axe des abscisses.

c. Calculer la valeur exacte du volume V du vase en cm^3.



12 SUR LE CHEMIN DU BAC

I. Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

2) En déduire que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $F(x) = x$; puis calculer la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II. Pour tout n de IN, on donne la fonction f_n définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & si\ x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]. \\ 2n+2 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est bien définie et calculer u_0.

2) Montrer que pour tout n de IN, on a : $u_{n+1} - u_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. En déduire que pour tout n de IN, $u_n = 2\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

3) Calculer pour $p \in IN$, $\int_0^1 x^{2p}dx$. En déduire que pour tout n de IN, on a : $u_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$.

4) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_n - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \le \frac{2}{2n+3}$. En déduire que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$.

> **<u>N.B</u> : On donne :** $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
>
> Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$



QCM ; FAUX OU VRAI

1) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{16}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3) dx = 0$

Car $\left(x \mapsto \sin(x^3)\right)$ est impaire

3) La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;1]$ est $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Or on ne connait pas de primitive de la fonction f.

Mais on sait qu'une des réponses proposées est la bonne valeur.

La fonction f est positive sur $[0;1]$ donc la valeur de I est positive : on peut donc éliminer la réponse 1, d'autre part, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ d'après l'intégralité de la moyenne : $0 \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 1$.

Or $\frac{\pi}{2} > 1$ donc on peut exclure cette valeur,

finalement $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.



QCM ; FAUX OU VRAI

1. VRAI

Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$, dont la dérivée est continue sur cet intevalle. Si , alors : $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt = -\int_{-1}^{1} f(t)dt.$

On utilise une intégration par parties, pour calculer $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt$

On utilise une intégration par parties. Onpose :

$u(t) = t \quad u'(t) = 1$

$v'(t) = f'(t) \quad v(t) = f(t)$

Les fonctions u,u',v,v' sont continues sur $[-1;1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Si, alors : $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt = -\int_{-1}^{1} f(t)dt$

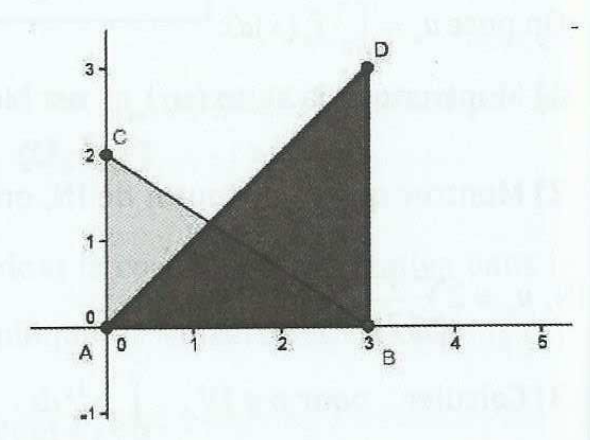
Or $f(-1) = -f(1)$ donc $f(-1) + f(1) = 0$ soit $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt = -\int_{-1}^{1} f(t)dt$

2. FAUX

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;3]$. Si $\int_0^3 f(t)dt \leq \int_0^3 g(t)dt$, alors pour tout nombre réel x appartement à $[0;3]$: $f(x) \leq g(x)$.

$\int_0^3 f(t)dt$ représente l'aire sous la courbe de f sur $[0;3]$ si f positive sur $[0;3]$.

$\int_0^3 g(t)dt$ représente l'aire sous la courbe de f sur $[0;3]$ si f positive sur $[0;3]$.



Si f est la fonction de représentation graphique le segment $[CB]$

$\forall x \in [0;3]$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

Alors

$\int f(t)dt = \left[-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_0^3 = -3 + 6 = 3 = aire(ABC)$

Si g est la fonction de représentation graphique le segment $[AD]$ $\forall x \in [0;3]$, $g(x) = x$

Alors $\int d(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2} = aire(ABD)$

On a bien $\int_0^3 f(t)dt \leq \int_0^3 d(t)dt$

Mais $f(1) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$ et $g(1) = 1$ donc $f(1) \geq g(1)$

Donc on n'a pas pour tout nombre réel x appartenant à $[0:3]$: $f(x) \leq g(x)$.



APPLIQUER

1°) Pour démontrer les inégalités demandées, le plus simple est d'étudier sur [0 ;1] les fonctions :

p(x) = f(x) – g(x) et q(x) = h(x) – f(x)

On a :

$p(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x}{2}$

$=\frac{2-2(1+x^2)+x(1+x^2)}{2(1+x^2)}$

$=\frac{-2x^2+x+x^3}{2(1+x^2)}$

$=\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}$

Quantité positive ou nulle pour $x \geq 0$. On a donc pour tout $n\in[0\,;1]$, $p(x)\geq 0$ et donc $f(x)\geq g(x)$.
De la même façon étudions q(x).

$q(x)=h(x)-f(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}$

$=\frac{2(1+x^2)-x^2(1+x^2)-2}{2(1+x^2)}$

$=\frac{x^2-x^4}{2(1+x^2)}$

$=\frac{x^2(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)}$

On a :
Pour $0\leq x\leq 1$, cette quantité est positive, donc pour tout $n\in[0\,;1]$, $q(x)\geq 0$ et donc $h(x)\geq f(x)$.
On a donc bien pour tout $n\in[0\,;1]$, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.
2°) Les bornes étant dans le bon ordre ($0<1$), les intégrales sont rangées dans le même ordre que les fonctions.
On a donc
On en tire $\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq\left[x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1$

et donc $\frac{3}{4}\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq\frac{5}{6}$.

4 APPLIQUER

a) $x\mapsto x^3\cos x$ est une fonction 2π périodique et impaire $\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^3\cos x\,dx=0$

b) $x\mapsto|x|$ est une fonction paire

$\Rightarrow\int_{-3}^{3}|x|\,dx=2\int_0^3|x|\,dx=2\int_0^3 x\,dx=\left[x^2\right]_0^3=9$

c) $x\mapsto\sin 2x$ est une fonction π périodique et impaire

$\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin 2x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}+\pi}\sin 2x\,dx=\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0$

d) $x\mapsto|\cos x|$ est une fonction π périodique et paire $\Rightarrow$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{2}}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$

5 APPLIQUER

a) On pose $u(x)=x$ et

$v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=2\sqrt{x+1}$

Les fonctions u, u', v, v' sont continues sur [0 ; 1]. La formule d'intégration par parties donne :

$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{2}}dx.$

Ainsi

$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$

b) On pose $u(x)=x+2$ et $v'(x)=\sin x$ .Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=-\cos x$.

Les fonctions *u, u', v, v'* sont continues sur [1 ; 2]. La formule d'intégration par parties donne

$\int_1^2(x+2)\sin x\,dx=[-(x+2)\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

Ainsi

$\int_1^2(x+2)\sin x\,dx=[-(x+2)\cos x]_0^{\pi}+[\sin x]_0^{\pi}=\pi+4$

6 APPLIQUER

Dans les deux cas, les fonctions considérées sont continues sur IR, donc intégrables sur l'intervalle d'intégration.

1) Puisque $0\leq\sin(t^2)\leq 1$, alors

$\int_1^3\sin(t^2)\,dt\leq\int_1^3 1dt$. Or $\int_1^3 1dt=1(3-1)=2$, donc $\int_1^3\sin(t^2)\,dt\leq 2$.

2) Puisque $0\leq x\leq 1$, alors : $0\leq\frac{x}{1+x^2}\leq x\leq 1$.

D'où $0\leq\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\leq\int_0^1 1dx$. Or

$\int_0^1 1\,dx = 1$ donc $0 \le \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \le 1$.

7 S'ENTRAINER

1°) a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x + 1 - 1\,dx = \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

$$= \tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$$

b)A (D) = $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

($x \longmapsto$ tg x est une fonction paire)

$\Rightarrow$**A (D)**= $2(1 - \frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) $m = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \boxed{m = \frac{4}{\pi} - 1}$ ua.

2°)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,(f(x)+1)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1)\tan^2 x\,dx = \left[\frac{\tan^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}$$

$(\int u'u^2 = \frac{u^3}{3})$

b)v= $\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx$

(f est une fonction paire).$\Rightarrow$

$$\mathbf{v} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) + f(x) - f(x)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) + f(x)\,dx - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$

$$= 2\pi\frac{1}{3} - 2\pi(1 - \frac{\pi}{4})$$

$\Rightarrow$**v**= $\boxed{-\frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{2}}$ uv.

8 S'ENTRAINER

1)$t^2 - t + 1 > 0$ car $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$(t \mapsto t^2 - t + 1)$ est une fonction polynôme continue et strictement positive sur IR donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$ est continue sur IR ainsi F est dérivable sur IR et pour tout de IR on a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

2) a)$\varphi(x) = F(1-x) + F(x)$, $\varphi'(x) = -F'(1-x) + F'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2 - (1-x) + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x + x^2 - 1 + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Ainsi , $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{2}) = 2F(\frac{1}{2})$

or $F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} = 0$ donc $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

b) $\varphi'(x) = 0$ donc $\varphi(x) = c$ où $c \in$ IR pour tout $x \in$ IR or $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

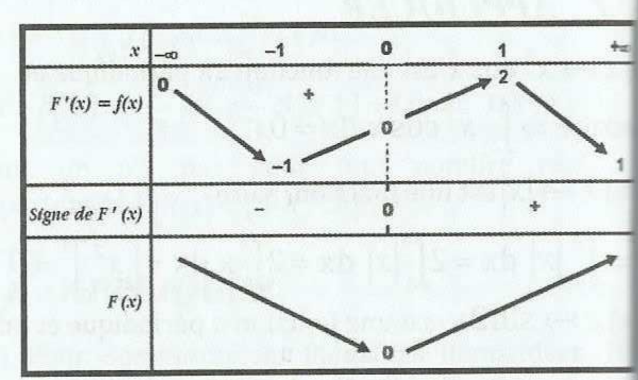
donc $c = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$ ainsi pour tout $x \in D_f$= IR on a $(1-x) \in D_f$ et $F(1-x) + F(x) = 0$

donc $I(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

9 S'ENTRAINER

1)$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

F la primitive de f qui s'annule en $0 \Rightarrow F' = f$



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	2	↘	1
Signe de $F'(x)$		−			0		+		
$F(x)$		↘			0		↗		

2)$F(2) = \int_0^2 f(t)\,dt$; $0 \le t \le 2 \Rightarrow 0 \le t \le 1$ ou $1 \le t \le 2$

$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 2$ ou $1 \leq f(t) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 2$

$\Rightarrow \int_0^2 0\,dt \leq \int_0^2 f(t)\,dt \leq \int_0^2 2\,dt \Rightarrow 0 \leq F(2) \leq 4$

3) Pour tout $x \geq 1$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t).dt$;

$0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq f(t)$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f(t)\,dt$ **(1)**

$1 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq f(t)$

$\Rightarrow \int_1^x dt \leq \int_1^x f(t)\,dt$ **(2)** .**(1)** et **(2)**

$\Rightarrow \int_1^x dt = x-1 \leq \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

D'où $x-1 \leq F(x)$. $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

4) Pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

a) $(x \mapsto x^2)$ est dérivable sur IR et f est continue sur IR donc g est dérivable sur IR_+

Pour tout $x \in IR_+$, $g'(x) = 2x.f(x^2) \geq 0$. Or $0 \leq x^2$

$\Rightarrow 0 \leq f(x^2)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^2} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x^2) = +\infty$

x	0	$+\infty$
g'(x)	0	+
g (x)	0 ↗	$+\infty$

b) pour tout $x \geq 1$ on a : $x-1 \leq F(x) \Rightarrow x^2-1 \leq F(x^2)$ $\Rightarrow$

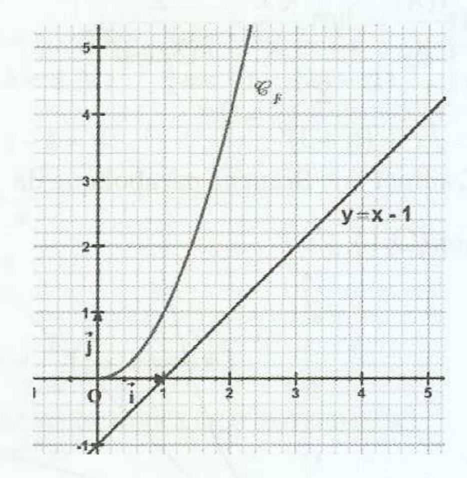
$\frac{x^2-1}{x} \leq \frac{F(x^2)}{x}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} \leq \frac{g(x)}{x}$. $\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{2}) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = +\infty$

D'où la courbe de g admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage $+\infty$.

c)



10 SE PERFECTIONNER

1) a) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\frac{2}{(x+1)^2}+2}{x}$

$= \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x(x+1)^2} + \frac{2}{x}$

$= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x} = +\infty$

Donc C admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

b) Pour tout $x \in IR_+^*$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\times2(x+1)}{(x+1)^4}$

$\left(\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}\right)$ $\quad = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{(x+1)^3} > 0$

On a $0 \leq x \leq 2$ est strictement croissante

Donc $1-\frac{2}{4} \leq f(x) \leq \sqrt{2}-\frac{2}{9}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$

b) f est continue et strictement croissante sur IR_+ et $f(IR_+) = [-2,+\infty[$, Or $0 \in [-2,+\infty[$

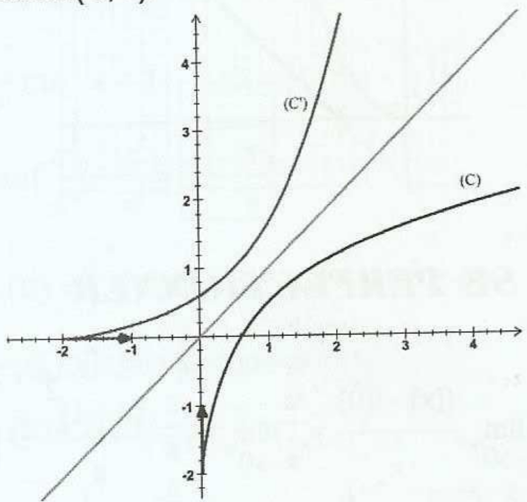
Donc f(x)=0 admet une unique solution α dans IR_+, de plus

$\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}) \simeq -0,18 < 0 \\ f(1) = \frac{1}{2} > \end{array}\right\}$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{x(x+1)^2}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{(x+1)^2}=0$

Donc C admet une Branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.



d) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)=[-2,+\infty[=J$

e) $e'=S_\Delta(C)$ avec Δ : y=x

et

f admet une demi tangente verticale à droite en 0.

⇨h admet une demi tangente horizontal à droite en 0.

* f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de +∞.

⇨h admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de +∞.

2) a) f est dérivable sur IR_+^* et $f(IR_+^*)=]-2,+\infty[$

H est dérivable sur J car H une primitive de h sur J :

Or $]-2,+\infty[\subset J$

donc H∘f est dérivable sur IR_+^*, et pour tout

$x\in IR_+^*$ $(H\circ f)=f'(x)\times H'(f(x))$

$=f'(x)\times h(f(x))$

$=x.f'(x)$

$=\frac{x}{2\sqrt{x}}+\frac{4x}{(x+1)^3}$

b) $\int_{f(a)}^{f(b)}h(x)dx=[H(x)]_{f(a)}^{f(b)}$

$=H\circ f(b)-H\circ f(a)$

$=[H\circ f(x)]_a^b=\int_a^b xf'(x)dx$

c) C′ est au dessus de L'axe $(O,\vec{i})$ sur $[-2,+\infty[$

donc $A=\int_0^{\frac{1}{2}}h(x)dx=\int_{f(\alpha)}^{f(1)}h(x)dx=\int_\alpha^1 x.f'(x)dx$

On pose $u(x)=x\longrightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=f'(x)\longrightarrow v(x)=f(x)$

Donc $A=[x.f(x)]_\alpha^1-\int_\alpha^1 f(x)dx$

$=f(1)-0-\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{(x+1)}\right]_\alpha^1$

$=f(1)-\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{2}{(\alpha+1)}$

$=\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{2}{(\alpha+1)}$

$A=-\frac{6}{7}+\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{2}{(\alpha+1)}$ ua

3) $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{1}{t^2}f(t)dt$

a) $t\to\frac{1}{t^2}$ est continue sur IR* en particulier sur IR_+^*

$t\to f(t)$ est continue sur IR₊ n particulier sur IR_+^*

Donc $t\to\frac{1}{t^2}f(t)$ est continue sur IR_+^*

$x\to x^2$ est dérivable sur IR en particulier sur $[1,+\infty[\subset IR_+^*$ et $1\in[1,+\infty[$.

Donc F est dérivable sur $[1,+\infty[$

et pour tout $x\in[1,+\infty[$, $F'(x)=(x^2)'.\frac{1}{(x^2)^2}f(x^2)$

$\Rightarrow F'(x)=2x.\frac{1}{(x^2)^4}(\sqrt{x^2}-\frac{2}{(x^2+1)^2})f(x^2)$

$=\frac{2}{x^3}(x-\frac{2}{(x^2+1)})=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3(x^2+1)^2}$

b) et pour tout $t\in[1,+\infty[$, $F'(t)\le\frac{2}{t^2}$

donc $\int_1^{x^2}F'(t)dt\le\int_1^{x^2}\frac{2}{t^2}dt$

donc $F(t)\le\left[-\frac{2}{t^2}\right]_1^{x^2}=-\frac{2}{x^2}+2$

donc pour tout $x\in[1,+\infty[$, $F(x)\le 2-\frac{2}{x^2}$

on a $F(x) \leq 2$ donc F est majorée par 2 et pour tout $t \in [1,+\infty[$

$x^2 \leq x^3(x^2+1)^2$ sig $\dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{x^3(x^2+1)^2}$ sig

$\dfrac{2}{x^2} \geq \dfrac{2}{x^3(x^2+1)^2}$

Sig $F'(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3(x^2+1)^2} \geq 0$

Donc F est croissante et majorée par 2
Donc F admet une limite finie L



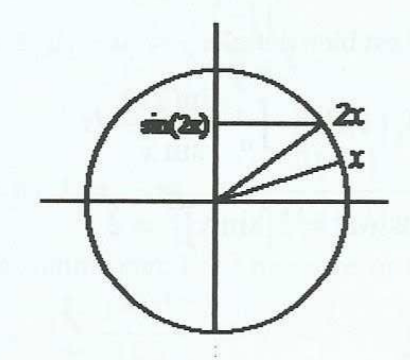
SE PERFECTIONNER

1. a.

$f_1(x) = 2 - \cos(2x)$

$f_1'(x) = 2\sin(2x)$

1. b.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
2x		π	2π
$f_1'(x)$	+	0	−
$f_1(x)$	1 ↗	3	↘ 1

$f_1(0) = 2 - \cos 2x = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$

$f_1(\pi/2) = 2 - \cos \pi = 2 - (-1) = 3$

$f_1(\pi) = 2 - \cos 2\pi = 2 - 1 = 1$

2. f_2 la fonction définie sur l'intervalle $[\pi ; 2\pi]$ est une fonction affine puisque sa représentation est un segment donc $f_2(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels à déterminer les points E et F de coordonnées $(\pi ; 1)$ et $(2\pi ; 2)$ appartiennent à cette droite donc :$f_2(\pi) = a\pi + b = 1$

$f_2(\pi) = a2\pi + b = 2$

les nombres réels a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a\pi + b = 1 & (1) \\ 2a\pi + b = 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\pi + b = 1 \\ a\pi = 1 & (2)-(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a\pi \\ a = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 1 = 0 \\ a = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

$f_2(x) = \frac{1}{\pi}x$

3. a.

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

<u>(On utilise les formules de trigonométrie)</u>

$$V_1 = \pi\int_0^\pi (f_1(x))^2 dx$$
$$= \pi\int_0^\pi (2 - \cos 2x)^2 dx$$
$$= \pi\int_0^\pi (4 - 4\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$
$$= \pi\int_0^\pi \left(4 - 4\cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)dx$$
$$= \pi\left[4x - 2\sin 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right]_0^\pi$$
$$-\pi\left[4\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \left(4\times 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right)\right]$$
$$= \pi\left[4\pi + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{9\pi^2}{2}u.v = \frac{9\pi^2}{2}\times 8\text{ cm}^3 = 36\pi^2\text{ cm}^3$$

3. b.

$$V_2 = \pi\int_\pi^{2\pi} (f_2(x))^2 dx = \pi\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}x\right)^2 dx = \pi\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{\pi^2}x^2 dx$$

$$= \pi\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{3\pi}\left[8\pi^3 - \pi^3\right] = \frac{1}{3\pi}\left[7\pi^3\right] = \frac{7\pi^2}{3}u.v$$

$$= \frac{7\pi^2}{3}\times 8\text{ cm}^3 = \frac{56\pi^2}{3}\text{ cm}^3$$

3.c.

$$V = 36\pi^2 + \frac{56\pi^2}{3} = \frac{108\pi^2}{3} + \frac{56\pi^2}{3} = \frac{164\pi^2}{3}cm^3$$



SUR LE CHEMIN DU BAC

I. $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1. Soit $\left(\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\right)$

φ est continue sur IR donc φ admet au moins une primitive G sur IR.

F(x) = G(tanx) – G(0)

$$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \tan x\right) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ G \text{ est dérivable sur IR} \\ u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[\subset IR \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = G \circ u - G(0) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Et on a :

$$F'(x) = \left(1 + \tan^2 x\right) \times \varphi(\tan x)$$

$$= \left(1 + \tan^2 x\right) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1 ,$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

2. $F'(x) = 1$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow F(x) = x + c$,

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, or $F(0) = \int_0^0 \varphi(t)dt = 0 \Rightarrow c = 0.$

$\Rightarrow F(x) = x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et par suite

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

II. $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & si \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2n+2 & si \ x = 0 \end{cases}$

On pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

1. Pour que la suite (u_n) soit bien définie, il faut que la fonction f_n soit continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

➡ Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $f_n(x) = \dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$

$(x \mapsto \sin(2(n+1)x))$ est continue sur IR en particulier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$(x \mapsto \sin x)$ est continue et non nulle sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow f_n$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

➡ $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\sin(2(n+1)x)}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = 2(n+1)$$

$$= 2n + 2 = f_n(0)$$

$\Rightarrow f_n$ est continue à droite en 0

Ainsi f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et par suite la suite (u_n) est bien définie.

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

2.

➡

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n+1}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2(n+2)x) - \sin(2(n+1)x)}{\sin x}dx$$

Or $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$$\frac{\sin(2(n+2)x) - \sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\sin(x)\cos((2n+3)x)}{\sin x}$$

$$= 2\cos((2n+3)x)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+3)x)dx$$

$$=\frac{2}{2n+3}\left[\sin\left((2n+3)x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{2n+3}\left[\sin\left((2n+3)\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{2n+3}\sin\left((n+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

➡ $u_{k+1}-u_k=\dfrac{2(-1)^{k+1}}{2k+3},\ \forall\ k\in IN$

Pour k = 0, $u_1-u_0=\dfrac{2(-1)^1}{3}$

Pour k = 1, $u_2-u_1=\dfrac{2(-1)^2}{2\times 2+3}$

⋮

Pour k = n − 1, $u_n-u_{n-1}=\dfrac{2(-1)^n}{2\times(n-1)+3}$

On fait la somme membre à membre, on obtient :

$$u_n-u_0=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+3}\Rightarrow u_n=2+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+3}$$

$$\underset{\text{On pose } p=k+1}{=}2+2\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}=2\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^{2p}dx=\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^1=\frac{1}{2p+1}$

$$u_n=2\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2p+1}=$$

$$2\sum_{p=0}^{n}\int_0^1(-1)^p x^{2p}dx=2\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-1)^p x^{2p}dx$$

$$=2\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-x^2)^p dx=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$N.B:\sum_{p=0}^{n}(-x^2)^p=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$$

4. $\displaystyle\left|u_n-2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|$

$$=\left|2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx-2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|$$

$$=\left|2(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right|$$

$$=\underbrace{2\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx}_{\geq 0}\underset{\text{Car }\frac{1}{1+x^2}\leq 1}{\leq}2\int_0^1 x^{2n+2}dx=\frac{2}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2n+3}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Logarithme Népérien

I) Résumé du cours :

A) Définition - Propriétés

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive de la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur]0, + ∞[qui s'annule en 1

On notera $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \ln(x)$

Conséquences

- Pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$
- ln 1 = 0 et ln e = 1 où $e \approx 2.718281828459$.......
- $x \in]0;+\infty[$ et $y = \ln(x) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ et $e^y = x$
- La fonction logarithme népérien est une bijection de]0 ; +∞[dans IR.

B) Equation fonctionnelle caractéristique

Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs on a : $\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$

Conséquence

Pour tous réels a et b strictement positifs on a : $\boxed{\ln\frac{1}{a} = -\ln a \ ;\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \ ;\ \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$

Propriété

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^*$), alors $\boxed{\ln(a_1.a_2.\cdots.a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}$

C) Étude de la fonction logarithme népérien

1) Propriétés

- La fonction ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[
- Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$
- La fonction ln est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.
- Résolutions d'équations et d'inéquations

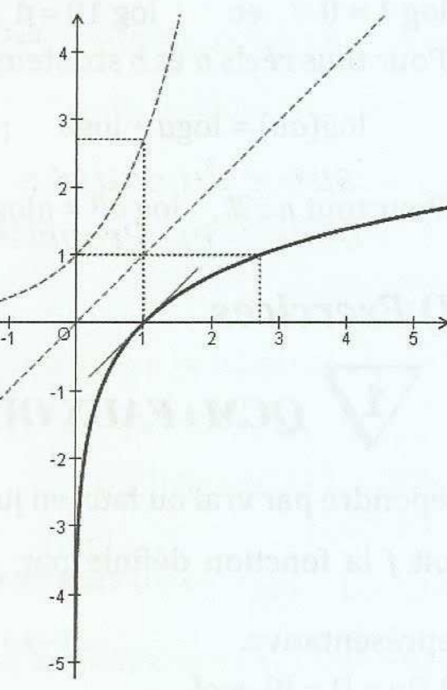
Comme ln réalise une bijection croissante de]0;+∞[sur $\mathbb{R}$

Pour tous réels a et b strictement positifs, $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

Pour tous réels a et b strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

2) Courbe représentative

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$



La courbe C de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy)

La courbe a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T d'équation $y = x - 1$

3) Autres limites

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m (\ln x)^n = 0$ où m et n sont deux entiers naturels non nuls

(Au voisinage de l'infini x l'emporte sur le logarithme népérien de x).

Interprétation graphique :

On dit que la courbe a pour direction asymptotique l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

4) Dérivée de ln o u

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction ln o u qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a : $(\ln o\, u)' = \dfrac{u'}{u}$

D) Logarithme décimal

Remarque

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)

Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\log :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Propriétés

- $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$;
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad ; \quad \log\frac{1}{a} = -\log a \quad ; \quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b \quad ; \quad \log\sqrt{a} = \frac{1}{2}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = n\log a$

II) Exercices



1 QCM ; FAUX OU VRAI

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

a) On a D = $]0, +\infty[$.

b) La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.

c) Pour tout $x \in$ D, on a : $f(x)<\frac{x}{2}$.

d) Pour tout $x \in$ D, on a : $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x(\ln x)^2}$.

2 APPLIQUER (Primitives et ln)

1) Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$ sur $]0 ; 3[$.

2) a) Déterminer toutes les primitives de la fonction h définie par : $h(x)=\frac{4x}{(3x^2+2)^3}$.

b) Déterminer la primitive de h qui s'annule en 10.

4) Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes qui réponde à la condition posée :

a) $f(x)=\frac{x+0,5}{x^2+x+1}$ et $F(1) = 0$.

b) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x.\cos x}$ et $F(2) = 1$.

4) Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

5) Trouver une primitive de la fonction définie par : $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$.

6) a) Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

En déduire l'ensemble des primitives F de f.

b) Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

3 APPLIQUER (Résolution (in)équations)

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2-3x-2)=\ln(2x-6)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} \ln x-\ln y=1 \\ x+y=2e \end{cases}$.

3. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x)-\ln(1-x)>\ln 2x-\ln(1+x)$.

4 S'ENTRAINER

1) La fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.

En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.

2) La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$.

a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X=\sqrt{x}$).

b) Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.

3) Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. construire C et Δ.

5 S'ENTRAINER (Dérivation et encadrement)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1) On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0.

1) a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

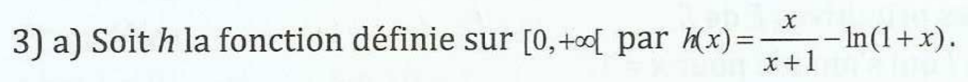
Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: $\ln(1+x)\le\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b) Par une étude analogue, montrer que si $x\ge 0$, alors $\ln(1+x)\ge x-\dfrac{x^2}{2}$.

c) Établir que pour tout x strictement positif on a $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$



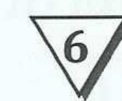

3) a) Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d) On désigne par C la représentation graphique de f. Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C.



6 S'ENTRAINER (Logarithme+primitive)

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et d'en déterminer une primitive.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0{,}72\,;-0{,}71]$.

3) Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1\,;+\infty\,[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D=]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty\,[$ par : $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.

a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Sens de variation de g

a) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b) Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha\approx-0{,}715$.

3) Tableau et représentation graphique de g.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

4) Calcul d'une primitive de g :

Soit h la fonction définie sur D par : $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Déterminer des fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h.

b) Après avoir vérifié que $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.

c) Déduire des questions précédentes, une primitive de g.



7 S'ENTRAINER (Etude d'une fonction logarithme)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1) Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2) Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Déterminer la limite de g en 0.

3) Dresser le tableau des variations de g.

4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0,5<\alpha<0,6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie B : Etude de la fonction f

1) a) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X=\frac{1}{x^2}$).

b) En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x)=g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

2) Etude de f en 0

a) Montrer que $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs suprieures. Que peut-on en conclure ?

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Préciser la tangente à la courbe de f au point O.

3) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

4) Donner l'allure de (C).



SE PERFECTIONNER (Logarithme+ asymptote+primitives)

Soit la fonction définie sur l'intervalle I =]4 ; +∞ [par : $f(x) = -2x + 5 + 3\ln\frac{x+1}{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1) Étude de f

a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I.

b) Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négatif et dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2) Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3) Déterminer les coordonnées du point de (C) où la tangente Δ a un coefficient directeur égal à $-\frac{9}{2}$

Donner une équation de Δ et la tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

4) Calcul d'aire

a) Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur]0 ; +∞ [de la fonction $x \mapsto \ln x$.

b) Montrer que la fonction $G : x \to (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.

c) Montrer que la fonction $H : x \to (x+4)\ln(x+4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x+4)$ sur I.

d) Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5) Intersection de (C) et de l'axe des abscisses

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution, notée x_0.

b) Déterminer graphiquement un encadrement de x_0 d'amplitude 0,5.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}. On explicitera la méthode employée.



SE PERFECTIONNER

Soit k un réel tel que : $0 < k < 1$. On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (1+k^n)\, u_n \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Calculer, en fonction de k, u_2, u_3.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ on a : $u_n = (1+k)(1+k^2)....(1+k^{n-1})$.

3) On pose maintenant : $v_n = \ln(u_n)$, $\forall\, n \geq 2$

a) Démontrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$

b) En déduire que la suite (v_n) est majorée par : $\frac{k}{1-k}$

c) Montrer que la suite u est majorée. Étudier son sens de variation et en déduire sa convergence.



SE PERFECTIONNER

1. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5\ln x}{x}$.

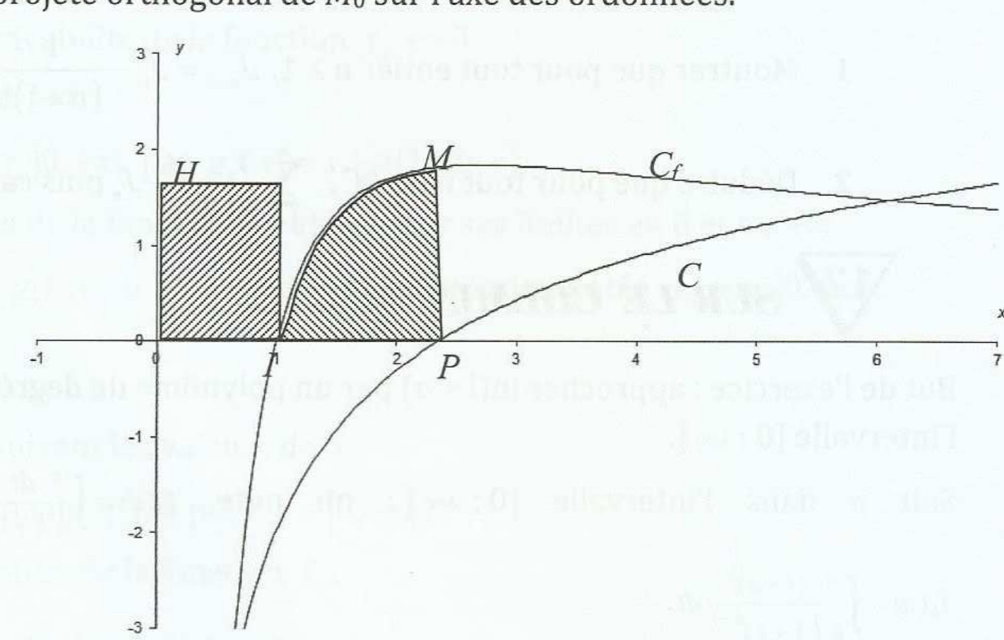
a) Démontrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b) Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,dt$ en fonction de a.

3) On a tracé dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g). On appelle I le point de coordonnées $(1;0)$, P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme D_1 le domaine plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$. On nomme D_2 le domaine plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.





SE PERFECTIONNER

I. Soit f la fonction définie sur]0, + ∞[par $f(x)=(1-\ln x)^2$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. a) Soit g la restriction de f à l'intervalle [e, + ∞[.
Montrer que g réalise une bijection de [e, + ∞[sur [0, + ∞[.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ $g^{-1}(x)=e^{1+\sqrt{x}}$.
3. Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C') de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_1^e (1-\ln t)^n\,dt$.

1. Calculer I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$.
3. On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et e.
Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe (C) autour de l'axe $(O,\vec{i})$. Calculer V.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{n}$. En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers + ∞.

III. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $J_n=\frac{I_n}{n!}$.

1. Montrer que pour tout entier n ≥ 1, $J_{n+1}=J_n-\frac{1}{(n+1)!}$.
2. Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-J_n$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.



SUR LE CHEMIN DU BAC

But de l'exercice : approcher ln(l + *a*) par un polynôme de degré 5 lorsque *a* appartient à l'intervalle [0 ; +∞ [.

Soit *a* dans l'intervalle [0 ; +∞ [; on note $I_0(a)=\int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a)=\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,dt$.

1) Calculez $I_0(a)$ en fonction de *a*.

2) A l'aide d'une intégration par partie, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.

3) A l'aide d'une intégration par partie, démontrez que $I_{k+1}(a)=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

4) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$. Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a)=\ln(1+a)-P(a)$.

5) Soit $J(a)=\int_0^a (t-a)^5\,dt$. Calculez $J(a)$.

6) a) Démontrez que pour tout $t\in[0\,;a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\geq(t-a)^5$.

b) Démontrez que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$, $J(a)\leq I_5(a)\leq 0$.

7) En déduire que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$, $|\ln(1+a)-P(a)|\leq\frac{a^6}{6}$.

8) Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.



13 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A : On se propose d'étudier la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{x\ln x}{x+n}\quad si\ x>0\ \text{ et }\ f_n(0)=0.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 5 cm)

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n en 0.
2. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
3. Soit g_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g_n(x)=x+n(1+\ln x)$.
   a) Etudier le sens de variation de la fonction g_n et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
   b) Démontrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une unique solution notée α_n sur $]0,+\infty[$.
   c) Montrer que $\frac{1}{e^2}<\alpha_n<\frac{1}{e}$.
   d) Donner le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.
4. a) Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $g_n(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f_n.
   c) Vérifier que $f_n(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\alpha_n)$.

5. a) Etudier les positions relatives des courbes C_{n+1} et C_n .

b) Tracer dans le même repère C_1 et C_2 . (On prendra $\alpha_1 \simeq 0.28$ et $\alpha_2 \simeq 0.31$).

Partie B : On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $F_n(x)=\int_x^1 f_n(t)dt$.

1. Montrer que la fonction F_n est continue sur $[0,1]$.

On définit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n=F_n(0)=\int_0^1 f_n(t)dt$. On se propose dans la suite d'étudier la convergence de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

2. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in]0,1]$, $I_n(x)=\frac{1}{n}\int_x^1 t\ln t dt$ et $J_n(x)=\frac{1}{n^2}\int_x^1 t^2\ln t dt$.

Calculer en fonction de n et x chacune des intégrales $I_n(x)$ et $J_n(x)$.

3. a) Montrer que pour tout réel $t\in[0,1]$, on a : $\frac{1}{n}-\frac{t}{n^2}\le\frac{1}{t+n}\le\frac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in]0,1]$, on a : $I_n(x)\le F_n(x)\le I_n(x)-J_n(x)$.

c) Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $-\frac{1}{4n}\le u_n\le -\frac{1}{4n}+\frac{1}{9n^2}$.

En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

d) Donner un encadrement de A_1 l'aire de la partie du plan limitée par les axes du repère et la courbe C_1 .

4. a) Montrer que pour tout entier $k\ge 1$, $\frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\le 1+\ln n$.

5. a) Vérifier que pour tout entier $k\ge 2$, $\frac{1}{k^2}\le\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}\le 2-\frac{1}{n}$.

6. Déduire des questions précédentes un encadrement de S_n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

14 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session principale 2012)

I) On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x)=x^2-\ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

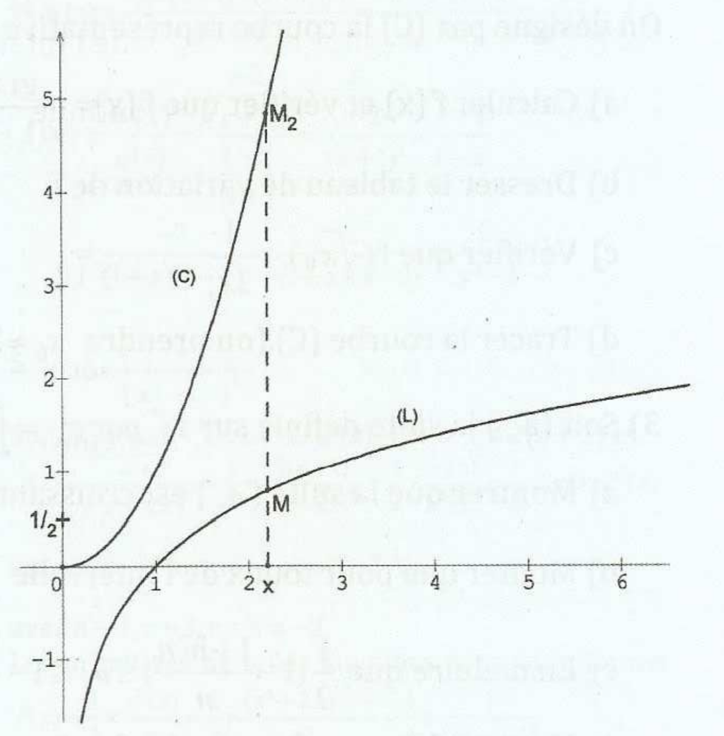
1)

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2

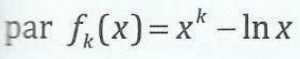
2) sur la figure ci contre on a tracé, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$



a) Soit x>0. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$

b) Construite alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisse respectives 2, $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



II) 1) Soit k un entier supérieur ou égale à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$

a) Déterminer f_k' la fonction dérivé de f_k

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égale à $\frac{1+\ln k}{k}$

c) Pour tout réel x>0, on considère de la distance MM_k

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ est en déduire la limite de (u_k)

b) Soit $A(1,0)$ et $A(1,0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$



15 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session de contrôle 2012)

1) soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x)= 1+x-x ln x

a) Etudier les variations de g

b) En déduire que l'équation g(x)=0 admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$

Vérifier que 3,5< x_0 <3,6

c) En déduire le signe de g

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)=$\frac{\ln x}{1+x^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Calculer f'(x) et vérifier que f'(x)=$\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0})=\frac{1}{2x_0}$

d) Tracer la courbe (C).(on prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ $par\ a_n=\int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt$

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante

b) Monter que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$

c) En déduire que $\frac{1}{2}(1-\frac{1+\ln n}{n}) \leq a_n \leq 1-\frac{1+\ln n}{n}$

d) Monter alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$

1 QCM ; FAUX OU VRAI

a. Faux : On doit avoir $\sqrt{x} \neq 1$ et $x>0$ donc $D =]0,\, 1[\cup]1,\, +\infty[$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0$ donc $y = \frac{x}{2}$ est asymptote de C.

c. Faux : $f(x) < \frac{x}{2}$ si $-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})} < 0$, soit $\ln(\sqrt{x}) > 0$ donc quand $\sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$.

d. Vrai : Rappelons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u}$ et remarquons que $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$; nous avons donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1/x}{(\ln x)^2}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right).$$

2 APPLIQUER

1. $f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = \frac{3+x}{3-x}$ $u'(x) = \frac{1\times(3-x)-(-1)\times(3+x)}{(3-x)^2}$

$$= \frac{3-x+3+x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

d'où $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}}$

$$= \frac{6}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{3+x} = \frac{6}{(3-x)(3+x)}.$$

2. a. $h(x) = \frac{4x}{(3x^2+2)^3} = \frac{4}{6} \times \frac{6x}{(3x^2+2)^3}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{3} u'(x) u(x)^{-3}$ avec $u(x) = 3x^2+2$ et

$n-1 = -3 \Rightarrow n = -2$.

$$H(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u(x)^{-2}}{-2} + K = -\frac{1}{3u(x)^2} + K = -\frac{1}{3(3x^2+2)^2} + K$$

(K réel).

b. $H(10) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3(3\times10^2+2)^2} + K = 0 \Leftrightarrow K = \frac{1}{3\times302^2} = \frac{1}{273612}$

d'où $H(x) = -\frac{1}{3(3x^2+2)^2} + \frac{1}{273612}$.

4. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$:

$f(x) = \ln(\, u(x)\,)$ avec $u(x) = \frac{1-x}{x+1}$

et $u'(x) = \frac{-1\times(x+1)-(1-x)\times1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-1+x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$;

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{\frac{1-x}{x+1}} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{1-x}.$$

$$= \frac{-2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{(1+x)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

5. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$.

Soit $u(x) = x^2 + 2x$, on a : $u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$ et

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u^3(x)} = \frac{1}{2} u'(x) \times u^{-3}(x)$$

qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) \times u^{n-1}(x)$

avec $n - 1 = -3$, ou $n = -2$.

Les primitives de telles fonctions sont de la forme:

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^n(x)}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+2x)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(x^2+2x)^2}$$

(+ constante...).

6. a. Dérivons $u(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$,

$u'(x) = \frac{1}{2} . 2 . \frac{1}{x} . \ln x = \frac{\ln x}{x}$ donc u est bien une primitive de $\frac{\ln x}{x}$.

Toutes les primitives sont alors de la forme $u(x)+K$.

b. $u(1) + K = 0 \Leftrightarrow K = -u(1) = -\frac{(\ln 1)^2}{2} = 0$

3 APPLIQUER

1. Domaine de définition :

$D_1 = \left]-\infty\,;\, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;\, +\infty\right[$, par ailleurs $2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On a donc $D_f = D_1 \cap]3\,;+\infty[= \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;\, +\infty\right[$ car $\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56$.

Pour la résolution : $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ donc, l'équation devient : $x^2 - 3x - 2 = 2x - 6$ ou encore $x^2 - 5x + 4 = 0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais seule 4 est valable.

2.

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \dfrac{x}{y} = \ln e \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ ye + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2e}{1+e} \\ x = \dfrac{2e^2}{1+e} \end{cases}$$

Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

3. Attention à l'ensemble de définition : $1+x>0, 1-x>0, 2x>0 \Rightarrow x>-1, x<1, x>0 \Rightarrow x \in \left]0\,;1\right[$

On a alors $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{2x}{1+x} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur]0 ; 1[, la solution est donc l'intervalle]0 ; 1[.



4 APPLIQUER

1. $g'(x) = 2\sqrt{x} + 2x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3\dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{4x+2x}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x} = 3\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

On a alors $x^2 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^4 \geq x \Leftrightarrow x(x^3-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ car x est positif.

Conclusion g est décroissante avant 1, croissante après ; on a un minimum en 1 qui vaut $g(1)=2+0+6=8$ et est positif. Finalement $g(x)$ est toujours positive.

2. $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

a. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, si on pose $X = \sqrt{x}$, cela nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X^2}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2\dfrac{\ln X}{X} = 0$.

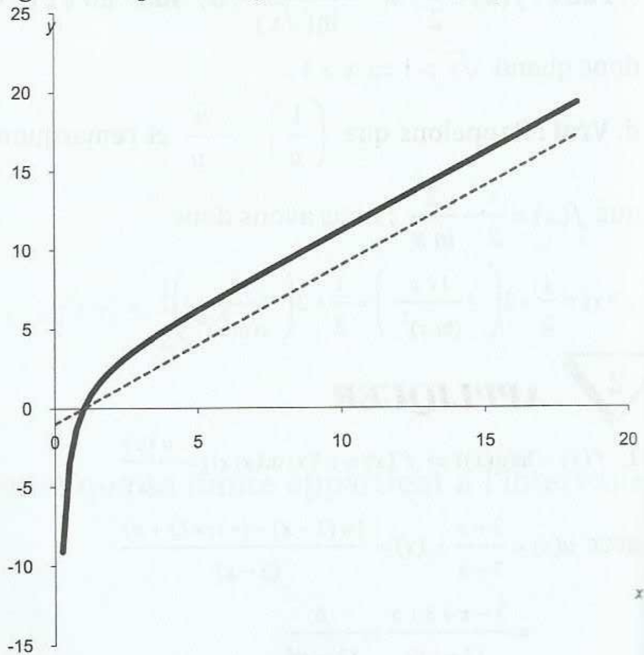
En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\infty$ ainsi que f.

b. $f'(x) = 3\dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} + 1 = 3\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} + \dfrac{x}{x}$

$= \dfrac{\frac{3(2-\ln x)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{6-3\ln x + 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

Donc f' est du signe de g et donc toujours positive, f est donc croissante.

3. On a $f(x)-(x-1) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 à l'infini et qui est positif (C au-dessus de Δ) lorsque $x>1$, négatif lorsque $x<1$ (C en dessous de Δ).



5 S'ENTRAINER

1. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$, or le cours donne justement la limite $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. a. $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right)$

$= \dfrac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x} = \dfrac{-x^3}{1+x} \leq 0$. Donc g est décroissante et comme $g(0)=0$, on a également $g(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. On prend $k(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow k'(x)$

$=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$ et $k(0)=0$

donc $k(x)\geq 0$, soit $\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$.

c. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq \ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq \ln(1+x)-x\geq -\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\geq\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}$.

f dérivable en zéro : on calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$;

or le résultat précédent montre que cette limite est précisément $-\frac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

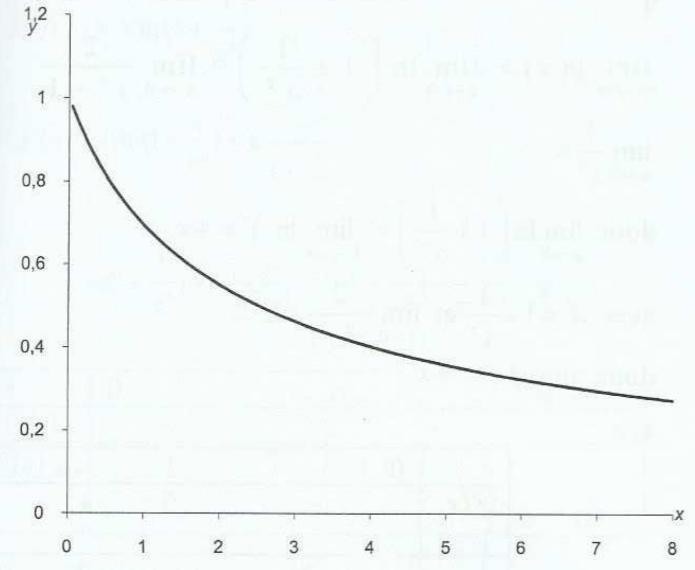
3. a. $h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$,

$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}\leq 0$; on a

$h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x)\leq 0$.

b. $f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}\leq 0$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\sim\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.



6 S'ENTRAINER

Partie A

$f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$, $D_f=]-1\,;+\infty[$.

1) f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : en effet, $u:x\mapsto\frac{x}{x+1}$ est dérivable sur D_f et $v:x\mapsto x+1=y\mapsto -2\ln y$ est dérivable sur D_f.

$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-2\frac{1}{x+1}=\frac{1-2(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{-2x-1}{(x+1)^2}$.

2) $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow -2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$f(-1/2)$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>1}}\frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{X\to 0}X\ln X=0^-$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln(x+1)=-\infty$.

$f(-1/2)=\frac{-1/2}{1/2}-2\ln\frac{1}{2}=-1+2\ln 2\approx 0{,}39$, $f(0)=0$.

3) f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;\,-1/2[$ et $f(x)$ change de signe sur cet intervalle ; il existe donc un nombre α de $]-1\,;\,-1/2[$ tel que $f(\alpha)=0$.

$f(-0{,}71)\approx 0{,}027$ et $f(-0{,}72)\approx -0{,}025$

donc $-0{,}72<\alpha<-0{,}71$.

Signe de $f(x)$:

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−

Partie B $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$, $D=]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

1. a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{x}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -1}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\times\frac{x+1}{x^2}=0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$.

2. a.

$g'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\times x^2-\ln(x+1)\times 2x}{x^4}=\frac{\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^3}=\frac{f(x)}{x^3}$

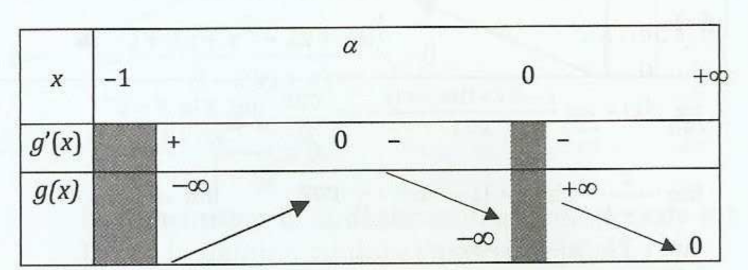
x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
x^3		$-$		$-$		$+$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$

b. $g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$; or on sait que $f(\alpha)=0$

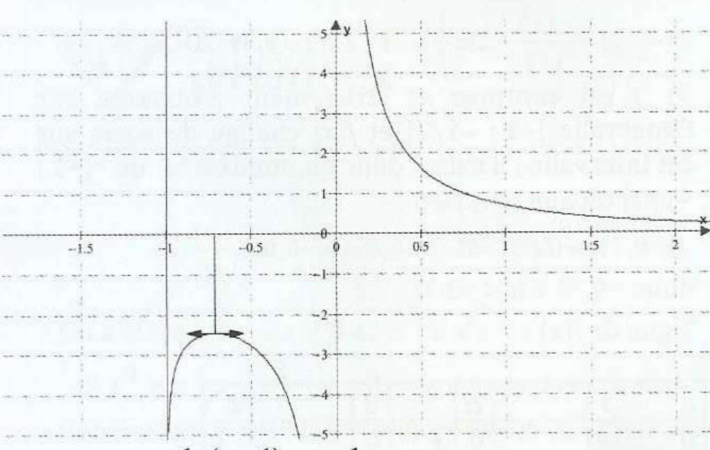
donc $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$.

On déduit que

$g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\approx -2{,}455$.



x	-1		α		0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$g(x)$		$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 0



4. a. $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

$u(x)=\ln(x+1), u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, .

$v'(x)=\dfrac{1}{x^2}, v(x)=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow h(x)=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$

La fonction $u(x)v(x)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ est une primitive de h.

b. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$ donc la fonction $\ln(x)-\ln(x+1)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

c. Une primitive de la fonction $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=h(x)+\dfrac{1}{x(x+1)}$ est

$-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\ln x-\ln(x+1)$.

7 S'ENTRAINER

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\dfrac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x)=\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2}{x(x^2+1)}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2+1)+4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

b. Le signe de g'(x) est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

si $0<x<1$, $g'(x)$ est négatif ;

si $x>1$, $g'(x)$ est positif.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

3.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$

avec $X=1+\dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2+1}=2$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

4. a.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-0,3$	↗	0

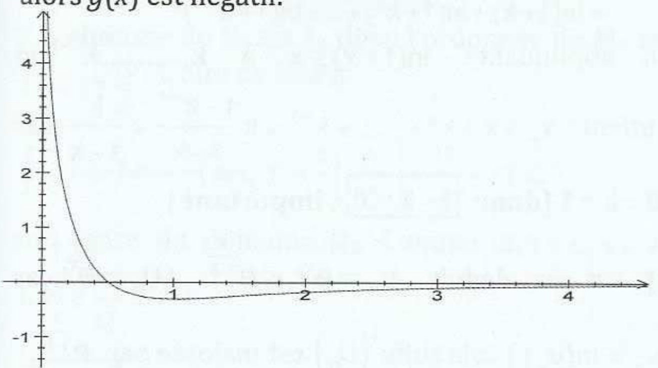
$g(1)=\ln(1+\dfrac{1}{1^2})-\dfrac{2}{1^2+1}=\ln 2-1\approx -0{,}3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur $]0\,;1]$, de plus elle est strictement décroissante sur cet

intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

On a $g(0{,}5) \approx 0{,}009438$ et $g(0{,}6) \approx -0{,}141452$ donc $g(0{,}5) > 0 = g(\alpha) > g(0{,}6)$ et comme g est décroissante,
$0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

5. Pour $0 < x < \alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x > \alpha$ alors $g(x)$ est négatif.



1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (cours).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x^2})$,

$$f'(x) = 1.\ln(1+\frac{1}{x^2}) + x.\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \ln(1+\frac{1}{x^2}) + x.\frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \ln(1+\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	0

3. a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$,

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(x\ln(x^2+1) - x\ln x^2\right)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x^2+1) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x^2+1) = \ln 1 = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -x\ln x^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\dfrac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} +\dfrac{2\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{2\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{2\ln X}{X} = 0^-$

avec $X = \dfrac{1}{x}$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

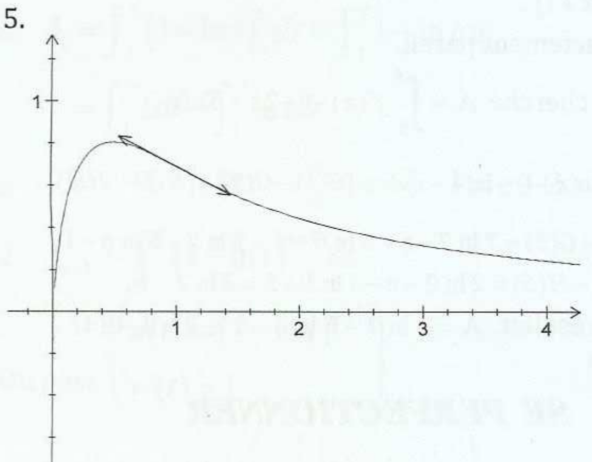
c. La tangente en 0 à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$:

$f(1) = 1\ln(1+\frac{1}{1^2}) = \ln 2$, $\quad f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1$ d'où

$y = (\ln 2 - 1)(x-1) + \ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2 - 1)x + 1$.

5.



Remarque :
On a vu dans la partie A que $g'(1) = 0$, or $g'(1) = f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 1$.

8 SE PERFECTIONNER

1. a. Lorsque x tend vers 4, $\dfrac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln\dfrac{x+1}{x-4}$ donc f tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc f tend vers $-\infty$.

b. $f'(x)=-2+3\left[\ln\frac{x+1}{x-4}\right]'=-2+3\left[\ln(x+1)-\ln(x-4)\right]'$

$=-2+3\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-4}\right]=\frac{-2(x+1)(x-4)-15}{(x+1)(x-4)}$

Lorsque $x>4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f est négative.

c. $f(x)-(-2x+5)=\ln\frac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x>4$, $\frac{x+1}{x-4}>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

2. a. On pose $u=\ln x$, $v'=1\Rightarrow u'=\frac{1}{x}$, $v=x$ d'où une primitive de $\ln x$ est $x\ln x-\int\frac{1}{x}xdx=x\ln x-x$.

b. On dérive G : $G'(x)=1.\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}-1$

$=\ln(x+1)$.

c. Exactement pareil.

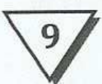
c. On cherche $A=\int_5^6 f(x)-(-2x+5)dx$

$=\int_5^6 \ln(x+1)-\ln(4-x)dx=[G(6)-G(5)]-[H(6)-H(5)]$;

$G(6)-G(5)=7\ln 7-6-6\ln 6+5=7\ln 7-6\ln 6-1$,

$H(6)-H(5)=2\ln 2-6-1\ln 1+5=2\ln 2-1$,

et le résultat $A=7\ln 7-6\ln 6-2\ln 2\approx 1{,}48$ U.



9 SE PERFECTIONNER

1°) $u_2=(1+k)\,u_1=\boxed{1+k}$;

$u_3=(1+k^2)\,u_2=\boxed{(1+k^2)(1+k)}$

2°) pour $n=2$: $u_2=(1+k)\,u_1=1+k$ donc la relation est vérifiée.

pour $n\geq 2$ supposons que : $u_n=(1+k)(1+k^2)...(1+k^{n-1})$ alors :

$u_{n+1}=(1+k^n)\,u_n=(1+k)(1+k^2)...(1+k^{n-1})(1+k^n)$

Donc par récurrence pout tout $n\geq 2$,

$u_n=(1+k)(1+k^2)...(1+k^{n-1})$

3°) a) On pose $f(x)=\ln(1+x)-x$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{1+x}<0$ car $x>0$, f est donc décroissante.

de plus $f(0)=\ln 1=0$, on en déduit donc que $f(x)\leq 0$ et donc $\ln(1+x)\leq x$ sur $[0;+\infty[$

b) $v_n=\ln(u_n)=\ln((1+k)(1+k^2)...(1+k^{n-1}))$

$=\ln(1+k)+\ln(1+k^2)+...+\ln(1+k^{n-1})$

en appliquant : $\ln(1+x)\leq x$ à $k,........,k^{n-1}$ on obtient : $v_n\leq k+k^2+......+k^{n-1}=k\frac{1-k^{n-1}}{1-k}<\frac{k}{1-k}$ car

$0<k<1$ (**donc** $\boxed{1-k>0}$ **, important**)

c) On en déduit $u_n=e^{v_n}<e^{\frac{k}{1-k}}$ ($u_n=e^{v_n}$ car $v_n=\ln(u_n)$) $\Rightarrow$la suite (u_n) est majorée par $e^{\frac{k}{1-k}}$.

de plus : $u_{n+1}=(1+k^n)\,u_n>u_n$ car $k>0\Rightarrow$la suite (u_n) est croissante. donc la suite (u_n) est croissante et majorée par $e^{\frac{k}{1-k}}$ donc converge.



10 SE PERFECTIONNER

1. $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$.

x	0 +∞	2,3	x_0	2,4
$g(x)$	+∞ ↗ 0 -∞			

Limite en 0 : ln tend vers $-\infty$ de même que $-\frac{2}{x}$;

limite en $+\infty$: ln tend vers $+\infty$, $-\frac{2}{x}$ tend vers 0.

$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$ donc g est croissante ; comme elle est continue, elle s'annule une seule fois.

On a $g(2,3)\approx -0{,}04$ et $g(2,4)\approx 0{,}04$

donc $2{,}3\leq x_0\leq 2{,}4$.

2. a. $f(x_0)=\frac{5\ln x_0}{x_0}=5\frac{2/x_0}{x_0}=\frac{10}{x_0^2}$

car $g(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{2}{x_0}$.

b. On se rappelle que la dérivée de $\ln t$ est $\dfrac{1}{t}$ et qu'une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{\ln t}{t}\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^a$$

$$= \frac{5}{2}(\ln a)^2 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$$

3. L'abscisse de P_0 est x_0 donc l'ordonnée de M_0 est $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$. L'aire de D_1 est

$$\int_1^{x_0} f(t)\,dt = \frac{5}{2}(\ln x_0)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{x_0^2}\right) = \frac{10}{x_0^2} = f(x_0),$$

soit l'aire du domaine D_2. Comme $2,3 \le x_0 \le 2,4$, $1,89 \ge \dfrac{10}{x_0^2} \ge 1,74 \cdots$



11 SE PERFECTIONNER

I. $f(x) = (1-\ln x)^2$

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 2\left(\frac{\ln x - 1}{x}\right)$$

x	0		e		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0	↗	

2. a) g est continue et strictement croissante sur $[e,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

b) $\left(g^{-1}(x) = y,\ x \in [0,+\infty[\right)$

$\Leftrightarrow \left(g(y) = x \text{ et } y \in [e,+\infty[\right)$

$g(y) = x \Leftrightarrow (1-\ln y)^2 = x$

$\Leftrightarrow |1-\ln y| = \sqrt{x}$, or $y \ge e$

$\Rightarrow \ln y \ge 1 \Rightarrow 1-\ln y \le 0$

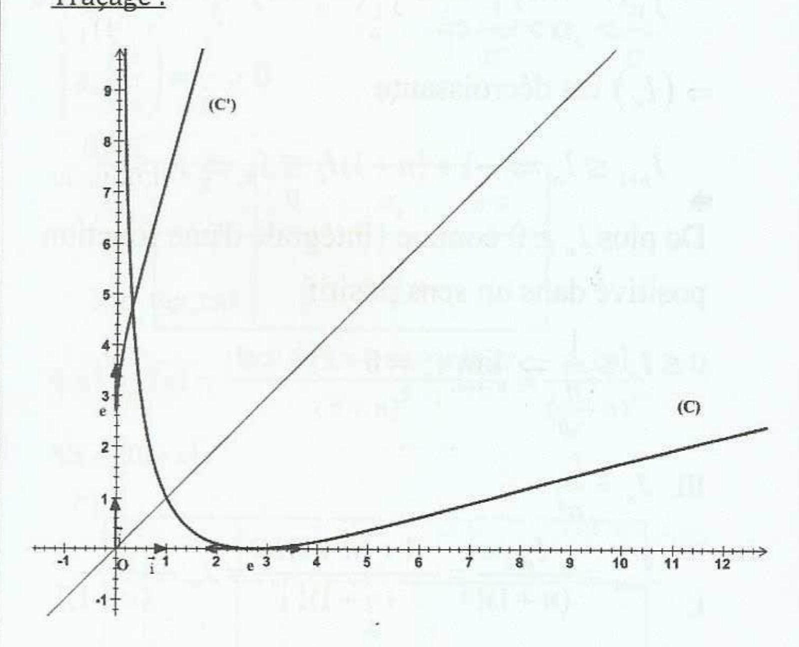
$\Leftrightarrow \ln y - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln y = 1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow y = e^{1+\sqrt{x}} = g^{-1}(x)$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

<u>Traçage :</u>



II. $I_n = \int_1^e (1-\ln t)^n\,dt$

1. $I_1 = \int_1^e (1-\ln t)^1\,dt = \int_1^e 1-\ln t\,dt$

$= \int_1^e 1dt - \int_1^e \ln t\,dt$

$= e-1-[t\ln t - t]_1^e = e-1-1 = e-2$

2. $I_{n+1} = \int_1^e (1-\ln t)^{n+1}\,dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = (1-\ln t)^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1)\left(-\dfrac{1}{t}\right)(1-\ln t)^n \\ v(t) = t \end{cases}$

$$I_{n+1} = \left[t(1-\ln t)^{n+1}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e (1-\ln t)^n\,dt$$

$$= -1 + (n+1)I_n$$

3. $V = \pi\int_1^e (f(t))^2\,dt = \pi\int_1^e (1-\ln t)^4\,dt = \pi I_4$ u.v

On montre à l'aide de $I_{n+1} = -1+(n+1)I_n$ que $I_4 = 24e-65$

4.



$1\le t\le e\Rightarrow 0\le \ln t\le 1$

$\Rightarrow 0\le 1-\ln t\le 1\Rightarrow \left(1-\ln t\right)^{n+1}\le \left(1-\ln t\right)^{n}$

$\Rightarrow \int_1^e \left(1-\ln t\right)^{n+1}dt\le \int_1^e\left(1-\ln t\right)^n dt\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$

$\Rightarrow \left(I_n\right)$ est décroissante

$I_{n+1}\le I_n\Rightarrow -1+(n+1)I_n\le I_n\Rightarrow I_n\le \frac{1}{n}$

De plus $I_n\ge 0$ comme l'intégrale d'une fonction positive dans un sens positif

$0\le I_n\le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n=0$

III. $J_n=\frac{I_n}{n!}$

1. $J_{n+1}=\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{-1+(n+1)I_n}{(n+1)!}=J_n-\frac{1}{(n+1)!}$

2. $J_{k+1}=J_k-\frac{1}{(k+1)!}\ \forall\ k\ge 1$

$$\left.\begin{array}{l}J_2=J_1-\frac{1}{2!}\\ J_3=J_2-\frac{1}{3!}\\ \vdots\\ J_n=J_{n-1}-\frac{1}{n!}\end{array}\right\}$$

On fait la somme et on simplifie

on obtient : $J_n=J_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

$\Rightarrow J_n=e-2-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

$\Rightarrow J_n=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-J_n$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\lim_{n\to+\infty} e-\frac{\overbrace{I_n}^{\nearrow 0}}{n!}=e$



12 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. $I_0(a)=\int_0^a\frac{dt}{1+t}=[\ln(1+t)]_0^a=\ln(1+a)-\ln 1=\ln(1+a)$.

2. $I_1(a)=\int_0^a\frac{(t-a)dt}{(1+t)^2}$: intégration par parties, on pose

$\begin{cases}u(t)=t-a\\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\frac{-1}{1+t}\end{cases}$

et $I_1(a)=\left[\frac{-1(t-a)}{1+t}\right]_0^a-\int_0^a\frac{-dt}{(1+t)}=-a+I_0(a)=\ln(1+a)-a$.

3. Encore une intégration par parties :

$\begin{cases}u(t)=(t-a)^{k+1}\\ v'(t)=\frac{1}{(1+t)^{k+2}}\end{cases}$,

soit

$\begin{cases}u'(t)=(k+1)(t-a)^k\\ v(t)=\int(1+t)^{-k-2}dt=\frac{1}{-k-2+1}(1+t)^{-k-2+1}=\frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\end{cases}$

d'où $I_{k+1}(a)=\left[\frac{-(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^k}\right]_0^a+\int_0^a\frac{(k+1)(t-a)^k}{(k+1)(1+t)^{k+1}}dt$

$=\frac{(-a)^{k+1}}{k+1}+\int_0^a\frac{(t-a)^k dt}{(1+t)^{k+1}}=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)$.

4. Soit $P(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$; calculons $I_5(a)$ à l'aide de l'égalité précédente :

pour $k=1$: $I_2(a)=\frac{(-1)^2a^2}{2}+I_1(a)=\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

pour $k=2$: $I_3(a)=\frac{(-1)^3a^3}{3}+I_2(a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

pour $k=3$: $I_4(a)=\frac{a^4}{4}+I_3(a)=\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a$,

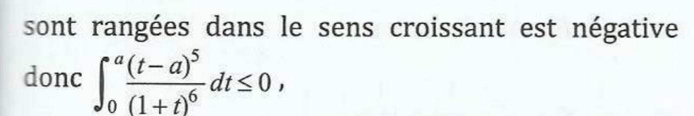
pour $k=4$: $I_5(a)=\frac{-a^5}{5}+I_4(a)$

$=\frac{-a^5}{5}+\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\ln(1+a)-a=\ln(1+a)-P(a)$.

5. $J(a)=\int_0^a(t-a)^5dt=\left[\frac{(t-a)^6}{6}\right]_0^a=-\frac{a^6}{6}$

6. a. Comme $t\le a$, on a $t-a\le 0\Rightarrow (t-a)^5\le 0$ d'où $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\ge (t-a)^5\Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^6}\le 1\Leftrightarrow (1+t)^6\ge 1$ ce qui est évidemment vrai (remarquez les deux changements de sens des inégalités...).

b. On a $(t-a)^5\le\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}$ donc en intégrant sur l'intervalle $[0\,;a]$: $\int_0^a(t-a)^5dt\le\int_0^a\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}dt$ d'où $J(a)\le I_5(a)$; de plus $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\le 0$ et l'intégrale d'une fonction négative sur un intervalle dont les bornes



sont rangées dans le sens croissant est négative donc $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\,dt \le 0$,

d'où $\int_0^a (t-a)^5\,dt \le \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\,dt \le 0$.

7. On a d'après 4. $|\ln(1+a)-P(a)| = |I_5(a)| \le \left|\int_0^a (t-a)^5\,dt\right| = \frac{a^6}{6}$ (L'inégalité du 6.b. devient $\left|\int_0^a (t-a)^5\,dt\right| \ge \left|\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\,dt\right|$ du fait du changement de signe).

8. Il suffit de prendre $\frac{a^6}{6} \le 10^{-3}$,

soit $a \le \sqrt[6]{6.10^{-3}} \approx 0,426$.

Moralité : pour x dans $[0\ ;\ \sqrt[6]{6.10^{-3}}\ ]$, on approche $\ln(1+a)$ par $P(a)$ avec une erreur maximale de 0,001. Ceci est très utile pour calculer les valeurs des logarithmes.



13 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A :

1. Continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x+n} = \frac{0}{n} = 0 = f_n(0) \text{ donc } f_n$$

est continue à droite en 0.

Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+n} = -\infty \text{ donc } f_n \text{ n'est}$$

pas dérivable à droite en 0.

2. $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{n}{x}} = +\infty$.

3. a) $g_n'(x) = 1 + \frac{n}{x} > 0 \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$. $\lim_{0^+} g_n = -\infty$; $\lim_{+\infty} g_n = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$		+
g_n	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) g_n est continue et strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ donc g_n réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un réel unique $\alpha_n \in \left]0,+\infty\right[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

c)

$$\begin{cases} g_n\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} - n \le \frac{1}{e^2} - 1 < 0 \\ g_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}.$$

d)

x	0	α_n	$+\infty$
$g_n(x)$	-	0	+

4. a) $f_n'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+n) - x\ln x}{(x+n)^2} = \frac{g_n(x)}{(x+n)^2}$

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[$.

b)

x	0	α_n	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	0	+
f_n	0 ↘	$f_n(\alpha_n)$	↗ $+\infty$

c) $f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n \ln\alpha_n}{\alpha_n + n}$ avec $\alpha_n + n(1+\ln\alpha_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha_n = -\frac{\alpha_n}{n} - 1$$

Donc $f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n\left(-\frac{\alpha_n}{n}-1\right)}{\alpha_n + n} = -\frac{\alpha_n}{n}$.

$\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e} \Rightarrow -\frac{1}{ne} < -\frac{\alpha_n}{n} < -\frac{1}{ne^2}$.

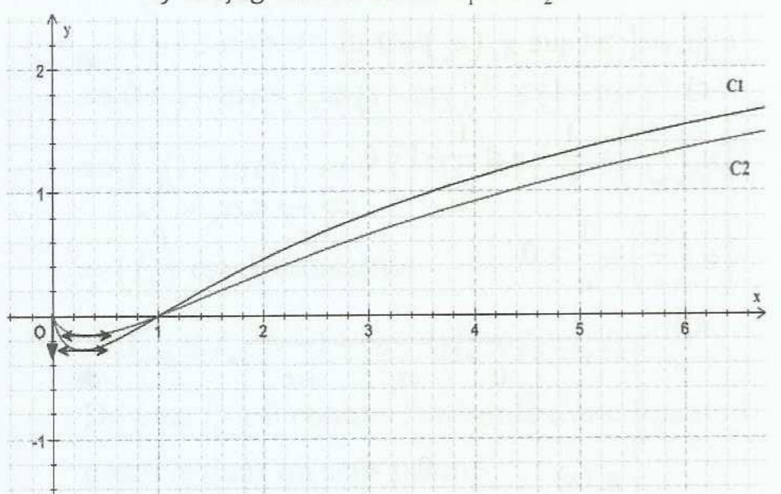
$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{ne} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{ne^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$.

5. a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-x\ln x}{(x+n+1)(x+n)}$

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[$.

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	0 +	0	-
Position de C_{n+1} par rapport à C_n	C_{n+1} est au dessus de C_n		C_{n+1} est au dessous de C_n

b) Traçage des courbes C_1 et C_2 :



Partie B :

1. f_n est continue sur [0,1]

$\Rightarrow$ $(F_n : x \mapsto -\int_1^x f_n(t)dt)$ est dérivable sur [0,1] et on a : $F_n'(x) = -f_n(x)$

$\Rightarrow$ F_n est continue sur [0,1] .

2. $I_n(x) = \frac{1}{4n}\left(x^2 - 1 - 2x^2 \ln x\right)$ et

$J_n(x) = \frac{1}{9n^2}\left(x^3 - 1 - 3x^3 \ln x\right)$ $\forall x \in]0,1]$.

3. a) $(n-t)(n+t) = n^2 - t^2 \le n^2$

$\Rightarrow \frac{n-t}{n^2} \le \frac{1}{n+t} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{t}{n^2} \le \frac{1}{n+t}$

$1 \le n \le t+n \Rightarrow \frac{1}{t+n} \le \frac{1}{n}$.

b)

$\frac{1}{n} - \frac{t}{n^2} \le \frac{1}{t+n} \le \frac{1}{n}$ $\forall t \in]0,1]$

$\Rightarrow \frac{1}{n} t \ln t \le \frac{t \ln t}{t+n} \le \frac{1}{n} t \ln t - \frac{1}{n^2} t^2 \ln t$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1]$, $\int_x^1 \frac{1}{n} t \ln t dt \le \int_x^1 \frac{t \ln t}{t+n} dt \le \int_x^1 \frac{1}{n} t \ln t dt - \int_x^1 \frac{1}{n^2} t^2 \ln t dt$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1]$, $I_n(x) \le F_n(x) \le I_n(x) - J_n(x)$

c) $\lim_{x\to 0^+} I_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4n}\left(x^2 - 1 - 2x^2 \ln x\right) = -\frac{1}{4n}$;

$\lim_{x\to 0^+} J_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{9n^2}\left(x^3 - 1 - 3x^3 \ln x\right) = -\frac{1}{9n^2}$;

$\lim_{x\to 0^+} F_n(x) = F_n(0) = u_n$

$\Rightarrow -\frac{1}{4n} \le u_n \le -\frac{1}{4n} + \frac{1}{9n^2}$.

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{4n} = 0$; $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{4n} + \frac{1}{9n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) $A_1 = \int_0^1 |f_1(t)| dt = \int_0^1 -f_1(t)dt = -u_1 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \le A_1 \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{36} \le A_1 \le \frac{1}{4}$.

4. a) $si\ k \le t \le k+1$ alors $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \le \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k}$

b) En faisant varier k de 1 à n et en faisant la somme membre à membre, on obtient

$\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En faisant varier k de 1 à n - 1 et en faisant la somme membre à membre, on obtient

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln n + 1$.

5. a) $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2 - k} \ge \frac{1}{k^2}$ car $0 < k^2 - k \le k^2$.

b) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}$.

6. $-\frac{1}{4k} \le u_k \le -\frac{1}{4k} + \frac{1}{9k^2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{k=1}^{n} u_k \le -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$-\frac{1}{4}(1 + \ln n) \le S_n \le -\frac{1}{4}\ln(n+1) - \frac{1}{9n} + \frac{2}{9}$.

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{4}\ln(n+1) - \frac{1}{9n} + \frac{2}{9} = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

14 SUR LE CHEMIN DU BAC

I] $f_2(x) = x^2 - \ln x$, $\forall x > 0$

1) a) $\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \underbrace{\dfrac{\ln x}{x^2}}_{\searrow 0}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\searrow 0} = +\infty \Rightarrow (\Gamma)$

admet une brancha parabolique de direction celle de $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$

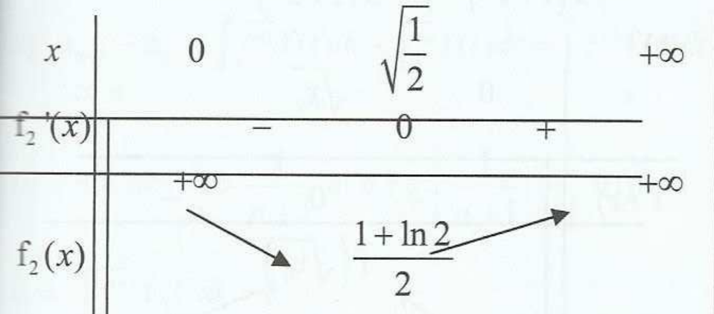
c) $f_2'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$f_2\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1+\ln 2}{2}$



x	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1+\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $M(x, \ln x)$ et $M_2(x, x^2)$, $x > 0$

$MM_2 = |x^2 - \ln x|$

Or $x^2 - \ln x \geq \dfrac{1+\ln 2}{2} > 0 \Rightarrow MM_2 = x^2 - \ln x = f_2(x)$

b) Pour construire le point de (Γ) d'abscisse 2, on contruit le point A de (L) et le point A_2 de (C) ayant même abscisse 2, la distance AA_2 est donc l'image de 2 par f_2

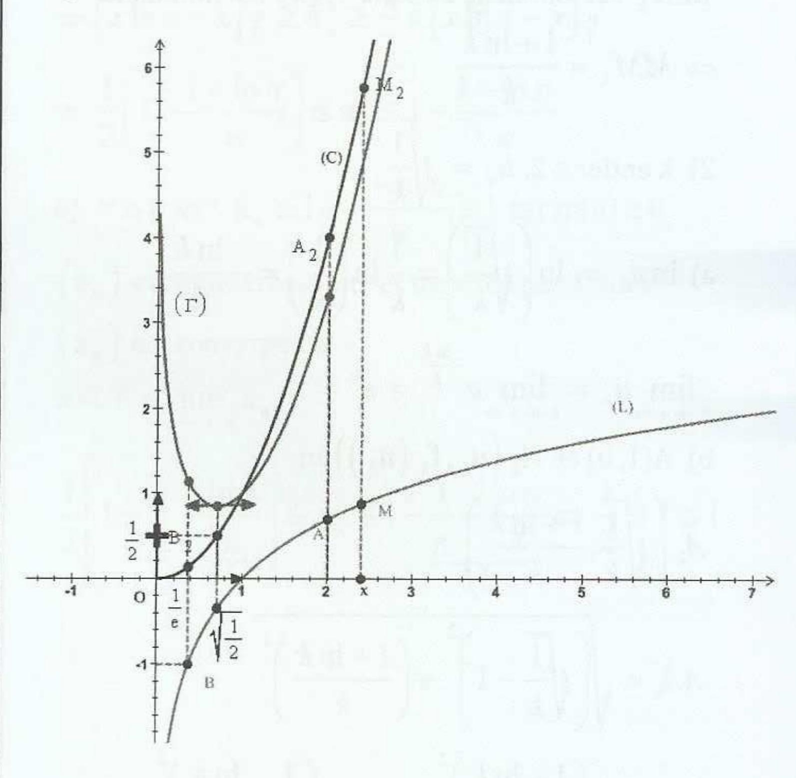
De même pour les points d'abscisses respectives

$1/e$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$1/e$ c'est l'abscisse du point de (L) d'ordonnée – 1

$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ c'est l'abscisse du point de (C) d'ordonnée ½

c)



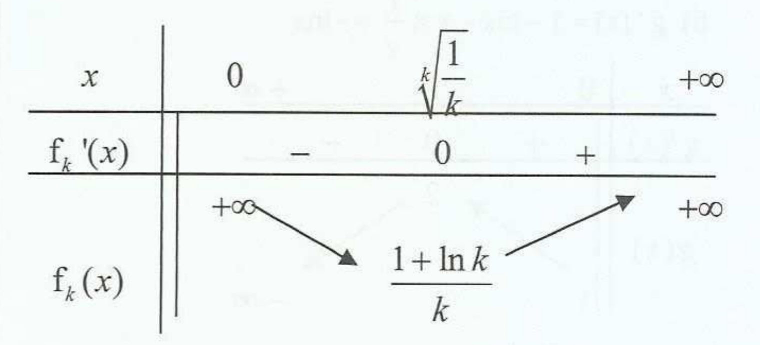
II] 1) $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f_k(x) = x^k - \ln x, \forall x > 0$

a) $f_k'(x) = kx^{k-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{kx^k - 1}{x}$

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{kx^k-1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x^k = \dfrac{1}{k}$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$

$f_k\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k} - \ln\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1+\ln k}{k}$



x	0		$\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1+\ln k}{k}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\dfrac{1+\ln k}{k}$ est un minimum absolu de f_k en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$

c) $\forall x > 0$, $M_k\left(x, x^k\right)$ et $M(x, \ln x)$

$MM_k = |x^k - \ln x| = x^k - \ln x = f_k(x)$

MM_k est minimale lorsque $f_k(x)$ est minimale

$\Leftrightarrow MM_k = \dfrac{1+\ln k}{k}$

2) k entier ≥ 2, $u_k = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$

a) $\ln u_k = \ln\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{\ln k}{k}$

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} e^{-\frac{\ln k}{k}} = e^0 = 1$

b) A(1, 0) et $A_k\left(u_k, f_k(u_k)\right) \Rightarrow$

$A_k\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}, \dfrac{1+\ln k}{k}\right)$

$AA_k = \sqrt{\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1+\ln k}{k}\right)^2}$

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1+\ln k}{k}\right)^2 = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{\ln k}{k}\right)^2 = 0$ et

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}-1\right)^2 = \lim\limits_{k\to+\infty}(u_k-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} AA_k = 0$



15 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) $g(x) = 1 + x - x\ln x \; ; x \in]0,+\infty[$

a) g est dérivable sur]0, + ∞[et on a

b) $g'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−	
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{x\to0^+} 1 + x - \underbrace{x\ln x}_{\searrow 0} = 1$

$\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{1-\ln x}_{-\infty}) = -\infty$

c) $g\left(]0,1]\right) =]1,2]$ et $0 \notin]1, 2] \Rightarrow$ l'équation g(x) = 0 n'admet pas de solutions dans]0, 1]

g est continue et strictement décroissante sur [1, + ∞[⇒ g réalise une bijection de [1, + ∞[sur]- ∞, 2], or 0 ∈]- ∞, 2] ⇒ l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $x_0 \in [1,+\infty[$

x_0 est donc l'unique solution de l'équation g(x) = 0 dans l'intervalle]0, + ∞[

g(3.5) = 0.1 > 0 et g(3.6) = - 0.1 < 0 ⇒ 3.5 < x_0 < 3.6

d) $\forall\, x \in]0, x_0[$, on a g(x) > 0

$\forall\, x \in]x_0, +\infty[$, on a g(x) < 0

$g(x_0) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2},\; x \in]0,+\infty[$

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{1+x^2-x^2\ln x^2}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b)

x	0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\sqrt{x_0})$	↘	0

$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\overbrace{\ln x}^{\nearrow -\infty}}{\underbrace{1+x^2}_{1}} = -\infty$;

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)}_{0} \times \underbrace{\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)}_{1} = 0$

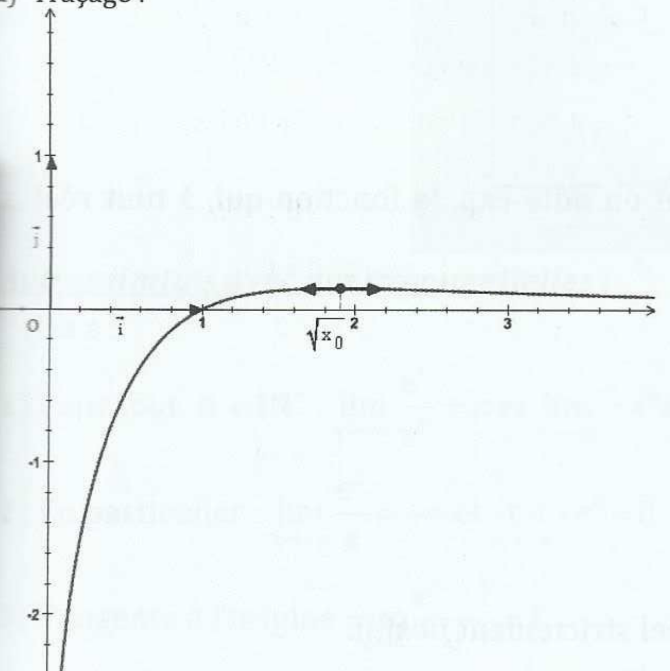
c) $f\left(\sqrt{x_0}\right) = \dfrac{\ln\sqrt{x_0}}{1+\sqrt{x_0}^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(x_0)}{1+x_0}$

Or $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 + x_0 - x_0\ln(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + x_0 = x_0\ln(x_0)$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{x_0}\right) = \frac{\frac{1}{2}\ln(x_0)}{x_0\ln(x_0)} = \frac{1}{2x_0}$$

d) Traçage :



3) $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) $a_{n+1} - a_n = \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(t)dt - \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t)dt$

Or $\forall$ n $\in$ IN*, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ et $\forall\, t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, f(t) < 0 $\Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t)dt > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow (a_n)$ est croissante

b) $\forall$ x $\in$]0, 1[, on a $0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < 1 + x^2 < 2$

c) $\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$

Or $\forall$ x $\in$]0, 1[, on a lnx < 0

$\Rightarrow \ln x < \frac{\ln x}{1+x^2} < \frac{1}{2}\ln x$

d) $\forall$ x $\in$]0, 1], $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$

$\forall$ n $\in$ IN*, $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow$

$$\int_1^{\frac{1}{n}} \ln x dx \geq \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)dx \geq \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2}\ln x dx$$

$$\Rightarrow [x\ln x - x]_1^{\frac{1}{n}} \geq a_n \geq \frac{1}{2} \times [x\ln x - x]_1^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$$

e) $\forall$ n $\in$ IN*, $a_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n} \leq 1$ car $\ln(n) \geq 0$

(a_n) est donc croissante et majorée par 1 donc

(a_n) est convergente

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} - \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{0}\right) \leq a_n \leq 1 - \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n}}_{0} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$$

Fonction exponentielle

I) Résumé du cours :

A) Définition

On appelle fonction exponentielle (de base e), et on note exp, la fonction qui, à tout réel x associe l'unique nombre réel y tel que $\ln y = x$.

$\text{Exp} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$x \mapsto y = \exp x$ tel que $\ln y = x$

B) Notation et propriétés

Notation :

Pour tout nombre réel x, on note $\exp(x) = e^x$.

Propriétés :

- Pour tout nombre réel x, e^x et un nombre réel strictement positif.
- Pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.
- $e^0 = 1;\ e^1 = e$
- Pour tout nombre entier n et tous nombres réels x et y, on a :

$$e^x \times e^y = e^{x+y};(e^x)^n = e^{nx};\frac{1}{e^x} = e^{-x};\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

C) Etude de la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle f est définie de IR dans $]0,+\infty[$.

Si $f(x) = e^x$, f est dérivable sur IR et $f'(x) = e^x$.

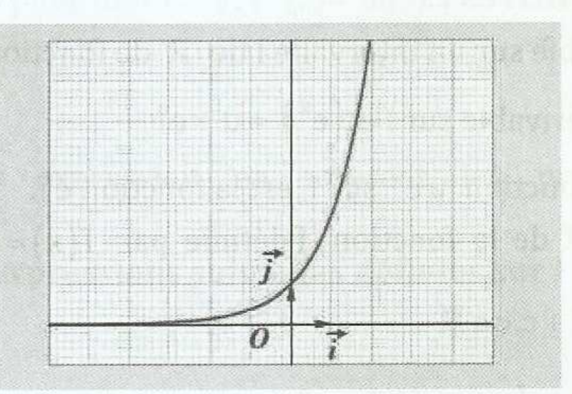
$f'(x) > 0$ et la fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction exp

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+	
f	0	↗	$+\infty$

Représentation graphique



Autres limites avec des exponentielles :

On a :

1) Pour tout $n \in IN^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = x^n e^x = 0$

2) En particulier : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

3) Tangente à l'origine : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemple1:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemple2:

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right)$ et interpréter graphiquement si possible.

Forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$.

Dans ce cas, il faut se laisser guider, non pas par le nombre dont se rapproche x mais par la limite du nombre dont on prend l'exponentielle : ici $\frac{1}{x}$. puisque $\frac{1}{x}$. tend vers 0, on va essayer de se rapprocher du seul théorème en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $xe^{\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{1}{x}-1}}{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$.

D) Dérivées et primitives :

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de fonction dérivée u'.

- La fonction e^u est dérivable sur I et $\left(e^u\right)' = u' \times e^{u.}$
- Une primitive de la fonction $u'e^u$ sur I est la fonction e^u.
- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{ax+b}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c, c \in \mathbb{R}$

Fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^\alpha$

a) Soit α un nombre réel. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

b) La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

c) La fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la fonction réciproque de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto x^n$. On note $x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{x}.$

II) Exercices



QCM

1) Soit a et b deux réels strictement positifs. On a $e^{\ln a} + e^{-\ln b}$ est égale à :

a) $-ab$

b) $\frac{a}{b}$

c) $\frac{ab+1}{b}$

d) a-b

2) soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

a) pour tout x $\in \mathbb{R}$, g(x) = f(-x)

b) pour tout x $\in \mathbb{R}$, g(x) +f(x)=0

c)pour tout x $\in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$

2 QCM ; FAUX OU VRAI

3) Soit $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1-x}$, pour tout $x > 1$, alors $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

4) $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = 0$

5) Si $f(x)= 3^x$, $x > 0$. Alors pour tout $x > 0$, $f'(x)= \ln(3).3^x$

3 APPLIQUER

(Simplifier l'écriture d'une expression en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle)

1) Simplifier l'écriture des expressions suivantes définies sur I :

$a(x)=e^{x+\ln 4};I=\mathbb{R}$

$b(x)=e^{-4\ln x};I=]0,+\infty[$.

$c(x)=\ln(2e^x);I=\mathbb{R}$

2) Résoudre une équation ou une inéquation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^x-3=0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x-1)\leq-3$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x}-3e^x-2=0$.

3) Calculer une fonction dérivée, étudier son signe :

a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x$

b) Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}$. Etudier le signe de $f'(x)$

4) Calculer des primitives :

Déterminer les fonctions primitives F de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=e^{3x}$

b) $f(t)=\dfrac{e^t}{e^t+2}$

5) Calculer des limites :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$f(x)=(x+3)e^x$.

$f(x)=e^x-x^2$



4 APPLIQUER

Simplifier les expressions suivantes :

$A=e^x\times e^{(-x)}$ $B=e^x+2e^x$ $C=(e^x)^3\times e^{(-2x)}$ $D=(e^x)^{(-2)}\times e^{3x}$

$E=e^{2x}\times e^{-x}$ $F=e^{3x+2}\times e^{1-2x}$ $G=\dfrac{e^{(2x+1)}}{e^{(-2x)}}$ $H=\dfrac{e^{(3x-1)}}{e^{(2-x)}}$

$I=\dfrac{(e^4+e)}{e}$ $J=\dfrac{e^{(-x)}e^{2x}}{e}$ $K=e^2e^x$



5 APPLIQUER

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'ensemble de définition, sa dérivée, et son tableau de variation :

1) $f(x)=5x+2+e^x$ 2) $f(x)=xe^x$ 3) $f(x)=e^x/x$

4) $f(x)=(1-x)e^x$ 5) $f(x)=x+e^{-x}$ 6) $f(x)=1/(e^x-1)$

7) $f(x)=e^{-x^2+3}$ 8) $f(x)=e^{3/x}$ 9) $f(x)=e^{4x}-e^{2-x}$

6 APPLIQUER

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-1)e^x-1$

1) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

2) a) justifier que g(x)<0 pour x<0.

b) Calculer g(0) et g(2), puis montrer que g(2)>0.

c) En déduire que l'équation g(x)=0 admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$

Etudier les variations de f, puis montrer que $f(\alpha)=\alpha-1$



7 S'ENTRAINER

On considère la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} si x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(ζ) sa représentationgraphiquedans un repère orthonormé.

1) Etudier la continuité de f en 0 (pour cela, on calculera les limites à gauche et à droite en 0, on les comparera à f(0) et on interprétera graphiquement les résultats obtenus).

2) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$

b) Déterminer la limite de f(x)-(x+1) en $-\infty$ puis en $+\infty$ Interpréter graphiquement ces résultats.

c) On considère la fonction g définie sur par : $g(x)=e^x-(x+1)$

Etudier les variations de g.

En déduire que, pour tout réel x non nul,g(x)>0.

En déduire la position de (ζ) par rapport à la droite (Δ) d'équation y=x+1.

3) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)}{x}$. que peut-on en conclure quant à la dérivabilité de f en 0 ?

4) Etudier la dérivabilité de f surIR*. Déterminer f' puis étudier les variations de f.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer (ζ) et (Δ) dans un repère orthonormé dont l'unité est 2 cm.



S'ENTRAINER

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.

1) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2) On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$.

   a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

   b) En déduire que $J_n \leq I_n$.

   c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée.

   d) Que peut – on conclure pour la suite (J_n) ?

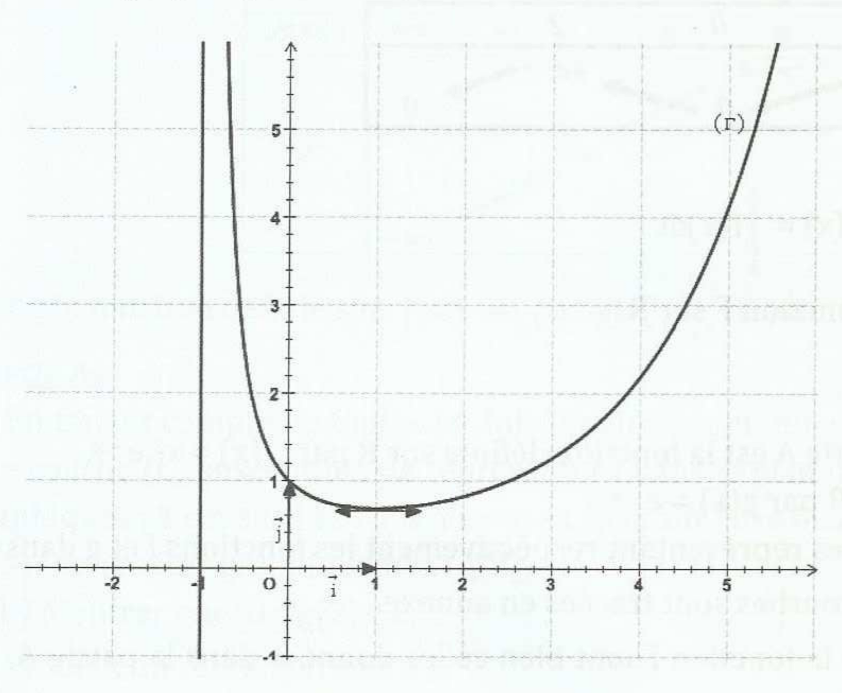


S'ENTRAINER

Soient f et g les fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

La courbe (Γ) de g est donnée ci dessous



Partie A

1) Etudier les variations de f et vérifier que pour tout $x > -1$, $g(x) = f(x) - f'(x)$.

2) Etudier la position de (C) et (Γ) puis tracer (C) dans le même repère que celui de (Γ).

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (Γ) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour $x > \frac{1}{e}$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f^2(t)dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et que $F'(x) = \frac{x}{(1+\ln x)^2}$.

2) Montrer que pour $x \in \left]\frac{1}{e},1\right]$, on a $F(x) \le x^2\left(1-\frac{1}{1+\ln x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$.

3) Montrer que pour tout $x > \frac{1}{e}$, $F(x) = \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3}dt$.

4) En déduire la limite en $+\infty$ de F puis dresser le tableau de variation de F.



10 SE PERFECTIONNER

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur R.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

On définit la fonction F sur R par : $F(x) = \int_2^x f(t)dt$.

1) Déterminer les variations de la fonction F sur R.

2) Montrer que $0 \le F(3) \le 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 e^{-x}$.

On appelle g la fonction définie sur R par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1) a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b) Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2) Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

a) Montrer que la fonction H définie sur R par $H(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur R.

b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.

On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

Déterminer l'aire $A(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

3) On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point $P(x_P ; m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q ; m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $]-\infty ; -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que $x_p \in]-\infty ; -1]$ et $PQ = 1$.

b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_p et de x_Q.

Justifier l'égalité $f(x_p) = g(x_Q)$.

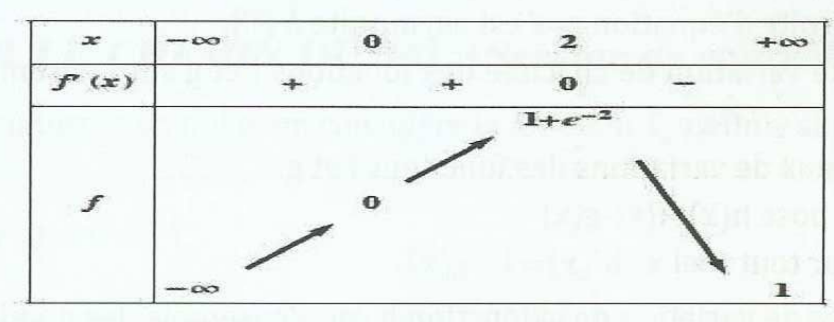
c) Déterminer la valeur de x_P telle que $PQ = 1$.



SE PERFECTIONNER

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$

On donne le tableau de ses variations.



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$1+e^{-2}$	↘	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Partie A :

1) En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2cm sur l'axe des ordonnées).

2) a) Interpréter graphiquement g(2).

b) Montrer que $0 \le g(2) \le 2,5$.

3) a) Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\int_2^x f(t)dt \ge -2$.

En déduire que $g(x) \ge x - 2$.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$

Partie B :

On admet que tout réel t, $f(t)=(t-1)e^{-t}+1$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt$.

2) En déduire que pour tout réel x, $g(x)=x(1-e^{-x})$.

3) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.



12 SE PERFECTIONNER

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (Partie A), utilisée ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$; (unité graphique 2 cm)

Partie A

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$f(x)=x-e^x$ et $g(x)=(1-x)e^x$

On appelle (C) et (C') leurs courbes respectives.

1) a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation y=x est asymptote à (C).

c) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur l'ensemble des nombres réels.

d) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g.

2) Pour tout réel x, on pose h(x)=f(x)-g(x)

a) Montrer que, pour tout réel x, $h'(x)=1-g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction h, sur l'ensemble des nombres réels.

c) Démontrer que les courbes (C) et (C') admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée α, appartient à l'intervalle $[1;2]$.

d) Etudier, selon les valeurs de x, la position relative de (C) et (C').

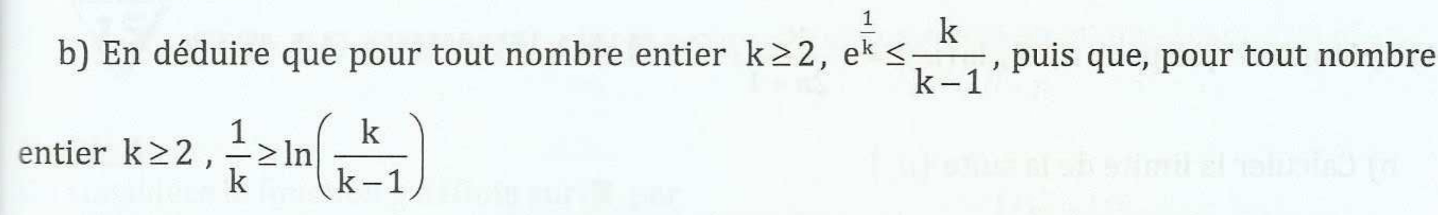
3) Tracer (C) et (C').

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)$

1) A l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.

2) a) En utilisant le tableau de variation de la fonction g définie dans la partie A, démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;1[$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.



b) En déduire que pour tout nombre entier $k \geq 2$, $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$

c) Pour tout entier $n \geq 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3) Pour tout entier $n \geq 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 20$, $u_n \geq 0$.

b) En utilisant le tableau de variationde la partie A, démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, $1 + x \leq e^x$.

c) En déduire que pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\frac{k+1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

d) Vérifier que pour tout entier naturel n>20.

$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier n>20.

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \ldots + \frac{1}{n}$.

13 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session de contrôle 2008)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur [0, 1] par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$.

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi sur IN*, une suite (u_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle]0, 1[. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour n ≥ 1, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.

b) Calculer la limite de la suite (u_n).

14 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session de contrôle 2008)

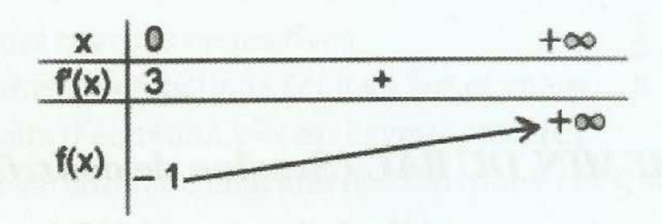
Soit f la fonction définie sur IR₊ par f(x) = $x+(x-1)e^{-x}$ et soit ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé
$(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à la courbe ζ au voisinage de + ∞.

c) Déterminer la position relative de ζ et Δ.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de f.



x	0		+∞
f'(x)	3	+	
f(x)	−1	↗	+∞

a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet, dans IR+, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe ζ.

(On précisera la demi-tangente à ζ au point d'abscisse 0 et on prendre α ≈ 0.4).

3) On désigne par (u_n) la suite définie sur IN* par $u_n = \int_\alpha^1 |f(x)|^n \, dx$.

a) Calculer u_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul , $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

15 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\frac{1}{e^{x}+1}.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x)=-\frac{1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$.
3. En déduire que pour tout réel x, $g(x)>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x}\times\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.
   b) En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. a) Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer f' la dérivée de la fonction f et vérifier que $f'(x)=e^{x}\times g(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer C_f.

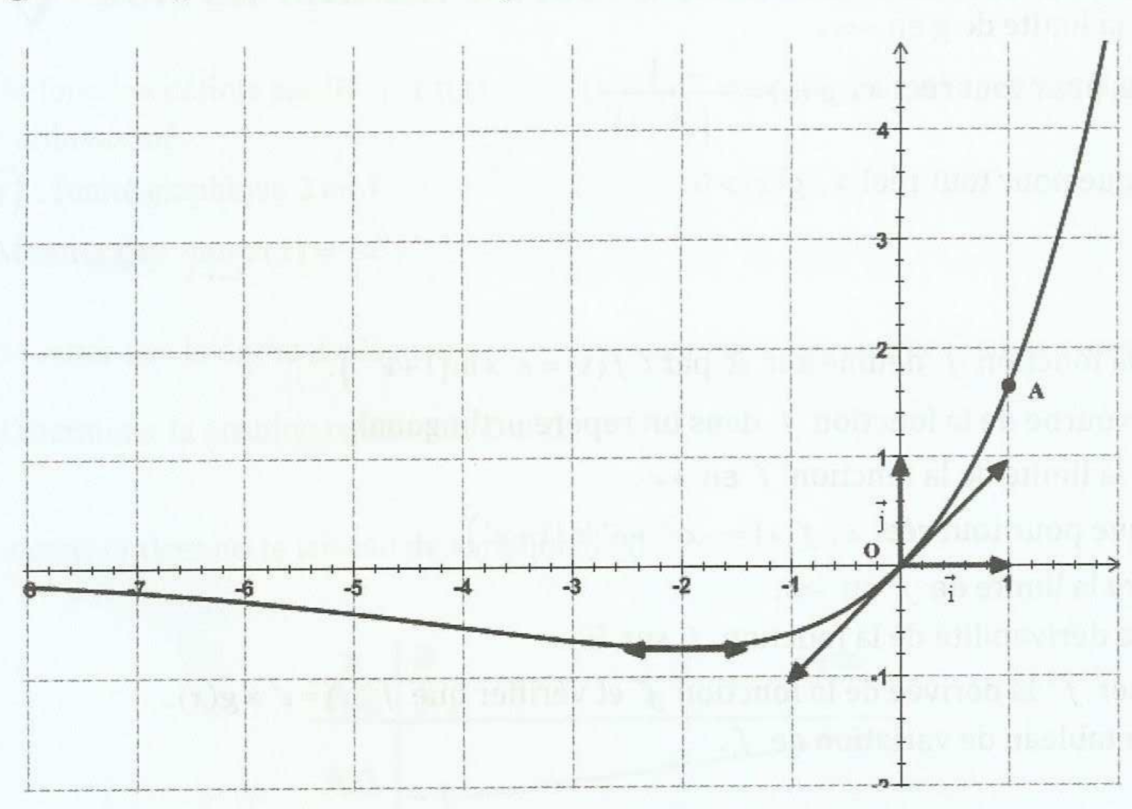
Partie C

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\int_0^1 e^{\frac{x}{n}}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

1. a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)-f'(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$.
   En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aires, est u_1
   .
   c) Calculer u_1.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.
   b) En déduire que (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\leq u_n\leq n\ln 2\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.
   d) Déduire un encadrement de ℓ.


16 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(ax+b)e^{cx}$ où a, b et c sont trois paramètres réels.
La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses respectives – 2 et 0 sont tracées ci - dessous.



Partie A :

1) a) Déterminer à partir du graphique les valeurs de f(0), f ′ (0) et f ′ (-2).
b) En déduire les valeurs de a, b et c.

2) On admet que $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$.
a) Calculer f ′ *(x)* pour tout réel x, puis dresser le tableau de variation de f.
b) Déterminer les branches infinies de (C) aux voisinages de - ∞ et de + ∞.

Partie B :

On considère la suite (I_n) définies sur IN par : $I_0=\int_0^1 e^t dt$ et $I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$, pour tout entier naturel non nul.

1) Calculer I_0.
2) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .
3) On désigne par A le points de (C) d'abscisse1.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{OA}$ de la courbe (C) autour de l'axe $(O,\vec{i})$. Calculer V.

4) Montrer que (I_n) est décroissante et que pour tout n de IN, $0 \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C :

On considère la fonction F définie sur [1, + ∞ [par $F(x) = \int_1^{\ln x} t^2 e^t dt$.

1) Donner les valeurs de F(1) et F(e).

2) Montrer que F est dérivable sur [1, + ∞ [et que pour tout réel $x \ge 1$, on a $F'(x) = (\ln x)^2$.

3) Montrer que pour tout réel $x \ge$ e, on a : $x - e \le F(x) \le (x-e)(\ln x)^2$; puis déterminer $\lim\limits_{+\infty} F$.

4) Dresser le tableau de variations de F.



QCM

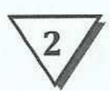
1) $e^{\ln a}+e^{-\ln b}=a+e^{\ln\frac{1}{b}}=a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}.$

Donc réponse c.

2)

$$(f(x))^2-(g(x))^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=1$$



FAUX OU VRAI

Donc réponse c.

3) **Vrai :**

$$\lim_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1-x}=\lim_{x\to1^+}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\searrow-\infty}e^{\overbrace{\frac{1}{1-x^2}}^{\nearrow-\infty}}\right)}_{\searrow 0}\underbrace{(1+x)}_{\searrow 2}=0$$

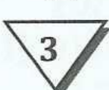
4) **Faux :**

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\ln(1+e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1 \text{ (on pose } X=e^x)$$

5) **Vrai :** $f(x)=3^x,\ x>0.$

$f(x)=3^x=e^{x\ln 3}\Rightarrow f'(x)=\ln(3).3^x$



APPLIQUER

1)

- $a(x)=e^x\times e^{\ln 4}$; Or $e^{\ln 4}=4$ d'où $a(x)=e^x\times 4$

Soit $a(x)=4e^x$

- $b(x)=(e^{\ln x})^{-4}$ or $e^{\ln x}=x$ d'où $b(x)=x^{-4}$,

soit $b(x)=\frac{1}{x^4}$.

- On sait que $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, d'où $c(x)=\ln 2+\ln e^x$ et $c(x)=\ln 2+x.$

2) L'équation s'écrit $e^x=\frac{3}{2}$.

Les deux membres de l'équation étant strictement positifs, on applique la fonction ln.

On a $e^x>0$ et $\frac{3}{2}>0$;on applique la fonction ln :

$\ln e^x=\ln\frac{3}{2}$, on sait que $\ln e^x=x$, d'où l'inéquation $\varphi=\left\{\ln\frac{3}{2}\right\}$.

On détermine l'ensemble de définition de l'inéquation.

L'inéquation existe si $2x-1>0$, donc l'inéquation est définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

On applique la fonction exp aux deux membres de l'inéquation ;la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $a\le b$ si et seulement si $e^a\le e^b$.

$e^{\ln(2x-1)}\le e^{-3}$,d'où $2x-1\le e^{-3}$; $2x\le e^{-3}+1$,

soit $x\le\frac{1}{2}(e^{-3}+1)$ et donc $\varphi=\left]\frac{1}{2},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^3}+1\right)\right]$.

On procède à un changement de variable en posant $X=e^x$ pour se ramener à une équation du second degré.

e^x Si $X=e^x$, on a $X^2=(e^x)^2=e^{2x}$ et l'équation devient $2X^2-3X-2=0$, équation du second degré qui a pour solutions $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$.

On revient ensuite à l'inconnue x.

La solution $X=-\frac{1}{2}$ ne convient pas car, pour tout x réel, e^x est strictement positif. On obtient la solution de l'équation initiale en posant $e^x=2$, d'où $x=\ln 2$. $\varphi=\{\ln 2\}$.

3)

a. f est le produit de deux fonctions et $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2)$.

b. f est le produit de deux fonctions et $f'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}(1-x)$.

pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$,donc $f'(x)$ est du signe $1-x$.

Si $x<1; 1-x>0$ et $f'(x)$ est strictement positive ;

Si $x>1$, $1-x<0$ et $f'(x)$ est strictement négative ;

Si $x=1$, $f'(x)=0$.

4) La fonction $x \mapsto 3x$ a pour dérivée 3 ; f peut s'écrire $f(x)=\frac{1}{3}\times 3e^{3x}$, donc est de la forme $\frac{1}{3}\times u'e^u$; une primitive de f est de la forme $\frac{1}{3}\times e^u$;

D'où $f(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+c; c\in\mathbb{R}$.

- f est le produit de deux fonctions et $f'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}(1-x)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de 1-x.
Si x<1, 1-x>0 et f'(x) est strictement positive ;
Si x>1, 1-x<0 et f'(x) est strictement négative ;
SI x=1, f'(x)=0.

- f est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec u>0, donc f a une primitive de la forme ln u.

f est un quotient. Si l'on pose $u(t)=e^t+2$, alors $u'(t)=e^t$. D'où $F(t)=\ln(e^t+2)+c; c\in\mathbb{R}$.

5)
a. f est le produit de deux fonctions et on a :
En $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$; et $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$;

D'où $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

En présence d'une forme indéterminée en $-\infty$, On peut penser à utiliser la limite de référence : $\lim_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0$ pour tout réel α positif.

en $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$: on est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour utiliser la limite de référence $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, avec α =1, il suffit de développer le produit, d'où $f(x)=xe^x+3e^x$; $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty}3e^x=0$,

d'où $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

b. f est la somme de deux fonctions et on a :
en $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$,

D'où $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

En présence d'une forme indéterminée en $+\infty$, on peut penser à utiliser la limite de référence : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$. Pour tout réel α positif. Pour faire, on cherche à factoriser x^α.

en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$;

On est en présence d'une forme indéterminée.
Pour utiliser la limite de référence $\lim_{x\to+\infty}=\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$, avec $\alpha=2$, on factorise par x^2 : $f(x)=x^2(\frac{e^x}{x^2}-1)$ et : $\lim_{x\to+\infty}=\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}=(\frac{e^x}{x^2}-1)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4 APPLIQUER

Simplifier :

$A=e^x\times e^{(-x)}$ $\quad B=e^x+2e^x$

$A=e^{(x-x)}=e^0=1$ $\quad B=(1+2)e^x=3e^x$

$C=(e^x)^3\times e^{(-2x)}$

$C=e^{3x}\times e^{(-2x)}=e^{(3x-2x)}=e^x$

$D=(e^x)^{(-2)}\times e^{3x}$

$D=e^{(-2x)}\times e^{3x}=e^{(-2x+3x)}=e^x$

$E=e^{2x}\times e^{-x}$ $\quad F=e^{3x+2}\times e^{1-2x}$

$E=e^{(2x-x)}=e^x$ $\quad F=e^{(3x+2)+(1-2x)}=e^{x+3}$

$G=\frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$

$G=\frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}=e^{2x+1}\times e^{2x}=e^{2x+1+2x}=e^{4x+1}$

$H=\frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$

$H=e^{(2x-1)-(2-x)}=e^{3x-3}$

$I=(e^4+e)/e$ $\quad J=e^{(-x)}e^{2x}/e$ $\quad K=e^2e^x$

$I=\frac{e^4}{e}+\frac{e}{e}=e^3+1$ $\quad J=e^{-x+2x-1}=e^{x-1}$ $\quad K=e^{2+x}$

5 APPLIQUER

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'ensemble de définition, sa dérivée, et son tableau de variation :

1) $f(x)=5x+2+e^x$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=5+e^x$

Comme $e^x>0$. On a $f'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Conclusion : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2)$f(x)=x\,e^x$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1\times e^x+xe^x=(x+1)e^x$

comme $e^x>0$, On a f'(x) est une signe de (x+1)

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

Le minimum de f est $f(-1)=-1\times e^{-1}=-\frac{1}{e}$

3) $f(x)=e^x/x$

f est définie, dérivable,

sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

Comme $e^x>0$, on a $f'(x)$ est du signe de (x+1)

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$

Le minimum de f est $f(1)=\frac{e^1}{1}=e$

4) $f(x)=(1-x)e^x$

f est définie, continue, et dérivable

sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=-1\times e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

Comme $e^x>0$, on a f'(x)est du signe de –x

Conclusion : f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Le maximum de f est $f(0)=(1-0)\times e^0=1$

5) $f(x)=x+e^{-x}$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1+(-1)e^{-x}=1-e^{-x}$

On a :

$1-e^x\geq 0\Leftrightarrow 1\geq e^{-x}\Leftrightarrow e^0\geq e^{-x}\Leftrightarrow 0\geq -x\Leftrightarrow x\geq 0$

On a $f'(x)\geq 0$ lorsque $x\geq 0$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Le minimum de f est $f(0)=0+e^0=1$

6) $f(x)=1/(e^x-1)$

f est définie $\Leftrightarrow e^x-1\neq 0$

or $e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

Comme $e^x>0$ et $(e^x-1)^2>0$, on a $f'(x)<0$ pour tout $\mathbb{R}^*$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

7) $f(x)=e^{-x^2+3}$

f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=-2xe^{-x^2+3}$

comme $e^{-x^2+3}>0$, on a f'(x) est du signe de -2x

f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Le maximum de f est $f(0)=e^{-0+3}=e^3$

8) $f(x)=e^{\frac{3}{x}}$

f est définie $\Leftrightarrow \frac{3}{x}$ est définie $\Leftrightarrow x\neq 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\{0\}$

f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}$

Comme $e^{\frac{3}{x}}>0$ et $\frac{3}{x^2}>0$, on a $f'(x)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

9) $f(x)=e^{4x}-e^{2-x}$

f est définie, continue et dérivable sur IR

$f'(x)=4e^{4x}-(-1)\times e^{2-x}=4e^{4x}+e^{2-x}$

Comme $e^{4x}>0$ et $e^{2-x}>0$,

on a $f'(x)>0$ pour tout $x\in IR$

f est strictement croissante sur IR

6 APPLIQUER

On considère la fonction g définie sur IR par

$g(x)=(x-1)e^x-1$

1) Calculer g'(x) et dresser le tableau de variations de g. $g'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x=xe^x$

Comme $e^x>0$ on a g'(x) est du signe de x.

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$; et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. le minimum de g est $g(0)=(0-1)\times e^0-1=-2$

2) a) justifier que g(x)<0 pour x<0.

Lorsque x<0,on a (x-1)<0 et donc $(x-1)e^x<0$

Par suite $(x-1)e^x-2<0 \Leftrightarrow g(x)<0$

b) Calculer g(0) et g(2) puis montrer que g(2)>0.

$g(0)=(0-1)e^0-1=-2$

et $g(2)=(2-1)e^2-1=e^2-1$

On sait que 2>0 et que la fonction exponentielle est croissante, donc $e^2>e^0 \Leftrightarrow e^2>1$

Donc g(2)>0

c) en déduire que l'équation g(x)=0 admet une seul solution α dans IR.

On montré que g(x)<0 sur $]-\infty;0[$, donc ne s'annule pas sur $]-\infty;0[$. G étant continue, strictement croissante sur $[0;2]$ elle réalise une bijection de $[0;2]$ dans $[-2;e^2-1]$,

comme $0\in[-2;e^2-1]$ d'après le théorème de la bijection ; il existe une unique valeur $\alpha\in[0;2]$ telle que g(x)=0.

3) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$.

Etude des variations de f

f est définie ; continue et dérivable sur IR.

$$f'(x)=\frac{(1\times(e^x+1)-x(e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

Par conséquent f' est du signe contraire de g.

et donc f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ est décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Puis montrer que $f(\alpha)=\alpha-1$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^\alpha+1}$$

Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)e^\alpha-1=0 \Leftrightarrow e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$

Donc :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=$$

$$\frac{\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\frac{\alpha-1}{\alpha}=\alpha-1$$

7 *S'ENTRAINER*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}e^{\frac{1}{x}}=0$

(théorème de composition) et donc

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=0$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=f(0)$,f est continue à gauche en 0.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=xe^{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

(théorème de composition).

F n'est donc pas continue à droite en 0.

(ζ) admet un point d'arrêt du coté gauche et une asymptote verticale (l'axe des données) du coté droit.

2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ (théorème de composition)

et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(théorème de multiplication)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

(théorème de composition)

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(théorème de multiplication)

b) $\forall$ x $\in$IR*

$$f(x)-(x+1)=xe^{\frac{1}{x}}-x-1=x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1$ (théorème de composition)

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=1-1=0$ (théorème d'addition)

Même conclusion en +∞.

Cela prouve que (C_f) admet en -∞ et en +∞, une asymptote oblique d'équation y=x+1

c) g est dérivable sur IR (différence de deux fonction dérivables sur IR).

$\forall x\in IR^*$ $g'(x)=e^x-1$.

Signe évident : si x<0, $e^x<1$, $e^x-1<0$ et si x>0, $e^x>0$, $e^x-1>0$.

g est dérivable sur IR donc sur $\left]-\infty;0\right]$ et sa dérivée est strictement négative sur $\left]-\infty;0\right[$ donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$.

g est dérivable sur IR donc $\left[0;+\infty\right[$ est sa dérivée est strictement positive sur $\left]0;+\infty\right[$ donc g est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

En 0, la dérivée de g s'annule en changeant de signe. G admet un minimum absolu égal à $g(0)=e^0-(0+1)=1-1=0$. Ceci prouve que, pour toute autre valeur de x, $g(x)>0$.

Pour tout réel x, $\dfrac{1}{x}\neq 0$ donc $g(\dfrac{1}{f})>0$ autrement dit, $e^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{x}+1\right)>0$, $e^{\frac{1}{x}}>\dfrac{1}{x}+1$.

- Si x <0 , $xe^{\frac{1}{x}}<1+x$ (multiplication par un nombre strictement négatif)
$f(x)<1+x$, (C) est au-dessous de (Δ).

- Si x >0 , $xe^{\frac{1}{x}}>1+x$ (multiplication par un nombre strictement positif)
$f(x)>1+x$, (C) est au-dessus de (Δ).

3) $\forall x\in IR^*$ $\dfrac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}$ et on a vu au 1 que $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\0<0}}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour en déduire que f est dérivable à gauche en 0 et (C) admet donc en 0 une demi-tangente de coefficient directeur 0.

Par ailleurs, f n'est évidemment pas dérivable à droite en 0 puisqu'elle n'est pas continue à droite en ce point.

4) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est donc dérivable sur IR*. Il importe peu de savoir dans quel ensemble elle prend ses valeurs puisque la fonction exponontielle est dérivable sur IR tout entier. La fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur IR*. Comme compossée de fonctions dérivables et comme la fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur IR, la fonction f est dérivable sur IR* comme produit de fonction dérivables sur cet ensemble.

$\forall x\in IR^*$

$f'(x)=1\times e^{\frac{1}{x}}+x\times e^{\frac{1}{x}}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$\forall x\in IR^*$ $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\times\dfrac{x-1}{x}$

$e^{\frac{1}{x}}$ est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{x-1}{x}$.

f est dérivable sur IR* donc sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left[1;+\infty\right[$ et sa dérivée est strictement positive donc

f'(x) est du signe de $\dfrac{x-1}{x}$.

5)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
x		−	0	+		+	
$\dfrac{x-1}{x}$		+	‖	−	0	+	

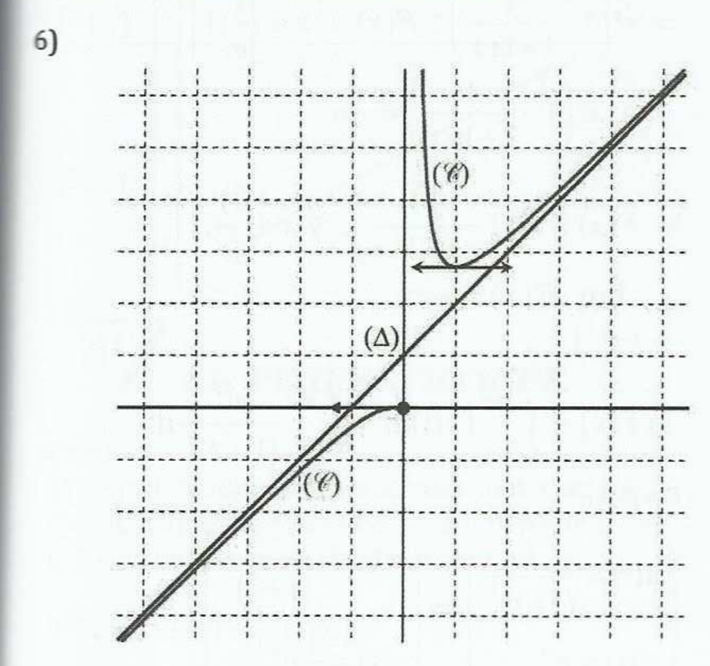
f est dérivable sur IR* donc sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left[1;+\infty\right[$ et sa dérivée est strictement positive sur sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left[1;+\infty\right[$ donc f est strictement croissante sur sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left[1;+\infty\right[$.

. f est dérivable sur IR* donc sur $]0;1]$ et sa dérivée est strictement négative sur $]0;1[$, donc f est strictement décroissante sur $]0;1]$.

. En 1, la dérivée de f s'annule en changeant de signe. F admet un extremum, plus précisément un minimum égal à f(1)=e.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	− 0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘ e	↗ $+\infty$

6)



8 S'ENTRAINER

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt,\ n \in IN^*$$

1) Monotonie :

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$$

$$= \int_n^{n+1} \underbrace{e^{-t}\sqrt{1+t}}_{\geq 0}\,dt \geq 0$$

$\Rightarrow$ (J_n) est croissante.

2) a) $(t+1)^2 = t^2 + 2t + 1 \geq t + 1$, $\forall\ t \geq 0$, en particuler si $t \geq 1$

$t+1 \geq \sqrt{t+1},\ \forall\ t\ \geq\ 1$

b) $t+1 \geq \sqrt{t+1} \Rightarrow (t+1)e^{-t} \geq \sqrt{t+1}e^{-t},\ \forall\ t\ \geq\ 1$

$\Rightarrow \int_1^n (t+1)e^{-t}dt \geq \int_1^n \sqrt{t+1}e^{-t}dt,\ (n\ \geq\ 1)$

$\Rightarrow I_n \geq J_n$

c) On pose : $\begin{pmatrix} u(t) = t+1 \\ v'(t) = e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow I_n = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_1^n - \int_1^n -e^{-t}dt$$

$$= -(n+1)e^{-n} + \frac{2}{e} - e^{-n} + \frac{1}{e}$$

$$= \frac{3}{e} - (n+2)e^{-n} \leq \frac{3}{e}$$

$J_n \leq I_n \leq \frac{3}{e} \Rightarrow (J_n)$ est majorée par $\frac{3}{e}$

d) (J_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

9 S'ENTRAINER

Soient f et g les fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x} \text{ et } g(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

Partie A

1) f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a :

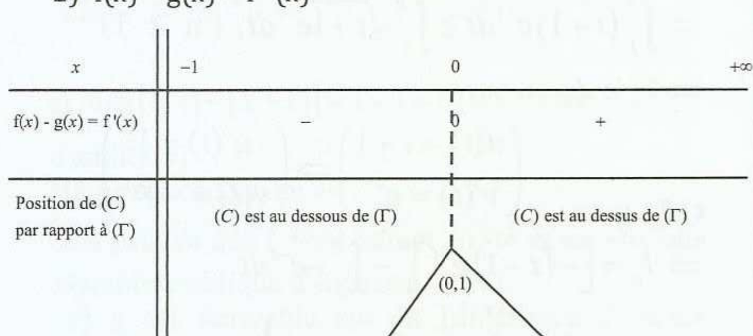
$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

x	−1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	−	0	+	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

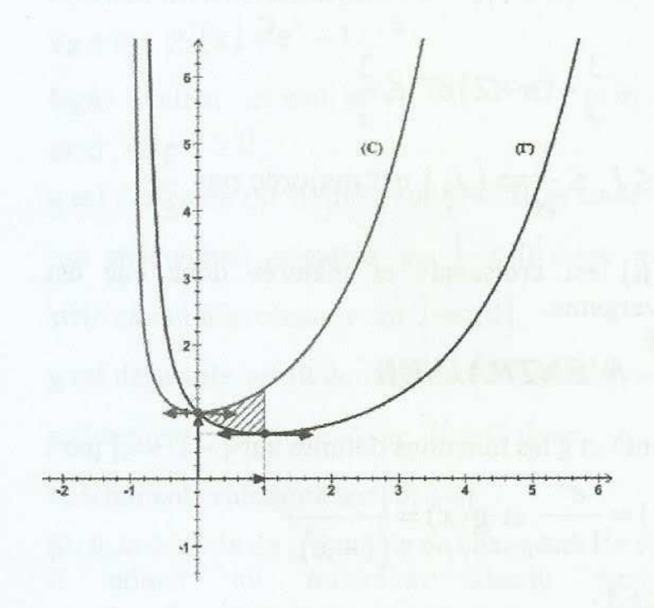
$$f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{1+x} - \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)e^x - xe^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{(1+x)^2} = g(x)$$

2) $f(x) - g(x) = f'(x)$



x	-1		0		$+\infty$
$f(x) - g(x) = f'(x)$		$-$	0	$+$	
Position de (C) par rapport à (Γ)		(C) est au dessous de (Γ)	(0,1)	(C) est au dessus de (Γ)	



3) $\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 f'(x)dx$

$= f(1) - f(0) = \frac{e}{2} - 1$ U.A

Partie B

Pour $x > \frac{1}{e}$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f^2(t)dt$.

1) $\begin{cases} f^2 \text{ est continue sur }]-1,+\infty[\\ \left(x \overset{u}{\mapsto} \ln x\right) \text{ est dérivable sur } \left]\frac{1}{e},+\infty\right[\\ u\left(\left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right) =]-1,+\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow F$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et on a :

$$F'(x) = u'(x) \times f^2(u(x)) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{2\ln x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{x}{(1+\ln x)^2}$$

2) $\int_0^{\ln x} f^2(t)dt = \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^2}dt$

Or $\ln x \le t \le 0 \Rightarrow 2\ln x \le 2t \Rightarrow x^2 \le e^{2t}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(1+t)^2} \le \frac{e^{2t}}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln x} \frac{x^2}{(1+t)^2}dt \underset{\text{car } \ln x \le 0}{\ge} \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^2}dt$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^2}{1+t}\right]_0^{\ln x} \ge F(x)$$

$$\Rightarrow x^2\left(1 - \frac{1}{1+\ln x}\right) \ge F(x), \forall x \in \left]\frac{1}{e},1\right]$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} x^2\left(1 - \frac{1}{1+\ln x}\right) = -\infty$$

et $F(x) \le x^2\left(1 - \frac{1}{1+\ln x}\right), \ \forall x \in \left]\frac{1}{e},1\right]$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x) = -\infty$$

3) $F(x) = \int_0^{\ln x} f^2(t)dt = \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^2}dt$

On pose :

$$\begin{pmatrix} u(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \\ v'(t) = e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} \\ v(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

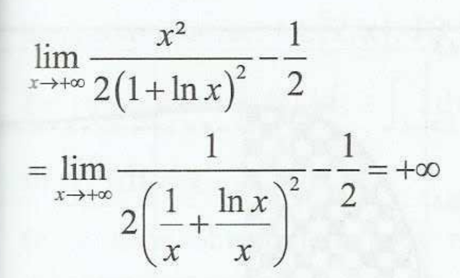
$$\Rightarrow F(x) = \left[\frac{e^{2t}}{2(1+t)^2}\right]_0^{\ln x} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3}dt$$

$$= \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3}dt, \forall x > \frac{1}{e}$$

4) $\forall x \ge 1$, on a : $\int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3}dt \ge 0$

(On intègre une fonction continue et positive dans un sens positi)

$$\Rightarrow F(x) \ge \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2}, \forall x \ge 1$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)^2} - \frac{1}{2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

x	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

10 SE PERFECTIONNER

Partie A

1°) Par définition de F on a, pour tout x réel, $F'(x) = f(x)$ et, d'après le tableau des variations de f, $f(x) \geq 0$. On en déduit que F est croissante sur R.

2°) On a : $F(3) = \int_2^3 f(t)dt$.

D'après les variations de f, pour tout $t \in [2 ; 3]$, $0 \leq f(t) \leq 4e^{-2}$.

On en déduit, par intégration sur [2 ; 3], que : $\int_2^3 0dt \leq \int_2^3 f(t)dt \leq \int_2^3 4e^{-2}dt$

D'où : $0 \leq F(3) \leq [4e^{-2}t]_2^3$ ou bien :

$0 \leq F(3) \leq 4e^{-2} \times 3 - 4e^{-2} \times 2$

On obtient bien l'encadrement : $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$

Partie B.

1°) a) f est bien dérivable sur R car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur R.

Pour tout x réel, $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x, f '(x) est du même signe que $(2x - x^2)$.

Le trinôme $-x^2 + 2x$ a deux racines 0 et 2 et il est du signe du facteur de x^2 (négatif) à l'extérieur des racines.

On en déduit que f ' est négative sur]- ∞ ; 0], positive sur [0 ; 2] et négative sur [2 ; + ∞[d'où f est décroissante sur]- ∞ ; 0], croissante sur [0 ; 2] et décroissante sur [2 ; + ∞[.

De plus $f(0) = 0^2(e^0) = 0$ et $f(2) = 2^2(e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Donc les variations de f sont bien celles données dans la partie A.

b) On étudie le signe de f(x) – g(x) pour tout x réel.

$f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 1)$

$= e^{-x}(x - 1)(x + 1)$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x, f(x) – g(x) est du même signe que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Le trinôme $x^2 - 1$ a deux racines – 1 et 1 et il est du signe du facteur de x^2 (positif) à l'extérieur des racines.

On en déduit que :

Pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$ d'où (C) est au dessus de (Γ)

Pour x = – 1 ou x = 1, f(x) – g(x) = 0 d'où (C) et (Γ) se « coupent »

Pour $x \in]-1 ; 1[$, $f(x) - g(x) < 0$ d'où (C) est au dessous de (Γ).

2) a) H est dérivable sur R car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur R.

Pour tout x réel,

$H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} + (-x^2 - 2x - 1)(-e^{-x})$

$= e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x + 1)$

$= e^{-x}(x^2 - 1) = h(x)$

Donc H est bien une primitive de h sur R.

b) $A(\alpha) = \int_1^\alpha (f(t) - g(t))dt$ car, pour $x \geq 1$, (C) est au dessus de (Γ)

$= \int_1^\alpha (t^2e^{-t} - e^{-t})dt = \int_1^\alpha e^{-t}(t^2 - 1)dt$

$= \int_1^\alpha h(t)dt = [H(t)]_1^\alpha$ d'après le résultat de la question précédente

$= H(\alpha) - H(1) = (-\alpha^2 - 2\alpha - 1)e^{-\alpha} - (-1^2 - 2 - 1)e^{-1}$

Donc $A(\alpha) = (-\alpha^2 - 2\alpha - 1)e^{-\alpha} + 4e^{-1}$.

(Voir la partie coloriée de la figure ci-dessous)

c) $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \left(-\frac{\alpha^2}{e^\alpha} - 2\frac{\alpha}{e^\alpha} + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e}$

Justifications : $\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha^2}{e^\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha}{e^\alpha} = 0$ d'après le théorème de la croissance comparée

$\lim e^\alpha = +\infty$ d'où $\lim \frac{1}{e^\alpha} = 0$ d'après le théorème des limites de quotients

$\alpha \to +\infty$ $\alpha \to +\infty$

On en déduit le résultat final par le théorème des limites de produits et de sommes.

3) Voir la figure ci-dessous

a) Le point P est à l'intersection de la courbe (C) de f et de la droite d'équation y = m.

Le point Q est à l'intersection de la courbe (Γ) de g et de la droite d'équation y = m.

On a : $m = y_P = f(x_P)$ et $m = y_Q = g(x_Q)$ donc $f(x_P) = g(x_Q)$.

b) On a $f(x_P) = x_P^2\, e^{-x_P}$ et $g(x_Q) = g(x_P - 1)$ car

$PQ = 1 = x_P - x_Q$

$= e^{-(x_P-1)}$

On doit avoir $f(x_P) = g(x_Q)$ d'où $x_P^2\, e^{-x_P} = e^{-(x_P-1)}$

$x_P^2\, e^{-x_P} = e^{-x_P} \times e \to$ $x_P^2 = e$

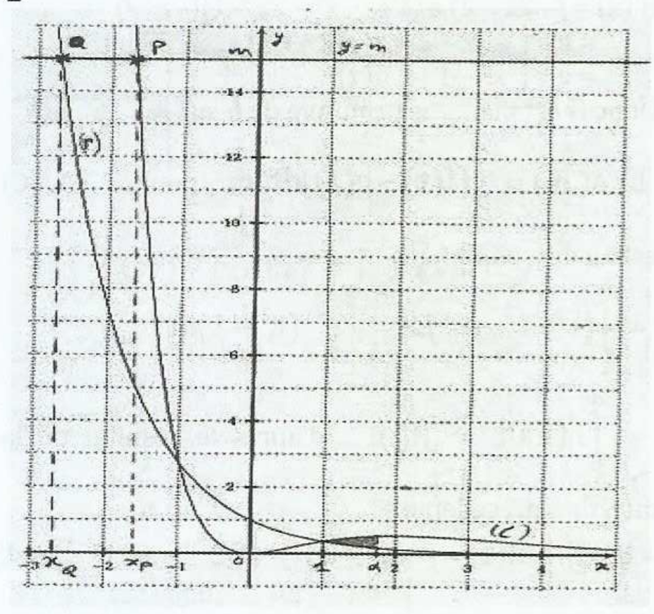
Comme $x_P \in]-\infty ; -1[$, on en déduit que

$x_P = -\sqrt{e} \approx -1{,}65$.

Voir la figure demandée ci-dessous.

(la valeur exacte de m est $f(-\sqrt{e}) = e \times e^{\sqrt{e}}$, la valeur approchée à 10^{-2} près est 14,14)

£





SE PERFECTIONNER

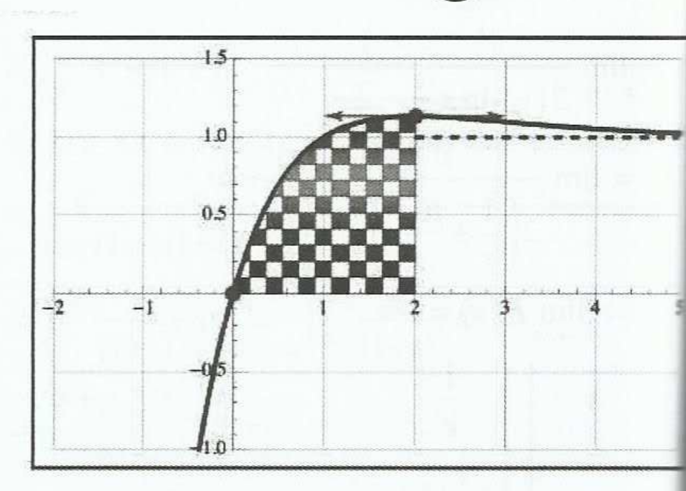
Partie A :

1) Le tableau de variations permet d'affirmer que la droite d'équation y=1 comme asymptote verticale en $+\infty$.

Comme f(0)=0, alors la courbe C passe par l'origine du repère.

Ensuite elle passe par le point de coordonnées $(2;1+e^{-2})$ et en ce admet une tangente horizontale.

On obtient :



2) a) La fonction f est croissante sur $[0;2]$ donc $f(x) \geq f(0)$ pour $x \in [0;2]$.

Comme f(0)=0, alors $f(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in [0;2]$.

Ainsi comme $0 < 2$, alors on sait que $g(2) = \int_0^2 f(t)dt$ est l'aire du domaine du plan compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x=2.

b) La fonction f est croissante sur $[0;2]$ donc $f(0) \leq f(x) \leq f(0)$ pour $x \in [0;2]$.

Ainsi $\int_0^2 f(0)dt \leq \int_0^2 f(t)dt \leq \int_0^2 f(2)dt$.

Or f(0)=0 et $f(2)=1+e^{-2}$

donc $0(2-0) \leq g(2) \leq (2-0)(1+e^{-2})$ et ainsi $0 \leq g(2) \leq 2(1+e^{-2})$.

On sait que $2 \leq e \leq 3$ donc $0 < 4 \leq e^2 \leq 9$ d'où $\frac{1}{9} < \frac{1}{e^2} \leq \frac{1}{4}$ d'où $1+e^{-2} \leq \frac{5}{4}$ car $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Par suite $2(1+e^{-2}) \leq 2 \times \frac{5}{4}$ et

ainsi $2(1+e^{-2}) \leq 2{,}5$.

Finalement on obtient donc $0 \leq g(2) \leq 2{,}5$.

3)a) La fonction f est décroissante sur $[2;+\infty[$, $f(t) \geq \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Donc pour tout réel $t \in [2;+\infty[$, $f(t) \geq 1$.

Soit x un réel tel que $x \geq 2$.

On a $[2;x[\subset [2;+\infty[$,

donc pour tout réel $t\in[2;x]$, $f(t)\geq 1$.

Par conséquent $\int_2^x f(t)dt \geq \int_2^x 1dt$.

Or $\int_2^x 1dt = x-2$.

On a donc obtenu que pour tout réel $x\geq 2$, $\int_2^x f(t)dt \geq x-2$.

Remarquons que pour tout réel $x\geq 2$,

$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$.

D'après la question 2.b). on sait que $\int_0^2 f(t)dt\geq 0$

On en déduit donc que $g(x)\geq \int_2^x f(t)dt$ et ainsi $g(x)\geq x-2$.

b) On sait que pour tout réel $x\geq 2$, $g(x)\geq x-2$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

4) Pour tout réel x, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Or comme f est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ elle est continue sur $]-\infty;+\infty[$.

On sait donc que pour tout réel x, $g'(x)=f(x)$.

Or on a montré que $f(x)\geq 0$ pour $x\in[0,2[$ et $f(x)\geq 1$ pour $x\in[2;+\infty[$.

Par suite $f(x)\geq 0$ pour tout réel $x\in[0;+\infty[$.

On peut même affirmer que f(x)>0 pour $x\in[0;+\infty[$ et $f(x)\geq 1$ pour $x\in[2;+\infty[$.

Par suite $g'(x)>0$ pour $x\in]0;+\infty[$.

Ensuite on sait que la fonction f est strictement croissante sur $[-\infty;0]$ donc $f(x)<f(0)$ pout tout réel x<0.

Ainsi f(x)<0 pour x<0.

On a donc g'(x)<0 : la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Partie B :

1) On a $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt=\int_0^x v(t)u(t)dt$ on posant $\begin{cases}v(t)=t-1\\u'(t)=e^{-t}\end{cases}$

On obtient $\begin{cases}v'(t)=1\\u(t)=-e^{-t}\end{cases}$ les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u' et v' sont continues.

La formule d'intégration par parties donne alors.

$$\int_0^x (t-1)e^{-t}dt=\left[(t-1)(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x 1\times(e^{-t})dt$$

$$=\left[-(t-1)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt$$

Or $\int_0^x e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x$

d'où $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt=\left[-(t-1)e^{-t}-e^{t}-e^{-t}\right]_0^x$

$$=\left[-te^{-t}\right]_0^x=-xe^{-x}.$$

2) On a $g(x)=\int_0^x ((t-1)e^{-t}+1)dt$

$$=\int_0^x (1-t)e^{-t}dt+\int_0^x 1dt$$

par linéarité de l'intégrale.

Or on a montré que $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt=-xe^{-x}$ et on a $\int_0^x 1dt=x$ donc $g(x)=-xe^{-x}+x=x(1-e^{-x})$

3) Pour tout réel x, $g(x)=x(1-e^{-x})$.

Or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, donc par composition, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x})=-\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

Par produit de limite,

on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1-e^{-x})=+\infty$

Finalement $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.



12 SE PERFECTIONNER

Partie A

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

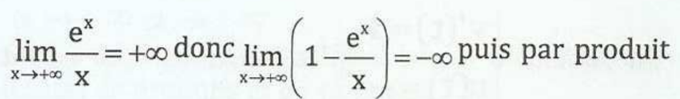
$f(x)=x-e^{x}$ et $g(x)=(-1x)e^{x}$

On appelle (C) et (C') leurs courbes respectives.

1. a. Déterminer les limites des fonctions f et g en +∞ et en -∞.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^{x})=-\infty$.

Soit x un réel non nul, $f(x)=x\left(1-\frac{e^{x}}{x}\right)$



$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$ puis par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

Aussi, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}[1-x]=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

b. Montrer que la droite d'équation y=x est asymptote à (C).

Soit x un réel,

$f(x)-x=-e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

Donc la droite d'équation y = x est asymptote à (C) en -∞.

c. Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur l'ensemble des nombres réels.

F est la somme de deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$, dérivable sur IR donc f est dérivables sur IR.

Soit x un réel, $f'(x)=1-e^x$. $f'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow 1\geq e^x\Leftrightarrow 0\geq x$

f est donc strictement croissante sur IR_- et strictement décroissante sur IR_+.

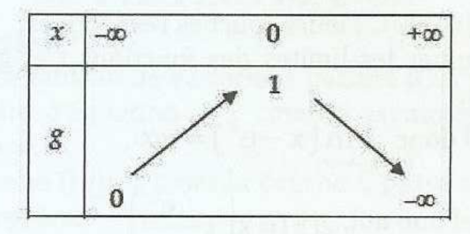
g est le produit de deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$, dérivable sur IR donc g est dérivables sur IR.

Soit x un réel, $g(x)=-xe^x$,

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow -xe^x\geq 0\Leftrightarrow 0\geq x$.

g est donc strictement croissante sur IR_- et strictement décroissante sur IR_+.

x	−∞	0	+∞
f	−∞ ↗	−1	↘ −∞



x	−∞	0	+∞
g	0 ↗	1	↘ −∞

2. Pour tout réel x, on pose h(x)=f(x)-g(x).

a. Montrer que, pour tout réel x, $h'(x)=1-g(x)$.

Soit x un réel x, $h(x)=f(x)-g(x)=x-2e^x+xe^x$

F et g sont dérivables donc par somme de fonctions dérivables sur IR, h est dérivable sur IR.

Soit x un réel x,

$h'(x)=1-2e^x+xe^x+e^x=1-e^x+xe^x$

$=1+(x-1)e^x=1-(1-x)e^x$.

Pour tout réel x, $h(x)=1-g(x)$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction h, sur l'ensemble des nombres réels.

D'après la question 1d, pour tout réel x, $g(x)\leq 1$.

Donc pour tout réel x, $1-g(x)\geq 0$. et h est strictement croissante sur IR.

c. démontrer que les courbes (C) et (C′) admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée α, appartient à l'intervalle $[1,2]$.

Soit M un point du plan de coordonnées (x,y).

$M(x,y)\in(C)\cap(C')$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\f(x)=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\h(x)=0\end{cases}$

Or d'après la question précédente, h est continue strictement croissante sur IR donc h réalise une bijection. De plus, h(1) h(2) <0 donc d'après le théorème de la bijection, l'équation h(x)=0 admet une unique solution A dont l'abscisse est α.

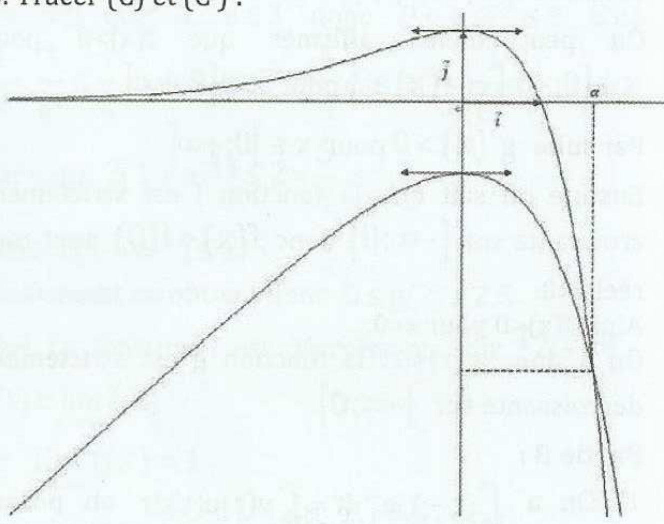
d. Etudier, selon les valeurs de x, la position relative de (C) et de (C′).

h est strictement croissante sur IR et h(α)=0

Donc, pour tout réel $x\leq\alpha$, $h(x)\leq 0$ donc (C) est en dessous de (C′).

Donc, pour tout réel $x\geq\alpha$, $h(x)\geq 0$ donc (C) est en dessus de (C′).

3. Tracer (C) et (C′) :



Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$S_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)$

1. A l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.

$S_{20} \approx 0{,}352$.

2. a. En utilisant le tableau de variation de la fonction g définie dans la partie A. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;1[$; $e^x \le \frac{1}{1-x}$.

D'après la partie A, pour tout réel x, $(1-x)e^x \le 1$.

Or pour tout x appartenant à $]0;1[$, $1-x>0$

donc par quotient, $e^x \le \frac{1}{1-x}$.

Pour tout réel x appartenant à $]0;1[$, $1-x>0$.

b. En déduire que pour tout nombre entier $k \ge 2$, $e^{\frac{1}{k}} \le \frac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \ge 2$, $\frac{1}{k} \ge \ln(\frac{k}{k-1})$.

Soit k un nombre entier supérieur à 2, $0<\frac{1}{k}<1$.

En posant, $x=\frac{1}{k}$, et en utilisant la question précédente $e^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{k}} \le \frac{k}{k-1}$

Aussi, pour tout nombre entier $k \ge 2$, $e^{\frac{1}{k}} \le \frac{k}{k-1}$.

La fonction in est strictement croissante sur IR_+^*

donc $e^{\frac{1}{k}} \le \frac{k}{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \le \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

c. Pour tout entier $n \ge 2$, calculer, $S_n - S_{n-1}$, En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

Soit $n \ge 2$,

$S_n - S_{n-1} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)-\left[1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}\ln(n-1)\right]$

$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}-\ln(n)+\ln(n-1) = \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

D'après la question précédente, avec k=n, $n \ge 2$ alors $\frac{1}{n} \le \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \le 0$

et $S_{n+1} - S_n \le 0$.

Pour tout $n \ge 2$, la suite (S_n) est décroissante.

3. Pour tout entier $n>20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$

a. Vérifier que pour tout entier $n>20$, $u_n \ge 0$.

Pour tout $n \ge 2$, la suite (S_n) est décroissante. Donc pour tout $n>20$, $S_{20} \le S_n$ donc $S_{20} - S_n \le 0$ et par suite pour tout entier $n>20$, $u_n \ge 0$.

b. En utilisant le tableau de variation de la partie A, démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, $1+x \le e^x$

D'après le tableau de variation de la partie A, pour tout réel x, $f(x) \le -1$.

Soit x un réel,

$f(x) \le -1 \Leftrightarrow x - e^x \le -1 \Leftrightarrow x+1 \le e^x$.

c. En déduire que pour tout nombre entier $k \ge 1$, $\frac{k+1}{k} \le \frac{1}{k}$.

Soit x , en posant $x=\frac{1}{k}$, x appartenant alors à $]0;1]$ donc en appliquant la proposition précédente, $1+\frac{1}{k} \le e^{\frac{1}{k}}$, donc $\frac{k+1}{k} \le e^{\frac{1}{k}}$.

Pour tout nombre entier $k \ge 1$ $\frac{k+1}{k} \le e^{\frac{1}{k}}$

La fonction ln est strictement croissante sur IR_+^*

donc :Pour tout nombre entier $k \ge 1$

$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \le \frac{1}{k}$

d. vérifier que pour tout entier naturel n>20,

$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(1+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+...+\frac{1}{n}\right)$.

Soit un entier $n>20$,

$u_n = S_{20} - S_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{20}-\ln 20$

$-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{n}-\ln n) = -\frac{1}{n}-...-\frac{1}{21}-\ln 20+\ln n$

$=\ln(\frac{n}{20})-(\frac{1}{n}+...+\frac{1}{21})$

Donc pour tout entier naturel $n>20$,

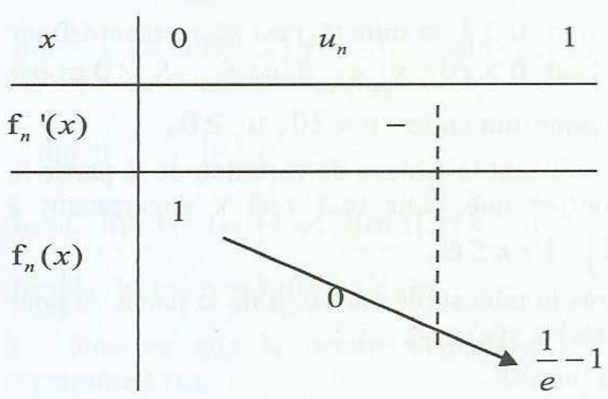
$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+...+\frac{1}{n}\right)$

13 SUR LE CHEMIN DU BAC

$f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$, $\forall\, x \in [0,\, 1]$.

1) f_n est dérivable sur [0, 1] et on a :

$f_n\,'(x) = -e^{-x} - (2n+1)x^{2n} < 0$



2) f_n est continue et strictement décroissante sur [0, 1] donc f_n réalise une bijection de [0, 1] sur $\left[\frac{1}{e}-1,1\right]$

$0 \in \left]\frac{1}{e}-1,1\right[\Rightarrow$ l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

3) a) $f_{n+1}(x)$ -

4) $f_n(x)=\left(e^{-x}-x^{2n+3}\right)-\left(e^{-x}-x^{2n+1}\right)$

$$=x^{2n+1}-x^{2n+3}$$

$$=x^{2n+1}\left(1-x^2\right)>0,\ \forall x\in]0,1[$$

5) $\Rightarrow f_{n+1}(x)>f_n(x),\ \forall x \in]0,1[$.

b) $u_{n+1} \in]0,1[\Rightarrow$

$f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)>f_n\left(u_{n+1}\right) \Rightarrow f_n\left(u_{n+1}\right)<0$.

c) $f_n\left(u_{n+1}\right)<0 \Rightarrow f_n\left(u_{n+1}\right)<f_n\left(u_n\right)$, or f_n est strictement décroissante sur [0, 1] $\Rightarrow u_{n+1}>u_n$

$\Rightarrow \left(u_n\right)$ est croissante.

De plus on a $\left(u_n\right)$ est majorée par 1 donc $\left(u_n\right)$ est convergente.

6) a)

$$f_n\left(u_n\right)=e^{-u_n}-\left(u_n\right)^{2n+1}=0 \Leftrightarrow e^{-u_n}=\left(u_n\right)^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow -u_n=\ln\left[\left(u_n\right)^{2n+1}\right]=(2n+1)\ln\left(u_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(u_n\right)=-\frac{u_n}{2n+1}$$

b) Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; $\ell\in[0,1]$

$$\ln(u_n)=-\frac{u_n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\ln\left(u_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{u_n}{2n+1}\right)=\left(\frac{\ell}{+\infty}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\ln\left(u_n\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

14 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit f la fonction définie sur IR₊ par

$$f(x)=x+(x-1)e^{-x}$$

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+(x-1)e^{-x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{\nearrow+\infty}+\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\searrow 0}-\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\searrow 0}=+\infty.$$

b)

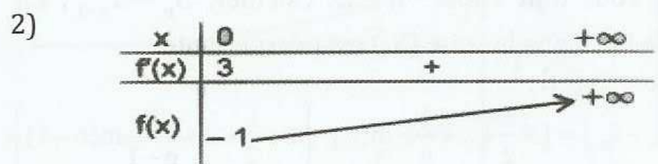
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\searrow 0}-\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\searrow 0}=0$$

$\Rightarrow \Delta$: y = x est asymptote à la courbe ζ au voisinage de + ∞.

c) $f(x)-x=(x-1)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$

x	0		1	
f(x) − x		−	0	+
Position de (ζ) par rapport à Δ		(ζ) est au dessous de Δ	(1,1)	(ζ) est au dessus de Δ

2)



a) f est continue et strictement croissante sur [0, + ∞[donc f réalise une bijection de [0, + ∞[sur [-1, + ∞[.

⇒ l'équation f(x) = 0 admet, dans IR₊, une seule solution α.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{e}}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

b) soit (t) la demi-tangente à (ζ) au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ (t) : $f'_d(0)x + f(0) = 3x - 1, x \geq 0$

3) $u_n = \int_\alpha^1 |f(x)|^n dx$

$$u_1 = \int_\alpha^1 |f(x)| dx = \int_\alpha^1 x + (x-1)e^{-x} dx$$

a) $$= \int_\alpha^1 x dx + \underbrace{\int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx}_{I} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 + I$$

$$= \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) + I$$

Calculons I, à l'aide d'une intégration par parties
On pose :

$$\begin{pmatrix} u(x) = x-1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$I = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 -e^{-x}dx$$

$$= (\alpha - 1)e^{-\alpha} - \left[e^{-x}\right]_\alpha^1.$$

$$= (\alpha-1)e^{-\alpha} - \left(e^{-1} - e^{-\alpha}\right) = \alpha e^{-\alpha} - \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow u_1 = \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) + I = \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}.$$

u_1 est l'aire de la partie du plan limitée par (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = α et x = 1.

b) $\forall\ \alpha \leq x \leq 1$, on a : $0 \leq f(x) \leq x \Rightarrow 0 \leq |f(x)|^n \leq x^n$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n = \int_\alpha^1 |f(x)|^n dx \leq \int_\alpha^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 \Rightarrow 0 \leq u_n$$

$$\leq \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

c) $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

15 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A

$$g(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) - \frac{1}{e^x+1}.$$

1. $\lim\limits_{+\infty} g = 0.$

2. $$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - \frac{1}{e^x+1} = -\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

3. g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{+\infty} g ; \lim\limits_{-\infty} g\right[= \left]0 ; \lim\limits_{-\infty} g\right[$

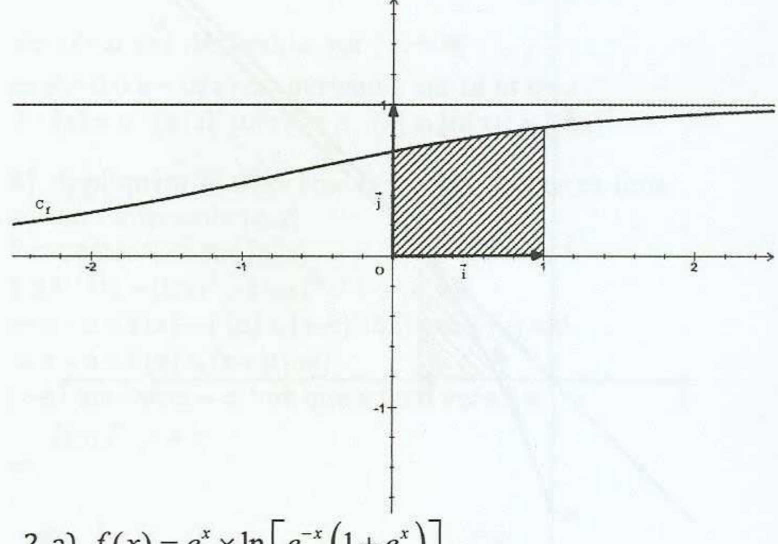
$\Rightarrow g(x) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Partie B

$$f(x) = e^x \times \ln\left(1+e^{-x}\right).$$

1. $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$\Rightarrow$ $\Delta : y = 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.



2. a) $f(x) = e^x \times \ln\left[e^{-x}\left(1+e^x\right)\right]$

$$= e^x \times \left[\ln\left(e^{-x}\right) + \ln\left(1+e^x\right)\right].$$

$$= -xe^x + e^x \times \ln\left(1+e^x\right)$$

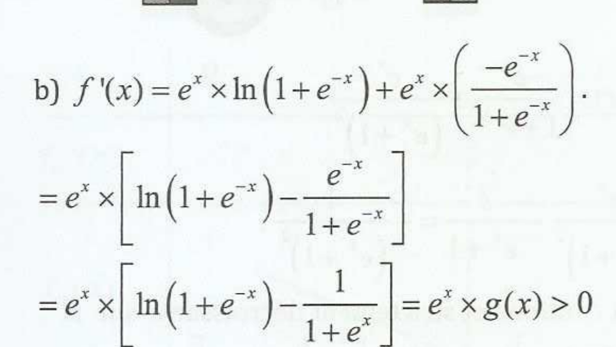
b) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x + e^x \ln\left(1+e^x\right) = 0.$

3. a) $\left(x \xrightarrow{u} e^x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\left(x \xrightarrow{v} 1+e^{-x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f = u \times \ln\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.



b) $f'(x) = e^x \times \ln\left(1+e^{-x}\right) + e^x \times \left(\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$.

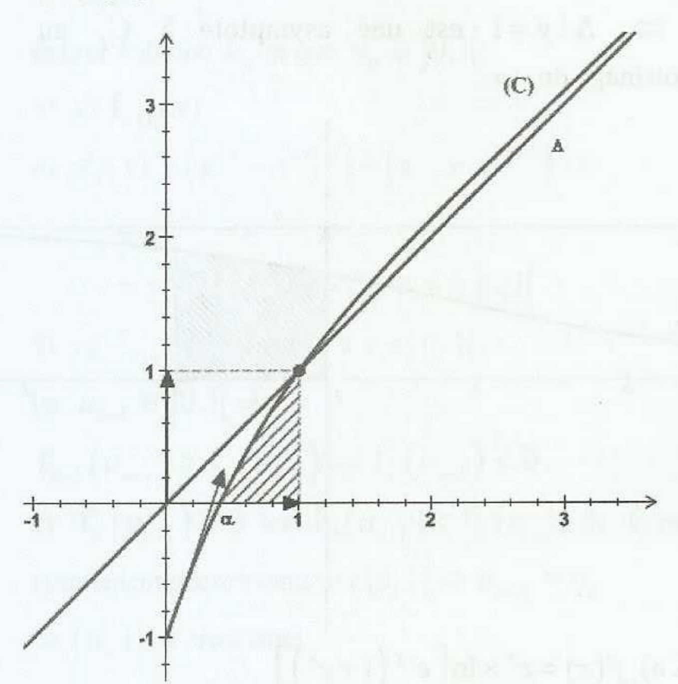
$= e^x \times \left[\ln\left(1+e^{-x}\right) - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]$

$= e^x \times \left[\ln\left(1+e^{-x}\right) - \dfrac{1}{1+e^{x}}\right] = e^x \times g(x) > 0$

c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$0 \nearrow$	1

4. Traçage :



Partie C

$u_n = \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+e^{-x}\right) dx \; ; n \in \mathbb{N}^*$.

1. a)

$f(x) - f'(x) = e^x \times \ln\left(1+e^{-x}\right) - e^x \times g(x) =$

$e^x \times \left(\ln\left(1+e^{-x}\right) - g(x)\right) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$\Rightarrow F(x) - f(x) = \ln\left(e^x+1\right)$

$\Rightarrow F(x) = f(x) + \ln\left(e^x+1\right) = e^x \times \ln\left(1+e^{-x}\right) + \ln\left(e^x+1\right)$

b) Voir représentation graphique.

c) $u_1 = \int_0^1 e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) dx = F(1) - F(0)$

$= e\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right) + \ln(e+1) - 2\ln 2$

$= (e+1)\ln(e+1) - e - 2\ln 2$.

2. a) $n < n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow \dfrac{x}{n} > \dfrac{x}{n+1}$

$\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow e^{\frac{x}{n}} > e^{\frac{x}{n+1}} \Rightarrow e^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+e^{-x}\right) > e^{\frac{x}{n+1}} \ln\left(1+e^{-x}\right)$

$\Rightarrow \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+e^{-x}\right) dx > \int_0^1 e^{\frac{x}{n+1}} \ln\left(1+e^{-x}\right) dx$

$\Rightarrow u_n > u_{n+1} \Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

b) On montre que $u_n = \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+e^{-x}\right) dx \geq 0$, on aura donc (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

c) $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{e} \leq 1+e^{-x} \leq 2 \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right) \leq \ln\left(1+e^{-x}\right) \leq \ln 2$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{n}} \times \ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right) \leq e^{\frac{x}{n}} \times \ln\left(1+e^{-x}\right) \leq e^{\frac{x}{n}} \times \ln 2$

$\Rightarrow \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \times \ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right) dx \leq$

$\int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \times \ln\left(1+e^{-x}\right) dx \leq \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \times \ln 2 dx$

$\Rightarrow n\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \leq u_n \leq n\ln 2\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right) \leq \ell \leq \ln 2$.

16 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A

1) a) f(0) = 0 ; f ′ (0) = 1 ; f ′ (-2) = 0.

b) f(0) = 0 ⇔ b = 0.

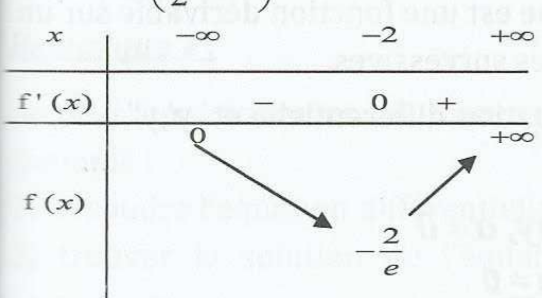
$f'(x) = ae^{cx} + c(ax+b)e^{cx} = (acx + a + bc)e^{cx}$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow a + bc = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow -2ac + a + bc = 0 \Leftrightarrow c = ½.$

2) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$

a) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{x}{2}}$



b) $\lim\limits_{-\infty} f = 0 \Rightarrow (O,\vec{i}) : y = 0$ est une asymptote au voisinage de - ∞.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ (C) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de + ∞.

Partie B

1) $I_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1$

2) $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$

On pose $\begin{pmatrix} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = e^t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$I_{n+1} = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n e^t dt = e - (n+1)I_n$

3) $V = \pi\int_0^1 \left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^2 e^x dx = \pi I_2$ u.v

$or\ I_2 = e - 2I_1 = e - 2(e - I_0) = e - 2(e - e + 1)$

$= e - 2$

$\Rightarrow V = \pi(e - 2)$ u.v

4) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt$

$= \int_0^1 \underbrace{t^n(t-1)e^t}_{\leq 0} dt \leq 0 \Rightarrow (I_n)$ est décroissante.

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^t \leq e \Rightarrow t^n e^t \leq et^n$

$\Rightarrow \int_0^1 t^n e^t dt \leq e\int_0^1 t^n dt \Rightarrow I_n \leq \frac{e}{n+1}$

De plus on a $I_n \geq 0$ car $t^n e^t \geq 0\ \forall$ t $\in [0,1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (Théorème des gendarmes)

Partie C

$F(x) = \int_1^{\ln x} t^2 e^t dt$, $x \in [1, +\infty[$

1) $F(1) = \int_1^{\ln 1} t^2 e^t dt = \int_1^0 t^2 e^t dt = -I_2 = 2 - e$

$F(e) = \int_1^{\ln e} t^2 e^t dt = \int_1^1 t^2 e^t dt = 0$

2) $\left(x \overset{\varphi}{\mapsto} x^2 e^x\right)$ est continue sur IR

SoitG une primitive de jsur IR,

on a $F(x) = G(\ln x) - G(1)$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \ln x\right) \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ \text{G est dérivable sur IR} \\ u([1, +\infty[) \subset \text{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow G \circ u$ est dérivable sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow$ F = G o u – G(1) est dérivable sur IR et on a :

$F'(x) = u'(x)\, G'(u(x)) = u'(x)\, \varphi(u(x)) = (\ln x)^2$

3) Appliquant le théoreme des accroissements finis à F sur l'intervalle [e, x]

F est dérivable sur [e, x]

$1 \leq F'(t) = (\ln t)^2 \leq (\ln x)^2\ \forall\ t \in [e, x]$

$\Rightarrow x - e \leq F(x) - F(e) \leq (x-e)(\ln x)^2$, or F(e) = 0

$\Rightarrow x - e \leq F(x) \leq (x-e)(\ln x)^2$

(x-e) tend vers + ∞ lors que x tend vers + ∞

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} F = +\infty$

x	1	e	$+\infty$
$F'(x)$		+	
$F(x)$	$2-e$	0	$+\infty$

Equations différentielles

I) Résumé du cours :

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir cette fonction et ses dérivées successives.

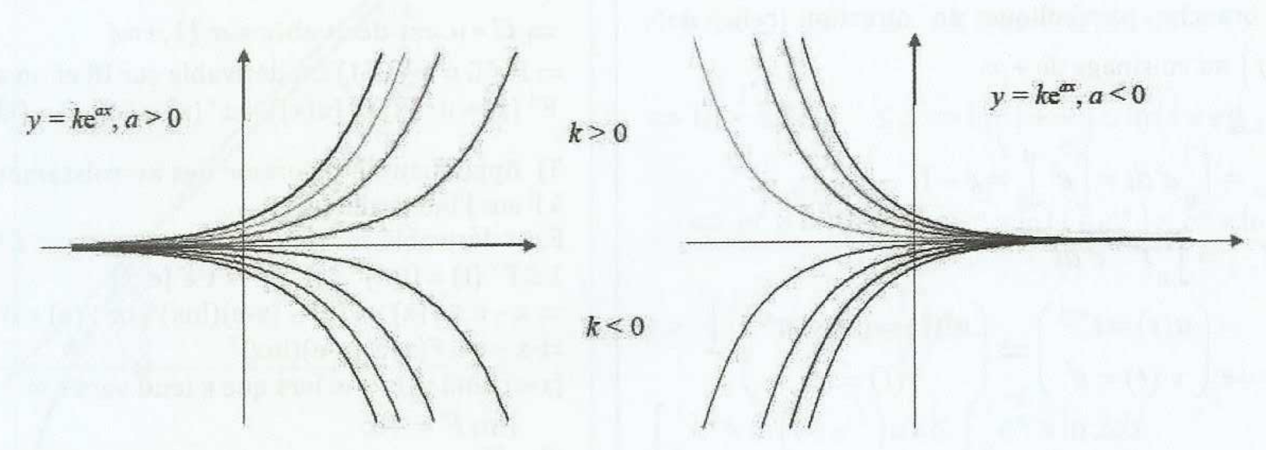
On a l'habitude d'appeler y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y',y'' , $y^{(3)}$, ... $y^{(n)}$ ses dérivées successives.

A) Résolution de l'équation différentielle y'=ay, $a \neq 0$

Théorème 1 : solution de l'équation différentielle y'=ay, $a \neq 0$

Soit a un réel non nul. Les solutions dans R de l'équation différentielle y'=ay sont les Fonctions f_k définies par f_k (x) = k e^{ax} ou k est un réel.

Illustration



Théorème2 :

Condition initiale

Pour tout couple de réels $(x_0 : y_0)$, l'équation y' = ay admet une unique solution f_k telle que

$f_k(x_0) = y_0$.

La condition $f_k(x_0) = y_0$ est souvent appelée **condition initiale**

B) résolution dans IR de l'équation y' = ay + b , $a \neq 0$, $b \neq 0$

Théorème 3 :

Les solutions dans R de l'équation différentielle y' = ay +b, $a \neq 0$, $b \neq 0$ sont les fonctions f_k

définies pour tout réel x par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, ou k est un réel quelconque.

C) Résolution de l'équation différentielle y''+ ω^2 y=0

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y''+w^2y=0$ avec $w \in R^*$ est l'ensemble des fonctions f_{k_1,k_2} telles que pour tout $x \in R$, $f_{k_1k_2}(x)=k_1\cos wx+k_2\sin wx$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$

Remarque 1 :

On peut aussi écrire les solutions sous la forme $f_{A\varphi}(x)=A\cos(wx+\phi)$ $avec\ A\in R,\varphi\in R$

Exemple :

1) Résoudre l'équation différentielle y '' + 9y =0

2) trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions f (o) =1 et $f'(\pi)$=-2

1) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f_{k_1k_2}(x)=K_1\cos 3x+K_2\sin 3x$ avec $k_1\in R$, $K_2\in R$

2) Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes K_1 et K_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0)=1$ est équivalente à $f(0)=k_1\cos 0+k_2\sin 0=k_1=1 soit k_1=1$

De même, nous avons pour tout réel x, $f'(x)=-3k_1\sin 3x+3k_2\cos 3x$

La condition $f'(\pi)=-2$ est équivalente à $f'(\pi)=-3k_1\sin 3\pi+3k_2\cos 3\pi=-3k_2=-2 soit k_2=\frac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction : $f_{1,\frac{2}{3}}: x\mapsto \cos 3x+\frac{2}{3}sin3x$

Remarque 2 :

Une équation différentielle est d'ordre n si dans l'équation différentielle interviennent une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n

II) Exercices



QCM

1) On considère l'équation différentielle (E) :2y'-3y=1

Avec la condition initiale f(0)=1

La solution de (E) est la fonction définie sur R par :

a) $f(x)=\dfrac{4e^{\frac{3}{2}x}-1}{3}$

b) $f(x)=e^{3x}$

c) $f(x) = -3e^{3x} + 4$

2) On considère l'équation différentielle (E) : y'' + 16y' =1.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur R par :

a) f(x)=Acos4x avec A $\in$ IR

b) $f(x) = \frac{x}{16} - \frac{A}{16}e^{-16x} + B avec (A,B) \in IR \times IR$

c) $f(x) = A\cos 4x + B\sin 4x avec (A,B) \in IR \times R$



2 APPLIQUER

Soit λ un réel et soit y la solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = 0$ telle que $y(1) = 1$.

Exprimer $y\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ en fonction λ.



3 APPLIQUER

1- Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + y = 0$

2- On donne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point de coordonnées (0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation y = x.

a- Déterminer f(0) et f'(0).

b- En déduire une expression de f(x) en fonction de x.

c- Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

3- Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, \pi]$.



4 APPLIQUER

1- Résoudre l'équation différentielle: $4y'' + y = 0$.

2- Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant: $\begin{cases} f(\pi) = \sqrt{3} \\ f'(\pi) = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

3- Montrer que cette solution f vérifier, pour tout x réel : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.



5 S'ENTRAINER

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.

2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur IR par : $g(x) = ax + b$, est solution de l'équation (E).

3. a. Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur IR par: $f(x) = ke^{-x} + x - 1$. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.

4. Dans cette question, on prend $k = 1$.

a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

5 S'ENTRAINER

1. a) Résoudre l'équation différentielle : (E) $4y' + 3y = 0$.

b) Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0;4]$ par $g(x) = 8e^{-0,75x}$.

a) Étudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1cm).

b) Soit A le domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses $(x'x)$. (On rappelle que, dans ce cas, le volume V est donné par la formule: $V = \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$).

On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

6 S'ENTRAINER

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur IR

a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 10]$.

b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n ; n+1]$.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$, pour tout n entier positif ou nul.

a. Calculer la valeur exacte de U_0 U_1 et U_2.

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Déterminer la valeur exacte de la somme $S = U_0 + U_1 + ... + U_9$.



S'ENTRAINER

A) On donne deux équations différentielles : $(E_1): y' = 3y$ et $(E_2): y' = 2y$.

1) Donner les solutions de l'équation (E_1) et celles de l'équation (E_2).

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où f_1 désigne une solution de l'équation différentielle (E_1) et f_2 désigne une solution de l'équation différentielle (E_2).

Déterminer f(x) sachant que f(0) = - 2 et f ′ (0) = - 3.

B) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [ln2, + ∞[.

a) Montrer que g réalise une bijection de [ln2, + ∞[sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Tracer $\mathcal{C}'$ la courbe de g^{-1} dans le même repère.

c) Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations y = ln2, x = - 4 et x = 0.



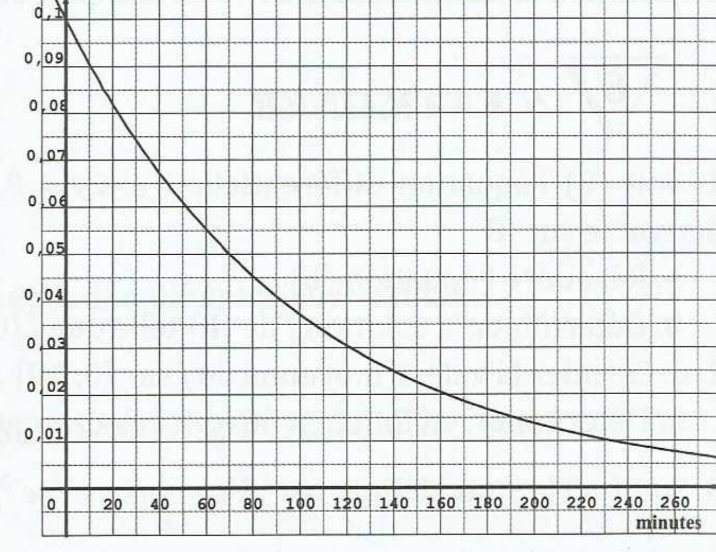
SE PERFECTIONNER

Au cours d'une réaction chimique, on appelle $C(t)$ la concentration du réactif (en moles par litre) à l'instant t (en minutes). On admet que la fonction C : $t \to C(t)$, définie sur l'intervalle I = [0 ; +∞ [, est solution de l'équation différentielle : $C'(t) = -a\,C(t)$ (E) où a est une constante donnée liée à la réaction.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant: C(0) = 0,1mol.L $^{-1}$ .C(0) est la concentration initiale à l'instant t = 0).

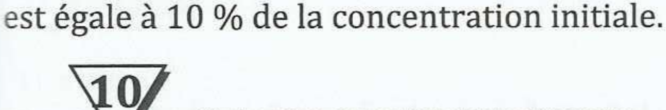
2. On donne a = $9{,}9 \times 10^{-3}$min^{-1} et on suppose désormais que la fonction C est définie sur I par: $C(t) = 0{,}1e^{-9{,}9\times10^{-3}t}$.



a. Déterminer le temps de demi-réaction noté $t_{1/2}$ c'est-à-dire la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à la moitié de la concentration initiale C(0). On donnera d'abord la valeur exacte de t puis celle arrondie à la minute.

b. La courbe représentative de la fonction C est donnée ci-contre. L'axe des abscisses est

gradué en minutes. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à 10 % de la concentration initiale.



10 SE PERFECTIONNER

On chauffe dans une grosse cuve un liquide et on appelle g(t) sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$.

On admet que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=g(t)-100$ est la solution de l'équation différentielle : (E) : $y'+2\times10^{-4}y=0$ vérifiant $f(0)=-80$.

1- a. Résoudre l'équation différentielle (E) ,puis exprimer $f(t)$ en fonction de t ..

b. Montrer que: $g(t)=100-80e^{-2\times10^{-4}t}$. Calculer $g(0)$

2. a. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85°C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

b. La température peut-elle atteindre 100°C ? Justifier



11 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur IR, de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' + y = 0.$$

2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur IR*.

On définit la fonction f de IR* dans IR par : $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exprimer f'' (x) à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3. On considère l'équation différentielle (E') : $y''=-\frac{1}{x^4}y$.

Montrer que la fonction g est solution de (E'), si et seulement si, la fonction f définie pour tout réel non nul x par $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E).

4. En déduire toutes les solutions de (E') définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

5. Soit g une solution de l'équation (E') définie sur $]0, +\infty[$.

a) Déduire des questions précédentes une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$

b) Calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$



12 SUR LE CHEMIN DU BAC

A l'instant t =0 (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de 1.4mg 'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée. On note Q(t) la quantité de substance (enmg) présente dans le sang à l'instant t, $(t \geq 0)$. On admet que la fonction $Q: t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) : $y'+(0,115)y=0$.

1) Résoudre l'équation (E).

2) a) Justifier que $Q(t) = 1,4\ e^{-0,115t}$, $t \geq 0$

b) Donner le sens de variation de la fonction Q.

c) Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation Q(t)=0.7 ; la solution sera arrondie à l'unité.

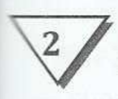
3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre 0.7mg et 1.4mg.

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient uns injection de 0.7mg chaque six heures.



1 QCM

1) a / 2) c



2 APPLIQUER

Les solutions de l'équation différentielle $y'+\lambda y=0$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto Ke^{-\lambda x}$ ou K est une constante.

La condition initiale $y(1)=1$ équivaut donc à $Ke^{-\lambda x}=1$,soit $k=e^{\lambda}$ donc $y(x)=e^{\lambda(1-x)}$ et $y\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)=e^{\lambda-1}$.



3 APPLIQUER

1) l'équation différentielle $(E): y''+y=0$ est une équation différentielle du seconde ordre, linéaire, du type $y''+\omega^2y=0$.

La solution générale de cette équation est de la forme $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$, avec A et B réels. Ici $\omega^2=1$ d'où $\omega=1$; $(\omega>0)$.

Donc la solution générale de cette équation $y=A\cos x+B\sin x$

2/ a- Détermination de f(0) et f'(0).

La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (0 ; 1), d'où f(0) = 1.

La courbe représentative de f admet au point de coordonnées (0 ; 1) une tangente parallèle à la droite d'équation y = x. d'où f'(0) = 1 car la tangente en un point d'une courbe a pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en ce point.

b- Expression de f(x) en fonction de x

Soit f la solution particulière de l'équation (E) telle que f(0) = 1 et f'(0) = 1. Comme f est une solution de (E), il existe des réels A et B tels que, pour tout réel x : $f(x)=A\cos x+B\sin x$. Alors f(0) = 1

$\Leftrightarrow A\cos 0+A\sin 0=1 \Leftrightarrow A=1$.

$f'(x)=-A\sin x+B\cos x$. f'(0) = 1

$\Leftrightarrow -A\sin 0+B\cos 0 \Leftrightarrow B=1$. La fonction f est donc définie, pour tout réel x, par : $f(x)=\cos x+\sin x$.

c/ Autre expression de f(x).

Pour montrer que f(x) égal à $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ développons $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$:

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}$,

4 APPLIQUER

1- Résolution de l'équation $4y''+y=0$

2- $4y''+y=0 \Leftrightarrow 4\left(y''+\dfrac{1}{4}y\right)=0 \Leftrightarrow y''+\dfrac{1}{4}y=0$

L'équation différentielle $y''+\dfrac{1}{4}y=0$ est une équation différentielle du seconde ordre, linéaire, du type $y''+\omega^2y=0$. On sait que la solution générale de cette équation est de la forme

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x,$$

avec A et B réels. Ici $\omega^2=\dfrac{1}{4}$, d'ou $\omega=\dfrac{1}{2}$ (car $\omega\succ 0$).

On déduit la solution générale de cette équation :

$y=A\cos\dfrac{x}{2}+B\sin\dfrac{x}{2}$, avec A et B réels.

5 S'ENTRAINER

1) Soit l'équation différentielle : (H) : y' + y = 0

y ' = -y d'où $y=k\,e^{-x}$; $k\in\mathbb{R}$.

2) Si $g(x)=a\,x+b$ est solution de l'équation (E) alors on a : $a+a\;\;x+b=x$ pour tout $k\in\mathbb{R}$

d'où $\begin{cases}a=1\\a+b=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\b=-a=-1\end{cases}$ et $g(x)=x-1$.

3) a) $f(x)=k\,e^{-x}+x-1$ on a $f'(x)=-k\,e^{-x}+1$, donc $f'(x)+f(x)=-k\,e^{-x}+1+k\,e^{-x}+x-1=x$.

pour $k\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x)+f(x)=x$; et f est solution de (E).

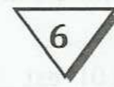
b) $f(x)=k\,e^{-x}+x-1$ si $f(0)=0$ alors $k-1=0$ d'où $k=1$

4) a) $k=1$ $f(x)=e^{-x}+x-1$, $\mu=\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$;

$\mu=\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2(e^{-x}+x-1)dx$ $\mu=\dfrac{1}{2}\left[-e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}-x\right]_0^2$;

$\mu=\dfrac{1}{2}\left[-e^{-2}+\dfrac{4}{2}-2-(-e^{0}+0-0)\right]$

$\mu=\dfrac{1}{2}\left[-e^{-2}+2-2+1\right]$ $\mu=\dfrac{1}{2}\left[1-e^{-2}\right]$. b) m = 0,43 à 10^{-2}près par défaut.



6 S'ENTRAINER

1a. $4y'+3y=0 \Leftrightarrow y'=-\dfrac{3}{4}y$ l'équation différentielle $y'=-\dfrac{3}{4}y$ est une équation différentielle du 1er ordre de la forme $y'=ay$ .On sait que la solution générale de cette équation est de la forme $y=ke^{at}$

où k est un réel quelconque. Ici $a=-\frac{3}{4}$, d'où la solution générale de l'équation (E) : $y=ke^{-(3/4)t}$.

b. Soit *f* la fonction, solution de (E), telle que $f'(0)=-6$ .comme $f(x)=ke^{-(3/4)t}$, et comme la dérivée de $(e^u)'=u'e^u$ on peut dériver *f*. $f'(x)=k\left(-\frac{3}{4}\right)e^{(-3/4)x}$.

$$f'(0)=k\left(-\frac{3}{4}\right)e^0=\frac{-3}{4}k.$$

comme $f'(0)=-6$. $\frac{-3}{4}k=-6$; $k=8$. la fonction f cherchée est telle que : $f(x)=8e^{-(3/4)x}$.

2. la dérivée de g est définie sur I par : $g'(x)=8\times\frac{-3}{4}e^{-(3/4)x}$. $g'(x)=-6\times e^{-(3/4)x}$.

Comme $e^{-(3/4)x}>0$, on en déduit que $g'(x)<0$ .Donc la fonction g est strictement décroissante sur I . le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses *(x' x)* est donné par la formule: $\mathcal{V}=\pi\int_a^b[g(x)]^2dx$. comme l'unité graphique est le cm , l'unité de volume est cm³. d'où $\mathcal{V}=\pi\int_0^4\left[8e^{(-3/4)t}\right]^2dt$;

$$\mathcal{V}=64\pi\int_0^4 e^{(-3/2)t}dt=64\pi\times(-\frac{2}{3})\left[e^{(-3/2)x}\right]_0^4$$

$$=\frac{-128\pi}{3}\left(e^{-6}-e^0\right)$$

$\mathcal{V}=\frac{128\pi}{3}\left(1-e^{-6}\right)$ cm ³. une valeur approchée de $\mathcal{V}$ arrondie au mm ³est alors $\mathcal{V}=133{,}709$ cm ³

7 S'ENTRAINER

1. (E): $y'+2y=0$ 1.a. $y=ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0)=1$. On a donc $1=ce^0=c$ soit c = 1. D'où *f* est définie par $f(x)=e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de *f* sur [0; 10] est : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $\mu=\frac{1}{10-0}\int_0^{10}e^{-2x}dx$

$$\mu=\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{10} \; ; \; \mu=\frac{1}{20}\left[1-e^{-20}\right]$$

2.b $\mu=\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1}e^{-2x}dx$;

$$\mu=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$$

$$\mu=\frac{-1}{2}\left[e^{-2(n+1)}-e^n\right] \; ; \; \mu=\frac{1}{2}\left[e^{-2n}-e^{-2n}e^{-2}\right]$$

$$\mu=\frac{1}{2}e^{-2n}\left(1-e^{-2}\right)$$

3. $U_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, $U_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$;

$U_1=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$; $U_2=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$

3.b. Pour montrer que (Un) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul que tel que $U_{n+1}=q\,U_n$.

$U_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$; $U_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$;

$U_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}\times e^{-2}$; $U_{n+1}=U_n\times e^{-2}$.

Donc (Un) est une suite géométrique de premier terme $U_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+\dots\dots U_{n-1}+U_n$

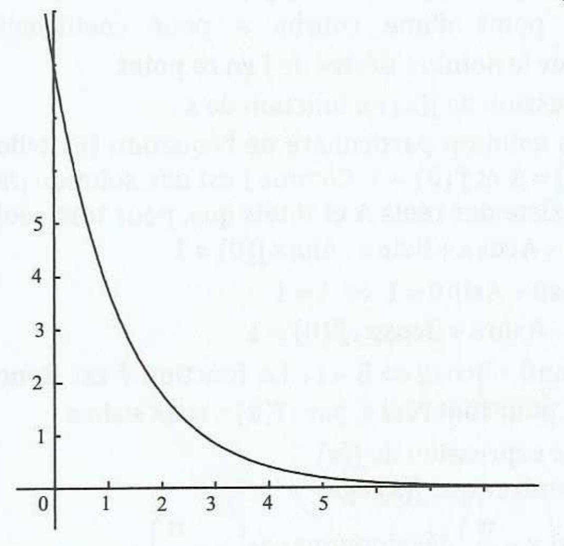
$$=U_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

On a donc

$U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+\dots\dots U_{n-1}+U_n$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)\times\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}.$$

$U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+\dots\dots U_{n-1}+U_n=\frac{1}{2}\times\left(1-e^{-2(n+1)}\right.$



8 S'ENTRAINER

A) 1) (E_1) : $y'=3y \Leftrightarrow y(x)=ke^{3x}$

$(E_2): y' = 2y \Leftrightarrow y(x) = k'e^{2x}$

2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = ke^{3x} + k'e^{2x}$

$f(0) = -2 \Leftrightarrow k + k' = -2$

$f'(0) = -3 \Leftrightarrow 3k + 2k' = -3$

$\begin{cases} k+k'=-2 \\ 3k+2k'=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+3k'=-6 \\ 3k+2k'=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k'=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} \quad \forall x \in \text{IR}.$

B) $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$

1) f est dérivable sur IR et on a :

$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} = 3e^{2x}(e^x - 2)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{3x}}_{0} - 3\underbrace{e^{2x}}_{0} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty}\underbrace{(e^x - 3)}_{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{2x}}{x}}_{+\infty}\underbrace{(e^x - 3)}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ C admet une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

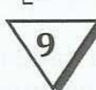
2) a) g est continue et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[\Rightarrow$ g réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur $I = [-4, +\infty[$.

b) $C' = S_\Delta(C)$ où $\Delta : y = x$.

c) Par raison de symétrie par rapport à Δ, on a :

$A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} |f(x)|dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (3e^{2x} - e^{3x})dx$

$= \left[\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{3x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - \left(6 - \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6}\text{U.A}$



SE PERFECTIONNER

a les solutions de (E) sont de la forme $C_k : t \mapsto k\,e^{-at}$; $k \in \mathbb{R}$.

b- $C_k(0) = 0,1$; d'où $k\,e^0 = 0,1$ c'est-à-dire $k = 0,1$.

La solution cherchée est $C : t \mapsto 0,1\,e^{-at}$ pour $t \geq 0$.

2- $C(t) = 0,1 \times e^{-9,9\times10^{-3}t}$. $C(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}C(0)$;

d'où $\quad 0,1 \times e^{-9,9\times10^{-3}t} = \frac{1}{2}$;

$-9,9\times10^{-3}t = -\ln 2$

$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{9,9\times10^{-3}}\text{min} \approx 70\,\text{min}$.

b- graphiquement, la concentration est dixième de sa valeur initiale au bout de 230 min ou encore 3h 50 min (231 min ou 232 min).

10 SE PERFECTIONNER

1. l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est une équation différentielle linéaire du 1[er] ordre on sait que la solution générale de cette équation : les fonctions *f* définie sur R par $f(x) = k\,e^{ax}$ où $k \in \mathscr{R}$.

Ici $a = -2\times10^{-4}$ $\quad f(t) = k\,e^{-2\times10^{-4}t}$. $f(0) = ke^0 = -80$.

D'où $k = -80$ et enfin $f(t) = -80e^{-2\times10^{-4}t}$

2- on sait que $f(t) = g(t) - 100$ pour $t \in [0;+\infty[$, d'où

$g(t) = 100 - 80e^{-2\times10^{-4}t}$.

3.a) $g(0) = 100 - 80e^0 = 100 - 80 = 20$.

la température atteint 85°C lorsque :

$-80e^{-2\times10^{-4}t} + 100 = 85$

$\Leftrightarrow -80e^{-2\times10^{-4}t} = -15 \Leftrightarrow e^{-2\times10^{-4}t} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$

$\Leftrightarrow -2\times10^{-4}t = \ln\left(\frac{3}{16}\right)$

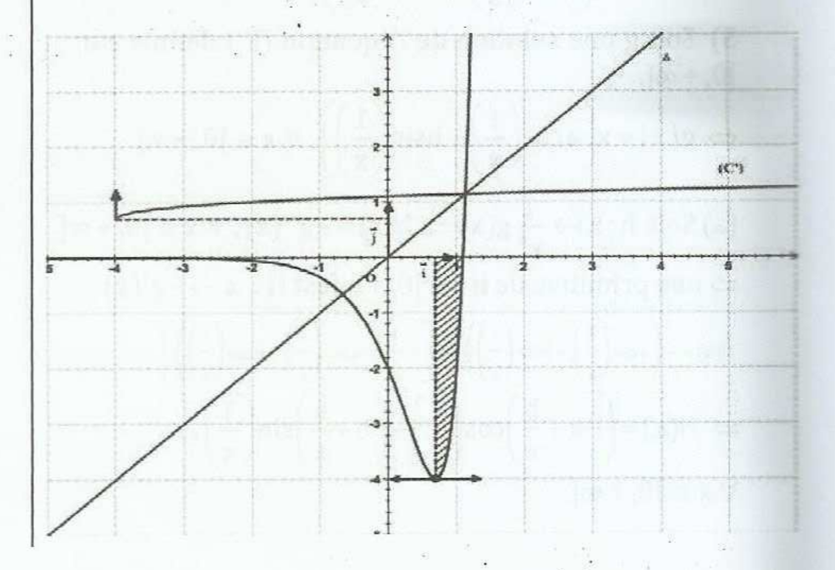
$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(3/16)}{-2\times10^{-4}} = -5000\ln\left(\frac{3}{16}\right) \approx 8370\,\text{sec}$ soit

$t \approx 2\,h\ 19'\ 30''$.

c. la réponse est non car on aura :

$-80e^{-2\times10^{-4}t} + 100 = 100$ c'est-à-dire $-80e^{-2\times10^{-4}t} = 0$

ou encore $e^{-2\times10^{-4}t} = 0$ impossible car $e^t > 0$ pour tout réel t





SUR LE CHEMIN DU BAC

1) (E) : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = a\cos x + b\sin x$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

2) g une fonction deux fois dérivable sur IR*; $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)+x\left(-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)\right)=g\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}g''\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) (E') : $y''=-\frac{1}{x^4}y$.

$f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)+xg\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow g''\left(\frac{1}{x}\right)=-x^4g\left(\frac{1}{x}\right), \forall x\in \text{IR}^*$

$\Leftrightarrow g''(x)=-\frac{1}{x^4}g(x) \Leftrightarrow$ g est solution de (E').

4) g est solution de (E')

$\Leftrightarrow f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)=a\cos x+b\sin x$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}(a\cos x+b\sin x)$

$\Leftrightarrow g(x)=x\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right)+b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \forall x\in \text{IR}^*$

5) Soit g une solution de l'équation (E') définie sur $]0,+\infty[$.

$\Leftrightarrow g(x)=x\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right)+b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \forall x\in\,]0,+\infty[$.

(a) Soit $h: x\mapsto \frac{1}{x^4}g(x) \Rightarrow h(x)=-g''(x), \forall x\in\,]0,+\infty[$.

$\Rightarrow$ une primitive de h sur $]0,+\infty[$ est H : $x\mapsto -g'(x)$

$$H(x)=-\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right)+b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left[-\frac{1}{x^2}\left(-a\sin\left(\frac{1}{x}\right)+b\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$\Rightarrow H(x)=\left(-a+\frac{b}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\left(b+\frac{a}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

$\forall x\in\,]0,+\infty[$.

(b) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^4}\times\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$

On prend $a = 0$ et $b = 1$, on aura $g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^4}\times\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^4}\times g(x)dx$

$=\left[-g'(x)\right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=g'\left(\frac{1}{\pi}\right)-g'\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Avec $g'(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx=\pi-1$



SUR LE CHEMIN DU BAC

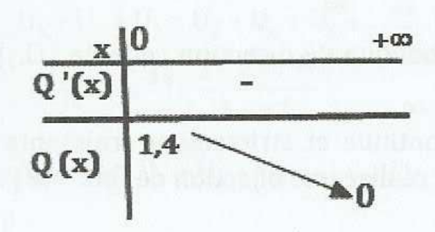
1) $y' = -(0,115)y$ l'ensemble des solutions est $g(x)=ke^{-0,115x}$, $k\in$ IR

2) a) $Q(t)=k\,e^{-0,115\,t}$; $Q(0)=1,4 \Leftrightarrow$ **k = 1,4**

donc $Q(t)=1,4e^{-0,115\,t}$

b)

$Q'(t)=-1,4\times0,115e^{-0,115\,t}=-0,161e^{-0,115\,t}<0$



c) $Q(t)=0,7 \Leftrightarrow 1,4e^{-0,115\,t}=0,7$

$\Leftrightarrow e^{-0,115\,t}=\frac{0,7}{1,4}=0,5$

$\Leftrightarrow -0,115t=\ln(0,5) \Leftrightarrow t=\frac{-\ln 2}{-0,115}=6$ heures

3) A l'instant t =0 un médecin injecte à un patient une dose de 1.4 mg , après 6 heures la quantité devient 0,7 mg . Si le médecin injecte 0,7 mg la quantité devient 1,4 mg à l'instant 6 heures à l'instant 12 H la quantité devient 0,7 mg. Donc pour que quantité présente dans le sang soit comprise entre 0.7mg et 1.4mg. Le médecin doit prescrit à ce patient uns injection de 0.7mg chaque six heures.

GÉOMETRIE

Nombres complexes

I) Résumé du cours

A) Forme algébrique d'un complexe. Représentation graphique

Théorème

On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.(évident que $i \notin \mathbb{R}$)
- les règles de calcul connus sur IR (distributivité, commutativité, ... des lois $+$ et $\times$) sont vraies sur $\mathbb{C}$.
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme : $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.

Définition

L'écriture $z = x + iy$ est la forme algébrique ou cartésienne du complexe z.

x est la partie réelle de z, notée Re(z) ($x \in \mathbb{R}$). y est la partie imaginaire de z, notée Im(z) ($y \in \mathbb{R}$).

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Vocabulaire

- Un complexe de partie imaginaire nulle est un nombre réel :

$\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow$ z est réel. (Exemples : $-2, \sqrt{3}, \dots$)

- Un complexe de partie réelle nulle est appelé un imaginaire :

$\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow$ z est un imaginaire

(Donc de la forme $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$). L'ensemble des imaginaires est noté $i\mathbb{R}$.

(Exemples : $3i, -5i, \dots$)

Attention : si z n'est pas un réel, ce n'est pas forcement un imaginaire.
(2-3i ni réel ni imaginaire)

Remarque

Contrairement à $\mathbb{R}$, la notion d'ordre n'a aucun sens sur $\mathbb{C}$: on ne peut donc ordonner les complexes, écrire que $z > 0$ lorsque z n'est pas réel n'aura donc aucun sens.

Théorème

Les règles d'addition et de multiplication connues dans $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$.

Autrement dit :

$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$

(x+iy)(x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx') [formule à ne pas apprendre]

En particulier, pour tout réel x et y : **$(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ et $(x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i2xy$**

Exemples :

$$(2+3i)(2-3i)=2^2+3^2=13; (-1-2i)(-1+2i)=1^2+2^2=5; (i-5)(-i-5)=1^2+5^2=26$$

$$(2+3i)^2=2^2-3^2+i2\times2\times3=-5+12i; (i-5)^2=5^2-1^2+i2\times(-5)\times1=24-10i$$

A retenir : $i^2=(-i)^2=-1$; $i\times(-i)=-i^2=1$ (donc $\frac{1}{i}=-i$) ; $(1+i)^2=2i$ et $(1-i)^2=-2i$

Puissances de i :

$i^0=1 \quad i^1=1 \quad i^2=-1 \quad i^3=-i \quad i^4=1$

$\forall n\in\mathbb{N},\ i^{4n}=1 \quad i^{4n+1}=i \quad i^{4n+2}=-1 \quad i^{4n+3}=-i$

B) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Le conjugué du complexe z = x + iy est le complexe $\overline{z}=x-iy$.

Exemple :

$\overline{-2+i}=-2-i$, $\overline{3i+2}=-3i+2$, $\overline{2}=2$, $\overline{-7}=-7$, $\overline{6i}=-6i$ et $\overline{-i\sqrt{2}}=i\sqrt{2}$

Propriétés

Pour tout complexe $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

- $\overline{\overline{z}}=z$, z est un nombre réel ssi $\overline{z}=z$, z est un imaginaire pur ssi $\overline{z}=-z$
- $z+\overline{z}=2\text{Re}(z)=2x$; $z-\overline{z}=2\text{Im}(z)\ i=2y\ i$ et $z\overline{z}=(\text{Re}(z))^2+(\text{Im}(z))^2=x^2+y^2\in\mathbb{R}_+$

Remarque

C'est en fait le conjugué de z que nous utilisions pour donner la forme algébrique d'un quotient :

$$\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

Remarque

La conjugaison complexe est une fonction complexe ($\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ qui à $z\mapsto\overline{z}$) est compatible avec toutes les opérations usuelles. En effet on a **les propriétés** suivantes :

Pour tout complexes z et z', on a :

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'},\ \overline{z\,z'}=\overline{z}\,\overline{z'},\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}\ (z'\,{}^1\,0)\ \text{et}\ \overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n\ (n\in\mathbb{N})$$

C) Aspect Géométrique

Définition

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

A tout nombre complexe z = x + iy on associe le point M de coordonnées M(x ;y).

On dit que M a pour affixe z ou encore que M est le point image de z : on note M(z) ou Aff(M) = z

On dit de même que $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z ou encore que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z : on note $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\text{Aff}(\overrightarrow{OM}) = z$. Le plan est alors appelé plan complexe.

Autrement dit, le point M a pour coordonnées (x ; y) dans le plan cartésien si et seulement si M a pour affixe z = x + iy dans le plan complexe

Remarque

L'axe des abscisses est l'ensemble des points M d'affixe un réel : on l'appellera aussi « axe des réels ».

L'axe des ordonnées est l'ensemble des points M d'affixe un imaginaire : on l'appellera aussi « axe des imaginaires ».

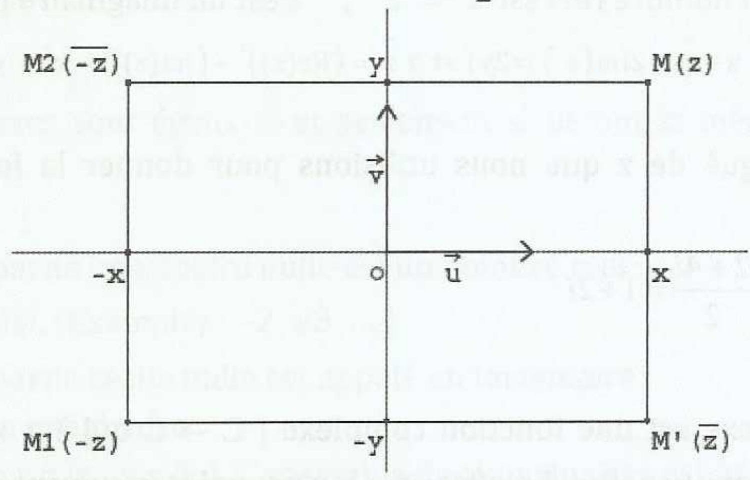
Nous avons déjà remarqué que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique : comme l'affixe d'un vecteur est liée à sa forme algébrique, nous obtenons que :

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ ou encore $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- On a $Z_{\vec{u}+\vec{v}} = Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}}$ autrement dit, l'affixe d'une somme de vecteurs est la somme des affixes.
- Pour tout réel k, on a : $Z_{k\vec{u}} = k Z_{\vec{u}}$

En particulier, l'affixe du milieu I de [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Remarque :



D) Forme trigonométrique d'un complexe. Ecriture exponentielle

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ désigne un repère orthonormé direct

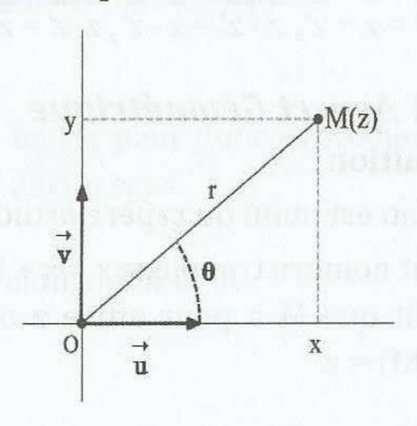
Soit M(z) un point du plan distinct de O.($z \neq 0$)

En coordonnées cartésiennes

Dire que M(x,y) a pour coordonnées (x ;y)

signifie que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

z = x + iy est la forme algébrique de z



En coordonnées polaires

Dire que $M(r,\theta)$ a pour coordonnées (r,θ)

signifie que : $\begin{cases} r = OM \\ (\vec{u},\overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z

- r est le module de z, on note : $r = |z|$ $(r > 0)$
- θ est un argument de z, on note : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Ecriture polaire de z : $z = [r,\theta]$

Exemples : $1 = [1,0]$, $-1 = [1,\pi]$, $i = \left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ et $-i = \left[1,-\frac{\pi}{2}\right]$

$1+i = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$, $\sqrt{3} - i = \left[2,-\frac{\pi}{6}\right]$ et $-\sqrt{3}+3i = \left[2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

Remarque : Le zéro n'a pas de forme trigonométrique

Propriétés du module : $(z,z') \in \mathbb{C}^2$

$|z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2+y^2} = OM$

$|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow O = M \Leftrightarrow z = 0$

$|Aff(B) - Aff(A)| = |z_B - z_A| = AB$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ $\qquad |z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z| \times |z'|$ $\qquad |z^n| = |z|^n \ (n \in \mathbb{N})$

Si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ en particulier $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Remarque : Le module d'un réel est sa valeur absolue, ce qui justifie la notation

Exemples : $|3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|-5| = 5$; $|\sqrt{11}| = \sqrt{11}$; $|i| = 1$; $|-4i| = 4$ et $|3i| = 3$

Propriétés de l'argument : $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi] \equiv \arg(\frac{1}{z})[2\pi]$ $\quad \arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

$\arg(\alpha z) \equiv \arg(z)[2\pi]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$

$(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ $\quad z_A \neq z_B$

$(\overrightarrow{CD}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)[2\pi]$ $\quad z_C \neq z_D$

Remarque :

$M(z) \in (O,\vec{u}) \setminus \{O\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$

$M(z) \in (O,\vec{v}) \setminus \{O\} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

E) Forme exponentielle d'un complexe

On note : $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ par conséquence on a : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta] = \boxed{r e^{i\theta} \text{ forme exponentielle de } z}$

Propriétés :

$\cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ | $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ | $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ | $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ formule de Moivre

Remarques :

$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ | $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ | $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$

Une écriture $r e^{i\theta}$ est une forme exponentielle si et seulement si $r > 0$

Retenons : $1 = e^{i0}$, $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Exemples : $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Formules d'Euler

$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$ formules d'Euler ou $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Application :

- $\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{i3x}) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right)$

  $= \mathrm{Re}\left(\cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i\sin x) + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\right) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

- $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3}{(2i)^3} = \frac{e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}}{-8i}$

  $= \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{-8i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

- $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

Appliquer les formules D'Euler ↵

Exemples :

$$e^{i\theta}+1=\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } e^{i\theta}-1=\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$$

F) Complexes et configurations géométriques

Colinéarité et orthogonalité

- et sont orthogonaux ⇔ . = 0 ⇔ (,) ≡ [π]
  ⇔ arg ≡ [π] ⇔ est imaginaire pur

- A, B et C sont alignés ⇔ et sont colinéaires ⇔ = k , k ∈ IR
  ⇔ ∈ IR ⇔ arg ≡ 0 [π]

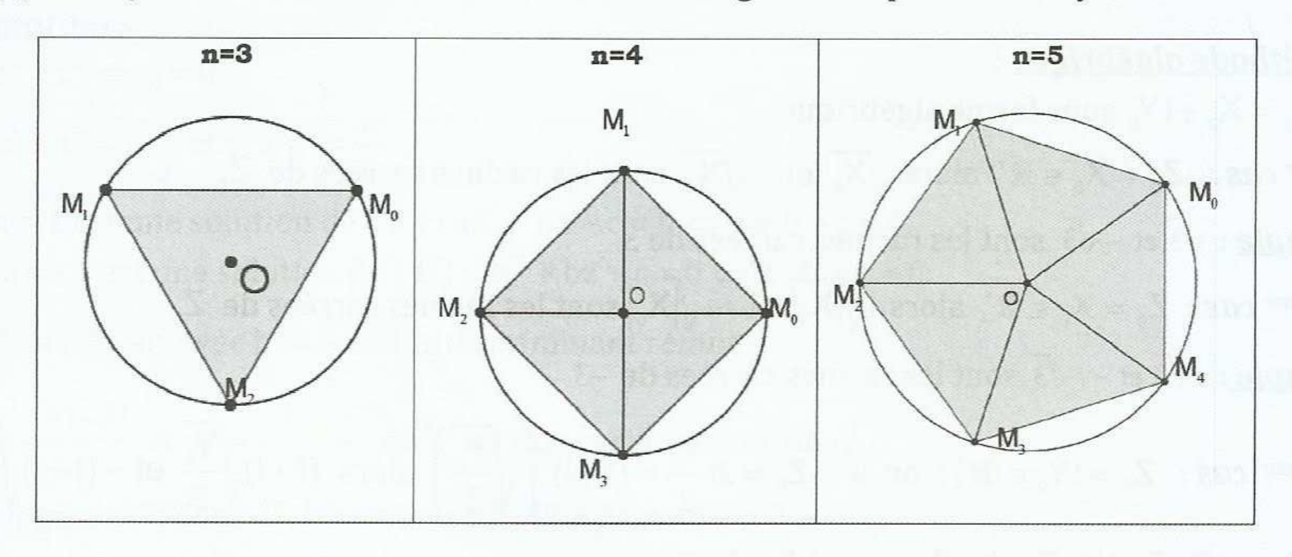
G) Equations complexes

1) Racines nièmes d'un nombre complexe

Définition : Les racines nièmes d'un nombre complexe non nul Z_0 sont les solutions de l'équation complexe : $z^n = Z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : L'équation $z^n = R e^{i\theta}$ $(\text{où } R > 0)$ admet exactement n solutions qu'on note z_k où $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que $z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ (où $\sqrt[n]{R}$ est le réel positif qui à la puissance n égal à R)

Remarque : A partir de $n \geq 3$, les points images des nombres complexes z_k forment un polygone régulier inscrit sur un cercle de centre l'origine du repère et de rayon $\sqrt[n]{R}$



Remarque : Les racines nième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$ c'est-à-dire les z_k où $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ telles que $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Exemples :

1) Les racines cubiques de l'unité sont les $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k \in \{0,1,2\}$ c à d :

1 , $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) Les racines quatrièmes de $16e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les $z_k = \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}$ où $k \in \{0,1,2\}$

2) Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème : Tout nombre complexe non nul Z_0 admet exactement deux racines carrées complexes opposées z' et z". ($z" = -z'$ et $(z')^2 = (z")^2 = Z_0$)

Remarque : L'écriture $\sqrt{Z_0} = z'$ n'est possible si et seulement si $(Z_0, z') \in \mathbb{R}_+^2$

H) Détermination des racines carrées d'un nombre complexe non nul

- ***Méthode exponentielle :***

Si $Z_0 = Re^{i\theta}$ sous forme exponentielle alors $z' = \sqrt{R}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z" = -\sqrt{R}\,e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{R}\,e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$ sont les racines carrées de Z_0

Exemple 1: Les racines carrées de $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\sqrt{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Exemple 2: Les racines carrées de $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

- ***Méthode algébrique*** :

Si $Z_0 = X_0 + iY_0$ sous forme algébrique

- ***1er cas :*** $Z_0 = X_0 \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\sqrt{X_0}$ et $-\sqrt{X_0}$ sont les racines carrées de Z_0

Exemple : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont les racines carrées de 3

- ***2ème cas :*** $Z_0 = X_0 \in \mathbb{R}_-^*$ alors $i\sqrt{|X_0|}$ et $-i\sqrt{|X_0|}$ sont les racines carrées de Z_0

Exemple : $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont les racines carrées de -3

- ***3ème cas :*** $Z_0 = iY_0 \in i\mathbb{R}_+^*$; on a : $Z_0 = 2i\frac{Y_0}{2} = (1+i)^2\left(\sqrt{\frac{Y_0}{2}}\right)^2$ alors $(1+i)\sqrt{\frac{Y_0}{2}}$ et $-(1+i)\sqrt{\frac{Y_0}{2}}$ sont les racines carrées de Z_0

Exemple :

- ***4ème cas :*** $Z_0 = iY_0 \in i\mathbb{R}_-^*$; on a : $Z_0 = -2i\dfrac{|Y_0|}{2} = (1-i)^2\left(\sqrt{\dfrac{|Y_0|}{2}}\right)^2$

alors $(1-i)\sqrt{\dfrac{|Y_0|}{2}}$ et $-(1-i)\sqrt{\dfrac{|Y_0|}{2}}$ sont les racines carrées de Z_0

- ***5ème cas :*** $Z_0 = X_0 + iY_0$ tel que $X_0 \neq 0$ et $Y_0 \neq 0$

Les racines carrées de Z_0 ont pour forme algébrique x + iy où x et y sont deux réels vérifiant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X_0 \\ 2xy = Y_0 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X_0^{\ 2} + Y_0^{\ 2}} \end{cases}$$

Exemple : soit $Z_0 = 3 + 4i$

En résolvant le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$, on trouve $(x, y) = (2,1)$ ou $(x, y) = (-2,-1)$

Les racines carrées de Z_0 sont 2 + i et − 2 − i.

3) Equation du second degré

Théorème

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$; $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(E) admet toujours deux solutions (distinctes ou confondues) $z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$

Où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarques

- $z' = z'' \Leftrightarrow \Delta = 0$.
- $z' + z'' = -\dfrac{b}{a}$ et $z' \times z'' = \dfrac{c}{a}$
- z = 1 est une solution de (E) : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$
- z = - 1 est une solution de (E) : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$
- $\Delta' = b'^2 - ac$, avec $b' = \dfrac{b}{2}$ est le discriminant réduit

$z' = \dfrac{-b' - \delta'}{a}$ et $z'' = \dfrac{-b' + \delta'}{a}$ où δ' est une racine carrée de Δ'.

Exemple : soit dans ℂ, l'équation $iz^2 - (7 + 2i)z + 14 = 0$

$$\Delta = \underbrace{(7+2i)^2 - 56i}_{(a+b)^2 - 4ab} = (7-2i)^2 \Rightarrow \delta = 7 - 2i \Rightarrow z' = \frac{7+2i-7+2i}{2i} = 2 \text{ et } z'' = \frac{7+2i+7-2i}{2i} = -7i$$



I) Exercices



1 QCM

Cocher la bonne réponse :

z désigne un nombre complexe

La partie réelle de $z = i(1+i)$ est	1	-1	i
La partie réelle de $z = i(1-i)$ est	1	-1	i
La partie réelle de i est	1	i	0
La partie imaginaire de $-i$ est	1	$-i$	-1
$z+\overline{z}$ est	réel	Imaginaire pur	nul
$z-\overline{z}$ est	réel	Imaginaire pur	nul
$z\times\overline{z}$ est un	Imaginaire pur	Réel négatif	Réel positif
$\dfrac{1}{1+i}=$	$1+i$	$\frac{1}{2}(1-i)$	$1-i$
L'équation $z^2 = iz$ a pour ensemble de solutions	$\{i\}$	$\{i,0\}$	$\{0\}$
L'équation $\dfrac{z}{z+i} = z$ a pour ensemble de solutions	$\{0, 1-i\}$	$\{0\}$	$\{1-i\}$
Soit z ∈ ℂ vérifiant $\overline{z}+\lvert z\rvert = 6+2i$. L'écriture algébrique de z est	$\frac{8}{3}-2i$	$-\frac{8}{3}-2i$	$\frac{8}{3}+2i$
Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $\lvert z-1\rvert = \lvert z+i\rvert$ est la droite d'équation :	$y = x-1$	$y = -x$	$y = -x+1$
Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6-z}{3-z}$ (z ∈ ℂ). Une solution de (E) est :	$-2-i\sqrt{2}$	$1-i$	$2+i\sqrt{2}$
Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$ est :	$2i$	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+2i$



APPLIQUER

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme algébrique

$i(3+2i)-3(2-i)$; $-2i(2-i)+2(1+2i)$; $(1+i)^3$; $(1-i)^3$; $(2+i)^2-2i(3-2i)$; $(1+i)^2(1-2i)$; $(2+3i)(1-i)^2$; $\frac{1}{i}$; $\frac{1}{1-i}$; $\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $\frac{3+2i}{i}$; $\frac{-5+i}{3+11i}$; $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.



APPLIQUER

Montrer, sans faire le calcul, que le complexe z est réel :

$$z=\frac{(1+2i)(1-2i)-(7-5i)-(7+5i)}{(2+3i)+(2-3i)}.$$



APPLIQUER

Soit z_1 et z_2 deux complexes de module 1 tels que $z_1z_2 \neq -1$

On pose $z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$. Calculer $z-\bar{z}$ et en déduire que z est réel.

5 APPLIQUER

On pose $\alpha=\frac{3-i}{5+7i}$ et $\beta=\frac{3+i}{5-7i}$

Montrer sans calcul que $\alpha+\beta$ est réel et que $\alpha-\beta$ est imaginaire pur.

6 APPLIQUER

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$-7i$; $1+i$; $i-1$; $\sqrt{3}+i$; $1+i\sqrt{3}$; $(3+4i)(1-2i)$; $(4-3i)^4$; $(1+i)^{12}$; $\frac{5+i}{3-4i}$; $\frac{5}{(2+i)^2}$; $\cos\alpha+i\sin\alpha$; $\cos\alpha-i\sin\alpha$; $\frac{x+iy}{x-iy}$.

7 S'ENTRAINER

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(1+3i)z=5i$ b) $(2+i\sqrt{3})z=z+4i$ c) $\frac{z+1}{z+i}=2i$

d) $(1+i)\bar{z}=1-i$ e) $(-1-5i)\bar{z}+2=0$ f) $(1+iz)(z+2i)(z+2-5i)=0$

g) $(1+i)z-3\bar{z}=1+5i$ (on pose $z=x+iy$).



S'ENTRAINER

Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que $|a|=1$ ou $|b|=1$ si et seulement si $|a-b|=|1-\overline{a}b|$.

9 S'ENTRAINER

$f(z)=z+j^2\overline{z}$ avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que : $j^2=\overline{j}$ et $j^3=1$.

2) Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |f(z)|^2-2|z|^2=2\,\mathrm{Re}\left(jz^2\right)$ et $j^2f(z)\in\mathbb{R}$.



S'ENTRAINER

Dans le plan complexe rapporté à un R . O . N $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $z_A=i$, le point B d'affixe $z_B=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C d'affixe z_C symétrique de B par rapport à l'axe réel. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.



S'ENTRAINER

Soit $z\in\mathbb{C}-\{-1\}$. On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z}{1+z}$

1) Déterminer de deux façons différentes l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $Re(Z)=0$.

a) En posant $z=x+iy$, x et y réels.

b) En utilisant la propriété : Z imaginaire pur ssi $\overline{Z}=-Z$

2) Déterminer de deux façons différentes l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(Z)=0$.



S'ENTRAINER

Déterminer et représenter l'ensemble E des points M l'affixes z dans chacun des cas suivants , de deux manières :

- algébriquement, en posant $z=x+iy$.
- géométriquement, en interprétant le module en terme de distance .

a) $|z|=2$ b) $|z-2i|=3$

c) $|iz-1|=\sqrt{2}$ d) $|z|=|z-1+2i|$

e) $\left|\bar{z}-i\right|=2$ f) $\left|\dfrac{z-i}{z+1}\right|=1$



13 S'ENTRAINER

Soit $u=-5+5i$.

1) Calculer le module et un argument de u et de $\dfrac{1}{u}$.

2) Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que : $u\times z=\left[5,\dfrac{17\pi}{12}\right]$.

a) Mettre z sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

b) En déduire la forme algébrique de $u\times z$ et la valeur exacte de $\tan\dfrac{17\pi}{12}$.

14 SE PERFECTIONNER

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On appelle *A, B* et *C* les points d'affixes respectives $a=-1+3i$; $b=-2$ et $c=-\dfrac{3-3i}{2}$.

Soit *f* l'application du plan (*P*) privé de *A*, dans (*P*) qui, à tout point *M* d'affixe *z* distincte de *a*, associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par : $z'=\dfrac{z+2}{z+1-3i}$.

1) On considère l'équation (*E*) : $z^2-3iz-2=0$

a) Montrer que (*E*) équivaut à $(z-i)(z-2i)=0$.

b) En déduire les solutions de (*E*).

2) Déterminer les affixes des points invariants par *f*.

3) Déterminer l'ensemble des points *M*, tels que *M'* appartienne au cercle de centre *O* rayon 1.

4) Montrer que, pour tout *z* différent de *a*, on a l'équivalence suivante :

$$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i}\Leftrightarrow(z-c)(\overline{z-c})=\frac{5}{2}$$

En déduire l'ensemble des points *M* tels que *M'* ait une affixe imaginaire pure.

5) a) En posant $z=x+iy$, déterminer Im(*z'*) en fonction de *x* et de *y*.

b) En déduire l'ensemble des points *M*, tels que *M'* appartienne à l'axe des abscisses.



15 SE PERFECTIONNER

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C, M et M' d'affixes respectives :

$z_A = -1$; $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_C = -i$; z et $z' = \frac{1+z}{iz}$ avec $z \neq 0$.

1) Calculer z'_B la valeur de z' pour $z = z_B$.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

3) Montrer que : $|z'| = \frac{MA}{MO}$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $|z'| = 1$.

4) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $iz(z'+i) = 1$ et $OM \times CM' = 1$.

b) En déduire l'ensemble décrit par M' lorsque M décrit le cercle ζ de centre O et de rayon $\frac{1}{4}$.



16 SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives a = -1, b = 2i et c = -i.

1) Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe d' = $\frac{1}{2}$.

3) Pour tout nombre complexe z différent de –1, on note ρ le module de $z+1$ (c'est à dire $|z+1| = \rho$) et ρ' le module de $z'+1$ (c'est à dire $|z'+i| = \rho'$).

a) Démontrer que pour tout nombre complexe z différent de –1, on a $\rho\rho' = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout nombre complexe z différent de –1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$.

a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

b) Montrer que $z' = -i\omega$.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixes z telle que z' soit un réel non nul.

d) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

5) Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.



SE PERFECTIONNER

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Soit $(E_\alpha) : (\alpha - i)z^2 - \left[2(\alpha - i) + i\alpha\right]z + 2i\alpha = 0$ (z est l'inconnu). Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

I- Dans cette partie $\alpha = 1$ donc $(E_1) : (1-i)z^2 - [2-i]z + 2i = 0$.

1) calculer $(2-3i)^2$.

2) Résoudre (E_1). On notera z_1 et z_2 les solutions avec la partie réelle de z_1 est inférieure à celle de z_2.

3) Donner un argument de z_1.

4) Montrer que alors z_1^{2002} est imaginaire pur.

II- Dans cette partie $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que $\alpha - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

2) Vérifier que 2 est une solution de (E_α).

3) Trouver donc z' l'autre solution de (E_α) en fonction de α.

4) Donner la forme exponentielle de z'.

5) Déterminer la valeur de θ de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que le triangle OM'M'' soit isocèle en O avec M' d'affixe z' et M'' d'affixe i.



SE PERFECTIONNER

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (3-5i)z + 4i - 7 = 0$

2) Soit P(z) = $iz^3 + (3-8i)z^2 - (16-19i)z + 21 - 12i$

a) Montrer que l'équation P(z) = 0 possède une solution réelle à préciser.

b) Trouver les nombres complexes a, b et c tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$ on a

P(z) = $(z-3)\left(az^2 + bz + c\right)$.

c) Résoudre alors P(z) = 0.

3) $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan. Soient A(3) ; B(2+i) et C(3+2i).

a) Déterminer la nature exacte du triangle ABC.

b) Trouver l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.



SE PERFECTIONNER

Pour tout z $\in \mathbb{C}$, on définit P(z) = $z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)z-8$

1) Calculer P(2). En déduire une factorisation de P(z).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ P(z) = 0. On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2 avec Im (z_1) > 0.

3) a) placer dans le plan complexe les points A, B, C d'affixes respectifs 2, z_1, z_2.

b) Soit I = $A*B$. Montrer que OAB est isocèle. En déduire une mesure de $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$

c) Calculer l'affixe de I. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$.



SE PERFECTIONNER

1) Soit $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

a) Montrer que : $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) déterminer en fonction de θ le nombre complexe z tel que $\dfrac{-z+i}{z+i}=e^{i\theta}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^3=i$.

3) En déduire les solutions de l'équation : $(E):\left(\dfrac{-z+i}{z+i}\right)^3=i$.

4) Montrer que les points images des solutions de l'équation : $(E'):\left(-z+i\right)^3=i\left(z+i\right)^3$ sont alignés.

5) Développer puis résoudre l'équation $(E'):\left(-z+i\right)^3=i\left(z+i\right)^3$.

En déduire de (E) et (E') la valeur de $tg\dfrac{\pi}{12}$.



SE PERFECTIONNER

1) Calculer $(1+2i)^4$. En déduire les racines 4ième de −7-24i.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^4+(7+24i)(z-1)^4=0$.



SE PERFECTIONNER

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left((1-i)z\right)^3+i=0$.

On donne les solutions sous forme trigonométrique et algébrique.

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.

1) a) Vérifier que $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0.$$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Déterminer et construire l'ensemble ζ_1 décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.

b) Calculer l'affixe du point I milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Déduire l'ensemble ζ_2 décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.

Construire ζ_2.

3) a) Montrer que $(M_1M_2)^2=8(1-\sin\theta)$.

b) Déduire la valeur de θ pour la quelle $M_1\ M_2$ est maximale.



24 SUR LE CHEMIN DU BAC

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation : $E_d : z^3+\left(3-d^2\right)z+2i\left(1+d^2\right)=0$. Où d est un nombre complexe donné de module 2.

a) Vérifier que 2i est une solution de E_d.

b) Résoudre alors l'équation E_d.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A, B, M, N d'affixes respectives 2i ; -i ; -i + d ; -i – d.

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.



25 SUR LE CHEMIN DU BAC

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que : (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose z = x + iy où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

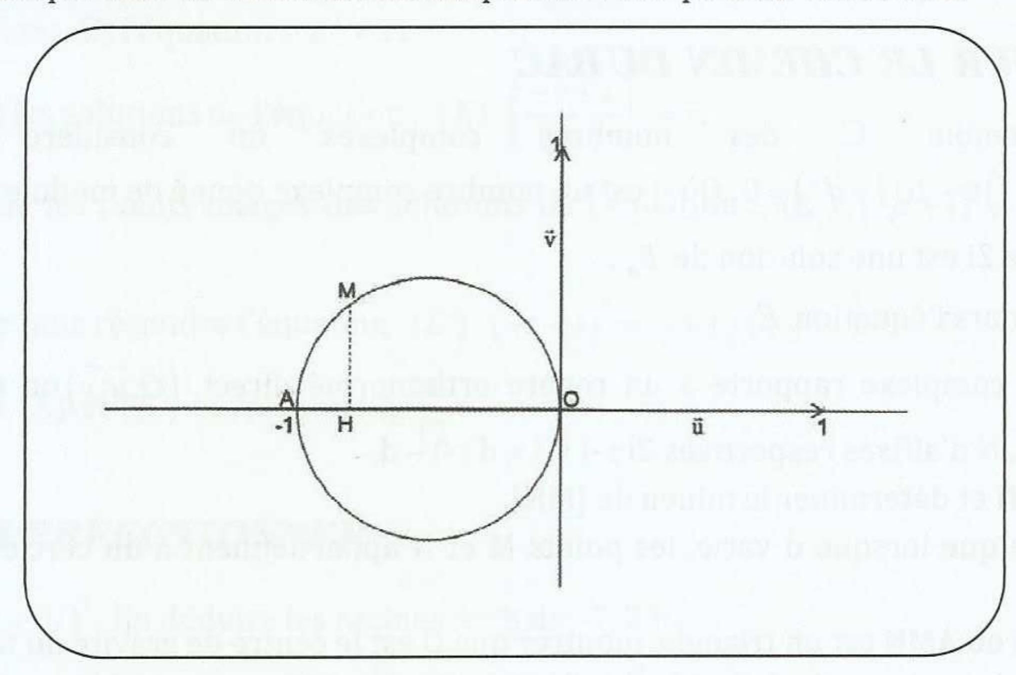
c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la figure ci – contre, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$.On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que OH = OM^2.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.





1 QCM

$z=i(1+i)=-1+i \Rightarrow Ré(z)=-1$

$z=i(1-i)=1+i \Rightarrow Ré(z)=1$

$Ré(i)=0$

$\text{Im}(\overline{-i}) = -1$

$z+\overline{z}$ est réel

$z-\overline{z}$ est imaginaire pûr

$z\times\overline{z}$ est un réel positif

$\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)$

L'équation $z^2=iz$ a pour ensemble de solutions $\{i,0\}$

L'équation $\frac{z}{z+i}=z$ a pour ensemble de solutions $\{0,1-i\}$

Soit z ∈ ℂ vérifiant $\overline{z}+|z|=6+2i$. L'écriture algébrique de z est $\frac{8}{3}-2i$

Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1| = |z+i|$ est la droite d'équation : $y = -x$

(E) : $z=\frac{6-z}{3-z}$ (z ∈ ℂ). Une solution de (E) est : $2+i\sqrt{2}$

Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B=\sqrt{3}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\vec{AB};\vec{AC})=\frac{\pi}{3}$ est : $\sqrt{3}+2i$

2 APPLIQUER

$i(3+2i)-3(2-i) = -8+6i$

$-2i(2-i)+2(1+2i) = 0$

$(1+i)^3 = -2+2i$

$(1-i)^3 = \overline{(1+i)^3} = -2-2i$

$(2+i)^2 - 2i(3-2i) = -1-2i$

$(1+i)^2(1-2i) = 4+2i$

$(2+3i)(1-i)^2 = 6-4i$

$\frac{1}{i} = -i$

$\frac{1}{1-i}=\frac{1}{2}(1+i)$

$\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3+2i}{i}=2-3i$

$\frac{-5+i}{3+11i}=-\frac{4}{130}+\frac{8}{130}i$

$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 APPLIQUER

$$z=\frac{(1+2i)(1-2i)-(7-5i)-(7+5i)}{(2+3i)+(2-3i)}$$

Posons $\alpha=1+2i$; $\beta=7+5i$ et $\gamma=2+3i$

On a : $z=\frac{\overbrace{\alpha\times\overline{\alpha}}^{\in\mathbb{R}}-\overbrace{(\beta+\overline{\beta})}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{\gamma+\overline{\gamma}}_{\in\mathbb{R}}}\in\mathbb{R}$



4 APPLIQUER

Soit z_1 et z_2 deux complexes de <u>module 1</u>

$z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

$z-\overline{z}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}-\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\times\overline{z_2}}$

$$=\frac{(z_1-\overline{z_1})\overbrace{(1-|z_2|^2)}^{0}+(z_2-\overline{z_2})\overbrace{(1-|z_1|^2)}^{0}}{|1+z_1z_2|^2}=0$$

$z-\overline{z}=0 \Rightarrow z=\overline{z} \Rightarrow$ z est réel.

5 APPLIQUER

$\alpha=\frac{3-i}{5+7i}$ et $\beta=\frac{3+i}{5-7i}$

On remarque que : $\beta=\overline{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\alpha+\overline{\alpha}$ est réel

$\beta=\overline{\alpha}\Rightarrow\alpha-\beta=\alpha-\overline{\alpha}$ est imaginaire pur.

6 APPLIQUER

$|-7i|=7$; $|1+i|=\sqrt{2}$; $|i-1|=\sqrt{2}$; $|\sqrt{3}+i|=2$;

$|1+i\sqrt{3}|=2$; $|(3+4i)(1-2i)|=5\sqrt{5}$;

$|(4-3i)^4|=5^4=625$; $|(1+i)^{12}|=\sqrt{2}^{12}=64$;

$\left|\dfrac{5+i}{3-4i}\right| = \dfrac{\sqrt{26}}{5}$; $\left|\dfrac{5}{(2+i)^2}\right| = \dfrac{5}{5} = 1$;

$|\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1$; $|\cos\alpha - i\sin\alpha| = 1$; $\left|\dfrac{x+iy}{x-iy}\right| = 1$

7 S'ENTRAINER

$(1+3i)z = 5i \Leftrightarrow z = \dfrac{5i}{1+3i} = \dfrac{1}{2}(1-3i)$

$(2+i\sqrt{3})z = z + 4i \Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})z = 4i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3} + i$

$\dfrac{z+1}{z+i} = 2i \Leftrightarrow (1-2i)z = -3 \Leftrightarrow z = -\dfrac{3}{5}(1+2i)$

$(1+i)\bar{z} = 1-i \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1-i}{1+i} = -i \Leftrightarrow z = i$

$(-1-5i)\bar{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{2}{1+5i} = \dfrac{1}{3}(1-5i)$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{3}(1+5i)$

$(1+iz)(z+2i)(z+2-5i) = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -2i$ ou $z = -2+5i$

$(1+i)z - 3\bar{z} = 1+5i$

$\Leftrightarrow -2x - y + i(x+4y) = 1+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{7}$ et $y = \dfrac{11}{7}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{9}{7} + \dfrac{11}{7}i$



8 S'ENTRAINER

$|a| = 1 \Leftrightarrow \bar{a} = \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow$

$|1-\bar{a}b| = \left|1 - \dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{a-b}{a}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a|} = |a-b|$

$|b| = 1 \Leftrightarrow \bar{b} = \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow$

$|1-\bar{a}b| = \left|1 - \dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}\right| = \left|\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{b}}\right| = \dfrac{|\bar{b}-\bar{a}|}{|\bar{b}|} = \dfrac{|\overline{b-a}|}{|b|}$

$= |b-a| = |a-b|$



9 S'ENTRAINER

$f(z) = z + j^2\bar{z}$ et $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) On vérifie que $j^2 = \bar{j}$

et $j^3 = j^2 \times j = \bar{j} \times j = |j|^2 = 1$.

4)

$|f(z)|^2 - 2|z|^2 = |z + j^2\bar{z}|^2 - 2|z|^2$

✓ $= (z + j^2\bar{z})(\overline{z + j^2\bar{z}}) - 2z\bar{z}$

$= (z + \overline{jz})(\bar{z} + jz) - 2z\bar{z}$

$= -z\bar{z} + jz^2 + \overline{jz^2} + z\bar{z} = jz^2 + \overline{jz^2} = 2Ré(jz^2)$

$j^2 f(z) = j^2(z + j^2\bar{z}) = j^2 z + j^4\bar{z}$

✓ $= (\bar{j}z + j\bar{z}) \in \mathbb{R}$

10 S'ENTRAINER

$z_A = i$; $z_B = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$; $z_C = \overline{z_B}$ car $C = S_{(O,\vec{u})}(B)$

BA = $|z_A - z_B| = \left|\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$

BC = $|z_C - z_B| = |\overline{z_B} - z_B| = |2i\,\mathrm{Im}(z_B)| = |i| = 1$

BA = BC ⇒ BAC est isocèle en B.

11 S'ENTRAINER

$Z = \dfrac{z}{1+z}$

1. a) On pose $z = x+iy$, x et y réels

$Z = \dfrac{z}{1+z} = \dfrac{x+iy}{1+x+iy} = \dfrac{(x+iy)(1+x-iy)}{(1+x)^2+y^2}$,

$= \dfrac{x^2+y^2+x}{(1+x)^2+y^2} + i\dfrac{y}{(1+x)^2+y^2}$

avec $(x,y) \neq (-1,0)$

$Re(Z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+x}{(1+x)^2+y^2} = 0$,

avec $(x,y) \neq (-1,0)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x$, avec $(x,y) \neq (-1,0)$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$, avec $(x,y) \neq (-1,0)$

⇔ M(z) ∈ (C) \ {A(-1, 0)} où (C) est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$

b) Z imaginaire pur ssi $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}} = -\dfrac{z}{1+z}$

$\Leftrightarrow \bar{z} + z \times \bar{z} = -z - z \times \bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} + 2z \times \bar{z} = 0$

On pose $z = x+iy,\ (x,y) \neq (-1,0)$

$\Leftrightarrow \quad 2x+2(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+x$, avec $(x,y)\neq(-1,0)$

$\Leftrightarrow$ M(z) $\in$ (C) \ {A(-1, 0)} où (C) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

2) F = {M(z) tel que $\text{Im}(Z)=0$ }

a) $\text{Im}(Z)=0 \Leftrightarrow \frac{y}{(1+x)^2+y^2}$,

avec $(x,y)\neq(-1,0) \Leftrightarrow$ y = 0, avec $(x,y)\neq(-1,0)$

$\Leftrightarrow$ M(z) $\in \left(O,\vec{u}\right)$ \ {A(-1, 0)}

Autrement : $\text{Im}(Z)=0$

$\Leftrightarrow$ Z est réel $\Leftrightarrow \overline{Z}=Z \Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}}=\frac{z}{1+z}$

$\Leftrightarrow \overline{z}+z\times\overline{z}=z+z\times\overline{z} \Leftrightarrow z=\overline{z}$

$\Leftrightarrow$ z est réel $\Leftrightarrow$ M(z) $\in \left(O,\vec{u}\right)$ \ {A(-1, 0)}

12 S'ENTRAINER

a) $|z|=2$

• Algébriquement : on pose $z=x+iy$

$|z|=2 \Leftrightarrow |x+iy|=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4 \Leftrightarrow$ M $\in$ (C) le cercle de centre O et de rayon 2.

• Géométriquement :

$|z|=2 \Leftrightarrow$ OM = 2 $\Leftrightarrow$ M $\in$ (C) le cercle de centre O et de rayon 2.

b) $|z-2i|=3$

• Algébriquement : $|z-2i|=3$

$\Leftrightarrow |x+i(y-2)|=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=3$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow$ M $\in$ (C) le cercle de centre $\Omega(0, 2)$ et de rayon 3.

• Géométriquement : on pose $z_\Omega = 2i$

$|z-2i|=3 \Leftrightarrow |z-z_\Omega|=3 \Leftrightarrow \Omega$M = 3 $\Leftrightarrow$ M $\in$ (C) le cercle de centre $\Omega(0, 2)$ et de rayon 3.

c) $|iz-1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |i(z+i)|=\sqrt{2}$

d) $\Leftrightarrow |z+i|=\sqrt{2}$ (puisque |i| = 1)

On revient aux exemples a) et b) et on aura M $\in$ (C) le cercle de centre $\Omega(0, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

e) $|z|=|z-1+2i|$

• Algébriquement : on pose $z=x+iy$

$|z|=|z-1+2i| \Leftrightarrow |x+iy|=|(x-1)+i(y+2)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x-1)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow -2x+4y+5=0$

$\Leftrightarrow$ M $\in \Delta$ la droite d'équation $-2x+4y+5=0$

• Géométriquement : on pose $z_A=1-2i$

$|z|=|z-1+2i| \Leftrightarrow |z|=|z-z_A| \Leftrightarrow$ OM = AM $\Leftrightarrow$ M $\in$ méd[OA] la médiatrice du segment [OA]

f) $|\overline{z}-i|=2 \Leftrightarrow |\overline{\overline{z}-i}|=2 \Leftrightarrow |z+i|=2 \Leftrightarrow$ M $\in$ (C) le cercle de centre $\Omega(0, -1)$ et de rayon 2

g) $\left|\frac{z-i}{z+1}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+1|}=1 \Leftrightarrow |z-i|=|z+1|$, on revient à l'exemple d)

Un travail analogue donne M $\in$ méd[AB] la médiatrice du segment [AB] où A(i) et B(-1).

13 S'ENTRAINER

$u=-5+5i$

1. $|u|=|-5+5i|=5\sqrt{2}$

Soit θ un argument de u alors

$$\begin{cases} \cos\theta=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$\left|\frac{1}{u}\right|=\frac{1}{|u|}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

Soit α un argument de $\frac{1}{u} \Rightarrow \alpha \equiv -\theta\ [2\pi]$

$\Rightarrow \alpha \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

2. $u\times z=\left[5,\frac{17\pi}{12}\right]=5\times e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$\left[5\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]\times z=\left[5,\frac{17\pi}{12}\right]$

$\Rightarrow z=\frac{\left[5,\frac{17\pi}{12}\right]}{\left[5\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]}=\left[\frac{5}{5\sqrt{2}},\frac{17\pi}{12}-\frac{3\pi}{4}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{8\pi}{12}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}$

b)

$u \times z = (-5+5i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

$= \frac{-5\sqrt{2}}{4}(1-i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

$= \frac{-5\sqrt{2}}{4}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right] = 5 \times e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$\Rightarrow e^{i\frac{17\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$

14 SE PERFECTIONNER

1. a) $(z-i)(z-2i) = z^2 - 3iz - 2$

$(E) : z^2 - 3iz - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z-2i) = 0$

b) $z^2 - 3iz - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z-2i) = 0$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = 2i$

2. $M(z)$ est invariant, si et seulement si :

$z = \frac{z+2}{z+1-3i} \Leftrightarrow z(z+1-3i) = z+2$

$\Leftrightarrow z^2 + z - 3iz = z+2 \Leftrightarrow z^2 - 3iz - 2 = 0$.

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = 2i$

Les points $M_1(i)$ et $M_2(2i)$ sont invariants par f.

3. Dire que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est équivalent à écrire $|z'| = 1$.

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+2}{z+1-3i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z+2| = |z+1-3i| \Leftrightarrow BM = AM$

car $|z+2| = |z-(-2)| = |z - z_B| = BM$

et $|z+1-3i| = |z-(-1+3i)| = |z - z_A| = AM$.

Cela revient donc à chercher l'ensemble des points M tels que $BM = AM$, ce sont les points équidistants de A et de B, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$.

4. Avant de commencer le calcul, il est impératif de se familiariser avec les valeurs z_C et $\overline{z}_C$.

$z_C = -\frac{3-3i}{2} = \frac{-3+3i}{2}$ et $\overline{z_C} = -\frac{3+3i}{2} = \frac{-3-3i}{2}$.

$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z+2)(\overline{z}+1+3i) = -(\overline{z}+2)(z+1-3i)$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + z(1+3i) + 2\overline{z} + 2(1+3i) = -z\overline{z} - \overline{z}(1-3i) - 2z - 2(1-3i)$

$\Leftrightarrow 2z\overline{z} + z(1+3i+2) + \overline{z}(2+1-3i) + 2(1+3i+1-3i) = 0$

$\Leftrightarrow 2z\overline{z} + z(3+3i) + \overline{z}(3-3i) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + z\left(\frac{3+3i}{2}\right) + \overline{z}\left(\frac{3-3i}{2}\right) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - z\times\left(\frac{-3-3i}{2}\right) - \overline{z}\left(\frac{-3+3i}{2}\right) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - z\times\overline{z_C} - \overline{z}\times z_C + 2 = 0.$

Raisonnons avec le deuxième membre de l'équivalence de départ :

$(z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z} - \overline{z_C}) = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - z\times\overline{z_C} - \overline{z}\times z_C + z_C\times\overline{z_C} = \frac{5}{2}$

Il ne reste à montrer que $z_C\times\overline{z_C} - \frac{5}{2} = 2$:

on peut calculer

$z_C\times\overline{z_C} = |z_C|^2 = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{9}{2}$

d'où l'égalité : $z_C\times\overline{z_C} - \frac{5}{2} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$.

b. On remarque que $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$ et donc que

$\overline{z'} = \overline{\left(\frac{z+2}{z+1-3i}\right)} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z+1-3i}} = \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}$.

$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i} \Leftrightarrow z' = -\overline{z'}$

$\Leftrightarrow z' + \overline{z'} = 0 \Leftrightarrow x' = 0$

En effet, si $z' = x' + iy'$,

alors $z' + \overline{z'} = x' + iy' + x' - iy' = 2x'$

L'équivalence devient donc :

z' est un imaginaire pur équivaut à $(z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}$,

autrement dit :

$z_{\overrightarrow{CM}} \times \overline{z_{\overrightarrow{CM}}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|z_{\overrightarrow{CM}}\right|^2 = \frac{5}{2}$.

$\Leftrightarrow \left|z_{\overrightarrow{CM}}\right| = \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow CM = \sqrt{\frac{5}{2}}$

M appartient donc au cercle de centre C de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (privé de A). En effet

$AC = \left| z_{\overrightarrow{AC}} \right| = |z_C - z_A| = \left| -\frac{3-3i}{2} + 1 - 3i \right|$

$= \left| \frac{-3+3i+2-6i}{2} \right| = \left| \frac{-1-3i}{2} \right|$

$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$

5.

a) $z' = \frac{z+2}{z+1-3i} = \frac{x+iy+2}{x+iy+1-3i} = \frac{x+2+iy}{x+1+i(y-3)}$

$= \frac{(x+2+iy)(x+1-i(y-3))}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$= \frac{x^2+x-ix(y-3)+2x+2-2i(y-3)+ixy+iy+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$= \frac{x^2+x+2x+2+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2} + i\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

Soit pour la partie imaginaire :

$\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$= \frac{-xy+3x-2y+6+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}.$

$= \frac{3x-y+6}{(x+1)^2+(y-3)^2}$

b) M' appartient à l'axe des abscisses, si et seulement si la partie imaginaire de c'est nulle, c'est-à-dire $3x-y+6=0$ (avec $(x;y) \neq (-1;3)$), ou encore M appartient à la droite d'équation $y=3x+6$ privée du point de coordonnées $(-1 ; 3)$.



SE PERFECTIONNER

1. $z' = \frac{1+z}{iz}$ avec $z \neq 0$

On pose z = $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on aura :

$z' = \frac{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}-i\right)}{4} = \frac{-2\sqrt{3}-6i}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

2. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z'$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1+z}{iz}\right)} = \frac{1+z}{iz}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\overline{z}}{-i\overline{z}} = \frac{1+z}{iz}$

$\Leftrightarrow z + z\overline{z} = -\overline{z} - z\overline{z}$

$\Leftrightarrow z + \overline{z} + 2z\overline{z} = 0$

On pose $z = x+iy$, avec $(x,y) \neq (0,0)$

$\Leftrightarrow 2x + 2(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ M(z) $\in$ (C) \ {O} où (C) est le cercle de centre Ω $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

3. $|z'| = \left|\frac{1+z}{iz}\right| = \frac{|z+1|}{|z|} = \frac{MA}{MO}$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{MA}{MO} = 1 \Leftrightarrow MA = MO$

$\Leftrightarrow$ M(z) $\in$ méd[OA]

4. a) $iz(z'+i) = iz\left(\frac{1+z}{iz}+i\right) = 1$

$iz(z'+i) = 1$

$\Rightarrow |iz(z'+i)| = 1 \Rightarrow |z| \times |(z'+i)| = 1$

$\Rightarrow OM \times CM' = 1$

b) M $\in \zeta_{\left(O,\frac{1}{4}\right)} \Leftrightarrow$ OM = $\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow OM \times CM' = \frac{1}{4} \times CM' = 1 \Leftrightarrow$ CM' = 4 $\Leftrightarrow$ M' $\in \zeta_{(C,4)}$



SE PERFECTIONNER

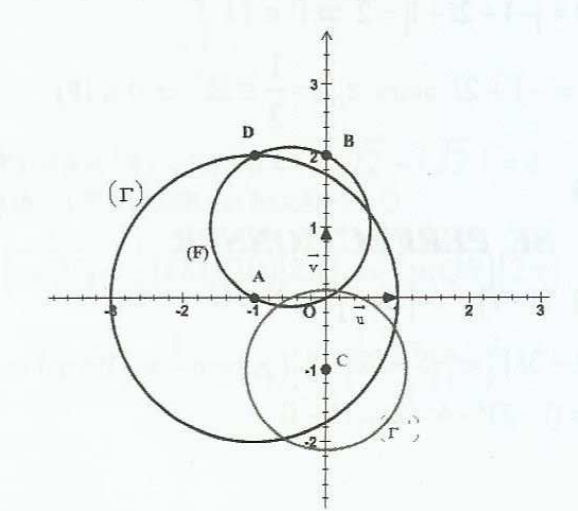
$z' = \frac{-iz-2}{z+1}$

1. On pose z = - i

$\Rightarrow z' = \frac{-i \times i - 2}{i+1} = \frac{-1}{1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$\Rightarrow z_{C'} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1-i)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$



2. On pose $z'=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-iz-2}{z+1}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z+1=-2iz-4\Rightarrow(1+2i)z=-5$

$\Rightarrow z=\frac{-5}{1+2i}=\frac{-5(1-2i)}{5}=-1+2i$

$\Rightarrow z_D=-1+2i$

3. $|z+1|=\rho$ et $|z'+i|=\rho'$

a) $\rho\times\rho'=|z+1|\times|z'+i|$

$\Rightarrow \rho\times\rho'=|(z+1)\times(z'+i)|$

$\Rightarrow \rho\times\rho'=\left|(z+1)\times\left(\frac{-iz-2}{z+1}+i\right)\right|$

$\Rightarrow \rho\times\rho'=|-iz-2+iz+i|=\sqrt{5}$

b) $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow AM=2\Leftrightarrow|z+1|=\rho=2$

$\Leftrightarrow |z'+i|=\rho'=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow M'=f(M)\in(\Gamma')$ le cercle de centre C et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. $\omega=\frac{z-2i}{z+1}$

a) $\arg\omega\equiv\arg\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$

b) $z'=\frac{-iz-2}{z+1}=-i\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)=-i\omega$

c) $z'\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg(z')\equiv0[\pi]$

$\Leftrightarrow\arg(-i\omega)\equiv0[\pi]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}+\arg\omega\equiv0[\pi]$

$\Leftrightarrow\arg\omega\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow M\in\zeta_{[AB]}\setminus\{A,B\}$

d) $AD=|-1+2i+1|=2\Rightarrow D\in(\Gamma)$

Si $z_D=-1+2i$ alors $z_{D'}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}^*\Rightarrow D\in(F)$

17 SE PERFECTIONNER

I- $(E_1):(1-i)z^2-[2-i]z+2i=0$

1. $(2-3i)^2=-5-12i$

2. $\Delta=(i-2)^2-4\times2i\times(1-i)$

$\Delta=3-4i-8i-8=-5-12i=(2-3i)^2\Rightarrow 2-3i$ est une racine carrée de $3-4i$

$z'=\frac{2-i-2+3i}{2(1-i)}=\frac{2i}{2(1-i)}$

$=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{-1+i}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$

$z''=\frac{2-i+2-3i}{2(1-i)}=\frac{4-4i}{2(1-i)}=2$

$z_1=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$, puisque $Ré(z_1)=\frac{-1}{2}<Ré(z_2)=2$

3. $\arg(z_1)\equiv\arg\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i\right)[2\pi]$

$\equiv\arg(-1+i)[2\pi]\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

4. $\arg\left(z_1^{2002}\right)\equiv2002\arg(z_1)[2\pi]$

$\equiv2002\times\frac{3\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

5. $\Rightarrow z_1^{2002}$ est imaginaire pur

II- $\alpha=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$(E_\alpha):(\alpha-i)z^2-[2(\alpha-i)+i\alpha]z+2i\alpha=0$

1. $\alpha-i=e^{i\theta}-i=e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\theta}+e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=e^{\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

2. $4(\alpha-i)-2[2(\alpha-i)+i\alpha]+2i\alpha=0$

$\Rightarrow$ 2 est une solution de (E_α).

3. $2z'=\frac{2i\alpha}{\alpha-i}\Rightarrow z'=\frac{i\alpha}{\alpha-i}$

4. $z'=\frac{i\alpha}{\alpha-i}=\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-i}=\frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$\Rightarrow z'=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$

N.B : si $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

5. OM'M'' soit isocèle en O ⇔ OM' = OM''

$\Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow \frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, avec $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

18 SE PERFECTIONNER

1. $iz^2 + (3-5i)z + 4i - 7 = 0$

$\Delta = (3-5i)^2 - 4i\times(4i-7)$

$= -16 - 30i + 16 + 28i = -2i = (1-i)^2$

$z' = \frac{5i-3-1+i}{2i} = \frac{-4+6i}{2i} = 3+2i$

$z'' = \frac{5i-3+1-i}{2i} = \frac{-2+4i}{2i} = 2+i$

2. P(z) = $iz^3 + (3-8i)z^2 - (16-19i)z + 21 - 12i$

a) Soit α une solution réelle de l'équation P(z) = 0

$\Leftrightarrow i\alpha^3 + (3-8i)\alpha^2 - (16-19i)\alpha + 21 - 12i = 0 \Leftrightarrow$

$3\alpha^2 - 16\alpha + 21 + i(\alpha^3 - 8\alpha^2 + 19\alpha - 12) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha^2 - 16\alpha + 21 = 0 \\ \alpha^3 - 8\alpha^2 + 19\alpha - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 3$

b) P(z) = $(z-3)(az^2+bz+c)$.

$\Rightarrow$ P(z) = $az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$

Or P(z) = $iz^3 + (3-8i)z^2 - (16-19i)z + 21 - 12i$

Par identification on a :

$\begin{cases} a = i \\ b - 3a = 3 - 8i \\ c - 3b = -16 + 19i \\ -3c = 21 - 12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i \\ b = 3 - 5i \\ c = -7 + 4i \end{cases}$

Donc P(z) = $(z-3)(iz^2 + (3-5i)z - 7 + 4i)$.

c) P(z) = 0 ⇔ $(z-3)(iz^2 + (3-5i)z - 7 + 4i)$.= 0 ⇔

z – 3 = 0 ou $iz^2 + (3-5i)z + 4i - 7 = 0$

⇔ z = 3 ou z = 3 + 2i ou z = 2 + i

3. A(3) ; B(2+i) et C(3+2i).

a) AB = |2 + i - 3| = |- 1 + i| = $\sqrt{2}$

AC = |3 + 2i - 3| = |2i| = 2

BC = |3 + 2i – 2 - i| = |1 + i| = $\sqrt{2}$

AB = BC et $BA^2 + BC^2 = AC^2$ ⇒ BAC est un triangle rectangle et isocèle en B.

b) ABCD est un carré ⇔ ABCD est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$\Leftrightarrow z_D = 3 + 2i - 2 - i + 3 = 4 + i$

19 SE PERFECTIONNER

P(z) = $z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

1. P(2) = $8 + 8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$

$\Rightarrow$ P(z) = $(z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

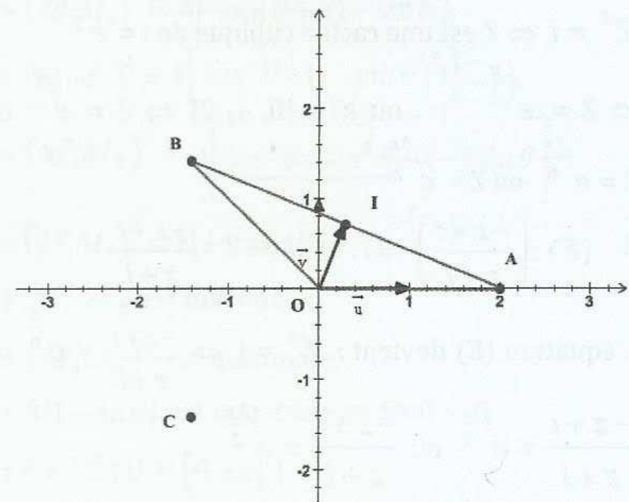
2. P(z) = 0 ⇔ $(z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$

⇔ z – 2 = 0 ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ ⇔ z = 2 ou $(z+\sqrt{2})^2 + 2 = 0$

⇔ z = 2 ou $(z+\sqrt{2})^2 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ ⇔ z = 2 ou $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

On prend $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3. a) Les points A, B, C d'affixes respectifs 2, z_1, z_2.



b) OA = |2| = 2 ; OB = $|-\sqrt{2} + i\sqrt{2}|$ = 2

OA = OB ⇒ OAB est isocèle en O

$(\vec{u};\widehat{\overrightarrow{OI}}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA};\widehat{\overrightarrow{OB}})[2\pi] \equiv \frac{1}{2}(\vec{u};\widehat{\overrightarrow{OB}})[2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{u};\widehat{\overrightarrow{OI}}) \equiv \frac{1}{2}\arg(z_1)[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

c) I = $A*B \Leftrightarrow z_I = \dfrac{2+z_1}{2} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'autre part on a : $z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

20 SE PERFECTIONNER

1. $\theta \in]0,\pi[$

a) $1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\Big(\underbrace{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\Big) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\Big(\underbrace{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}_{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\Big) = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) $\dfrac{-z+i}{z+i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow -z+i = ze^{i\theta} + ie^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \left(1+e^{i\theta}\right)z = i\left(1-e^{i\theta}\right) \Leftrightarrow z = \dfrac{i\left(1-e^{i\theta}\right)}{1+e^{i\theta}} = \dfrac{i\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

$Z^3 = i \Leftrightarrow$ Z est une racine cubique de i = $e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow$ Z = $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, où k $\in$ {0, 1, 2} $\Leftrightarrow$ Z = $e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou Z = $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou Z = $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

2. $(E) : \left(\dfrac{-z+i}{z+i}\right)^3 = i$, on pose Z = $\dfrac{-z+i}{z+i}$

L'équation (E) devient : $Z^3 = i \Leftrightarrow \dfrac{-z+i}{z+i} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $\dfrac{-z+i}{z+i} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $\dfrac{-z+i}{z+i} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow$ z = $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ou z = $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ou z = $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

3. $(E') : (-z+i)^3 = i(z+i)^3$

$\Rightarrow \left|(-z+i)^3\right| = \left|i(z+i)^3\right|$

$\Rightarrow$ AM = BM où A (i); B (-i) et M (z)

$\Rightarrow$ M $\in$ méd[AB]

$\Rightarrow$ les points images des solutions sont sur la médiatrice de [AB] où A (0, 1) et B (0, -1)

4. $(E') : (-z+i)^3 = i(z+i)^3$

$\Leftrightarrow -i + 3z + 3iz^2 - z^3 = 1 - 3iz - 3z^2 + iz^3$

$\Leftrightarrow (1+i)\left(z^3 - 3z^2 - 3z + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 3z^2 - 3z + 1 = 0$

On vérifie que – 1 est une solution remarquable

$\Leftrightarrow (z+1)\left(z^2 - 4z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$ z + 1 = 0

ou $z^2 - 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow$ z = - 1 ou $(z-2)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ z = - 1 ou $(z-2)^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow$ z = - 1

ou z = $2+\sqrt{3}$ ou z = $2-\sqrt{3}$

On remarque que (E) et (E') sont équivalentes

Donc elles admettent les mêmes solutions

$\Rightarrow \{\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right), \tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right), \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\}$

= {- 1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$}

Or $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ = - 1

$\Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ = $2+\sqrt{3}$ ou $2-\sqrt{3}$

Puisque $\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) < \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

21 SE PERFECTIONNER

1. $(1+2i)^4 = 1 + 4\times 2i + 6\times(2i)^2 + 4\times(2i)^3 + (2i)^4$
$= 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -7-24i$

Soit z une racine quatrième de –7-24i

$\Rightarrow z^4 = -7-24i = (1+2i)^4$

$\Rightarrow \left(\dfrac{z}{1+2i}\right)^4 = 1 \Rightarrow \dfrac{z}{1+2i}$ est une racine quatrième de l'unité $\Rightarrow \dfrac{z}{1+2i}$ = 1 ou – 1 ou i ou – i

$\Rightarrow$ z = 1 + 2i ou z = - 1 – 2i ou z = - 2 + i ou z = 2 – i

2. $(z+1)^4 + (7+24i)(z-1)^4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4 = -7-24i = (1+2i)^4 \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1}$ = 1+ 2i ou - 1 – 2i ou – 2 + i ou 2 – i

$\Leftrightarrow z = 1 - i$ ou $z = \dfrac{1+i}{2}$ ou $z = 2 + i$ ou $z = \dfrac{2-i}{5}$

22 SE PERFECTIONNER

$\left((1-i)z\right)^3 + i = 0$

$\Leftrightarrow -2i(1-i)z^3 + i = 0$

$\Leftrightarrow i = 2i(1-i)z^3$

$\Leftrightarrow z^3 = \dfrac{1}{2(1-i)} = \dfrac{1+i}{4}$

$\Leftrightarrow z^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{4}} \times e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$

Autrement :

$\left((1-i)z\right)^3 + i = 0 \Leftrightarrow \left((1-i)z\right)^3 - i^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[(1-i)z - i\right]\left[-2iz^2 + i(1-i)z - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{2} = \dfrac{-1+i}{2}$

Ou $-2iz^2 + (1+i)z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2}$

ou $z = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right) - i\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ ou $z = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)(1-i)$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. a) $\left(e^{i\theta} - i\right)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$

(C'est un produit remarquable)

b) $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

$\Delta' = (-i)^2 - 2ie^{i\theta} + e^{2i\theta} = -1 - 2ie^{i\theta} + e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta} - i\right)^2$

$\Rightarrow e^{i\theta} - i$ est une racine carrée de Δ'

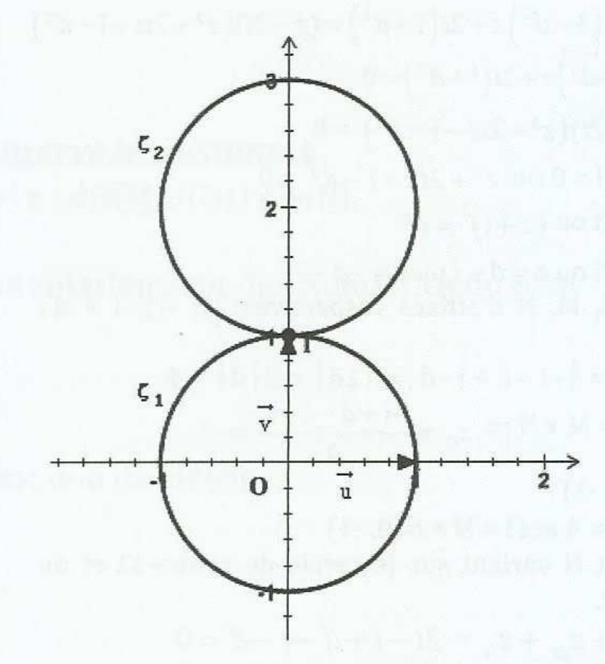
$z' = \dfrac{i - e^{i\theta} + i}{1} = 2i - e^{i\theta}$

$z'' = \dfrac{i + e^{i\theta} - i}{1} = e^{i\theta}$

2. $M_1\left(e^{i\theta}\right)$ et $M_2\left(2i - e^{i\theta}\right)$

a) $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ \arg(z_1) \equiv \theta[2\pi], \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$

$\Leftrightarrow M_1 \in \zeta_1$ le cercle de centre O et de rayon 1



b) $I = M_1 * M_2 \Leftrightarrow z_I = \dfrac{e^{i\theta} + 2i - e^{i\theta}}{2} = i$

c) $M_2 = S_I(M_1)$

$M_1 \in \zeta_1 \Leftrightarrow M_2 \in \zeta_2$ où $\zeta_2 = S_I(\zeta_1)$

3. a) $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$?

$(M_1M_2)^2 = \left|2i - e^{i\theta} - e^{i\theta}\right|^2 = 4\left|i - e^{i\theta}\right|^2$

$\Rightarrow (M_1M_2)^2 = 4\left|-\cos\theta + i(1 - \sin\theta)\right|^2$

$\Rightarrow (M_1M_2)^2 = 4\left[\cos^2\theta + (1 - \sin\theta)^2\right]$

$\Rightarrow (M_1M_2)^2 = 4\left[\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 1 - 2\sin\theta\right]$

$\Rightarrow (M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$

b) M_1M_2 est maximale

$\Leftrightarrow (M_1M_2)^2$ est maximale

$\Leftrightarrow 8(1 - \sin\theta)$ est maximale $\Leftrightarrow \sin\theta = -1$

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$ ($\theta \in [0, 2\pi[$)

24 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. $E_d : z^3 + \left(3 - d^2\right)z + 2i\left(1 + d^2\right) = 0$

Où d est un nombre complexe donné de module 2.

a) $(2i)^3 + \left(3 - d^2\right) \times 2i + 2i\left(1 + d^2\right)$

$= -8i + 6i - 2id^2 + 2i + 2id^2 = 0$

$\Rightarrow$ 2i est une solution de E_d

b) $z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = (z - 2i)(z^2 + 2iz - 1 - d^2)$

$z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + 2iz - 1 - d^2) = 0$

$\Leftrightarrow$ z - 2i = 0 ou $z^2 + 2iz - 1 - d^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ z = 2i ou $(z + i)^2 = d^2$

$\Leftrightarrow$ z = 2i ou z = d - i ou z = - d - i

2. A, B, M, N d'affixes respectives 2i ; -i ; -i + d ; -i – d.

a) MN = |- i - d + i - d| = |2d| = 2|d| = 4

Soit Ω = M ∗ N ⇒ $z_\Omega = \dfrac{-i + d - i - d}{2} = -i$

⇒ Ω(0, -1)

b) MN = 4 et Ω = M ∗ N(0, -1)

⇒ M et N variant sur le cercle de centre Ω et de rayon 2.

c) $z_A + z_M + z_N = 2i - i + d - i - d = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ ⇒ O est le centre de gravité du triangle AMN

d) AMN est isocèle en A ⇒ (AO) ⊥ (MN)

$\Rightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{MN}}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{2i}{-2d} \in i\mathbb{R}$ ⇒ d ∈ IR, or |d| = 2

⇒ d = 2 ou d = - 2.

 SUR LE CHEMIN DU BAC

z est un nombre complexe différent de – 1, 0 et 1.

M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P ⇔ $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{PM}}}{z_{\overrightarrow{PN}}}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dfrac{z - z^3}{z^2 - z^3}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dfrac{z(1-z)(1+z)}{z^2(1-z)} = \dfrac{1+z}{z}$ est imaginaire pur

b) On pose z = x + iy où x et y sont des réels.

$$\frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

MNP est un triangle rectangle en P

$\Leftrightarrow \dfrac{1+z}{z} = \dfrac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} = 0$, avec (x, y) ≠ (0, 0) ; (-1, 0) et (1, 0)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0$, avec (x, y) ≠ (0, 0) ; (-1, 0) et (1, 0)

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$, avec (x, y) ≠ (0, 0) ; (-1, 0) et (1, 0)

⇔ M ∈ (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) a) $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_N - z_O}{z_M - z_O}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(\dfrac{z^2}{z}\right)[2\pi] \equiv \arg z\,[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_P - z_O}{z_N - z_O}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(\dfrac{z^3}{z^2}\right)[2\pi] \equiv \arg z\,[2\pi]$

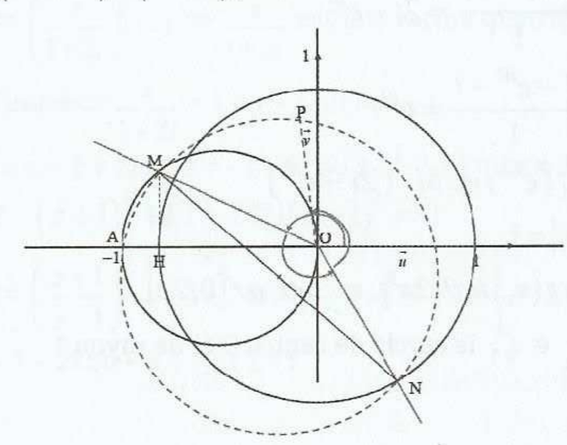
$\equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$

b) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} = OH \times OA = OH$ (en projetant orthogonalement M sur (OA)).

D'autre part on a $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = OM^2$ (en projetant orthogonalement A sur (OM)).

c) ON = $|z^2|$ = $|z|^2$ = OM^2 = OH ⇒ N appartient au cercle de centre O et de rayon OH tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$

Le triangle MNP est rectangle en P donc A appartient au cercle de diamètre [MN] tel que $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$



Isométries

I) Résumé du cours

A) Définition :

Une isométrie du plan est une application qui ***conserve les distances*** .

(f : P → P est une isométrie) ⇔ (∀ (M,N) ∈ P^2, on a : d(f(M),f(N)) = MN).

Exemples:

Une symétrie orthogonale , **u**ne translation et une rotation sont des isométries du plan.

N. B:

- $id_P = t_{\vec{0}} = r_{(\Omega,\ 2k\pi)}$ est une isométrie.
- $S_\Omega = r_{(\Omega\ ,\pi)}$ est une isométrie.
- La composée de deux isométries du plan est une isométrie.

B) Propriétés :

1. Isométrie et produit scalaire :

Théorème :

Soit f une application du plan.

(f est une isométrie du plan) si et seulement si (pour tous points A, B et C du plan d'images respectives par f A', B' et C', on a : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$)

On dit qu'une isométrie ***conserve le produit scalaire***.

2. Isométrie et relations vectorielles :

Théorème :

Soit f une **isométrie** du plan.

A, B et C trois points d'images respectives par f A', B' et C'. $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$

Conséquences :

- Les images de trois points alignés par une isométrie sont trois points alignés.
- Les images de trois points non alignés par une isométrie sont trois points non alignés.
- Si f est une isométrie et I = A ∗ B alors f(I) = f(A) ∗ f(B).
- Une isométrie conserve le barycentre. $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{A'B'}$
- Une isométrie *conserve l'équipollence*.

A, B, C et D sont quatre points d'images respectives A', B', C' et D'.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Rq : L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.

- Une isométrie conserve les relations vectorielles.

A, B, C, D, E et F six points d'images respectives par f A', B', C', D', E' et F'.

Si $\overrightarrow{EF} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{CD}$ *alors* $\overrightarrow{E'F'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'} + \beta\,\overrightarrow{C'D'}$.

- Une isométrie conserve le centre de gravité d'un triangle.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}\ alors\ \overrightarrow{A'G'} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{A'C'}$$

3. Détermination d'une isométrie :

Une isométrie est entièrement déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Conséquences :

Soient f et g deux isométries du plan.

A, B et C sont trois points non alignés.

(f = g) ⇔ (f(A) = g(A) , f(B) = g(B) , f(C) = g(C)).

4. Réciproque d'une isométrie :

Théorème:

Une isométrie du plan est une bijection, sa réciproque f^{-1} est une isométrie du plan.

5. Images de quelques parties du plan :

Soit f une isométrie du plan.

$(A, B) \in P \times P, A \neq B$; A' = f(A) et B' = f(B).

Soit $M \in P$ et M' = f(M).

f([AB]) = [AB] ; f((AB)) = (AB) ; f([AB]) = [AB] ; $f(\zeta_{(I,r)}) = \zeta_{(I,r)}$

Les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires

Les images de deux droites parallèles sont parallèles

Une isométrie transforme un cercle (C) et une droite Δ tangente à (C) en M, en un cercle (C') et une droite Δ' tangente à (C') en M' = f(M).

On dit qu'une isométrie *conserve le contact*.

C) Isométrie et points invariants :

Introduction :

Soit f une application du plan.

- Un point M est invariant par f signifie f(M) = M.
- Soit E une partie non vide de P.
  - (La partie E est invariante point par point par f) signifie ($\forall$ M $\in$ E, f(M) = M).
  - (La partie E est globalement invariante par f) signifie (($\forall$ M $\in$ E, f(M)$\in$ E).
- Cas d'une isométrie

Soit f une isométrie du plan.

On désigne par Inv(f) l'ensemble des points invariants par f, c . a . d

Inv(f) = {M $\in$ P / f(M) = M}. On peut avoir :

Inv(f) = ∅, c'est l'exemple d'une translation de vecteur non nul

Inv (f) = {I} c'est l'exemple d'une rotation d'angle non nul

Inv(f) = Δ c'est l'exemple d'une symétrie orthogonale

Inv(f) = P si et seulement si f = id_P

Théorème n°1 :

Si une isométrie f laisse fixe trois points non alignés alors f = id_P.

Théorème n°2 :

Si une isométrie f distincte de l'identité laisse fixe deux points distincts A et B alors f est la symétrie axiale d'axe (AB).

Remarque : Une isométrie f qui laisse fixe deux points A et B est soit l' id_P soit $S_{(AB)}$.

Théorème n°3 :

Si une isométrie f laisse fixe un seul point I du plan alors f est une rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 2k\pi$.

Isométrie sans points invariants :

Composée de deux symétries orthogonales S Δ et S Δ'

a)Cas où $\Delta // \Delta'$

$S_{\Delta'} o S_{\Delta} = T_{2\overrightarrow{AA'}}$ avec A un point quelconque de Δ et A' son projeté orthogonal sur Δ'.

Réciproquement:

$T_{\vec{u}} = S_{\Delta'} o S_{\Delta}$, avec Δ une droite quelconque dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

Toute translation peut être décomposée en un produit de deux symétries orthogonales d'une infinité des manières.

Cas particulier:

Lorsque $\Delta = \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_{\Delta}$ = la translation de vecteur nul = l'identité.

b)Cas où Δ et Δ' sont sécantes en un point A.

$S_{\Delta'} o S_{\Delta} = Rot_{(A, 2\alpha)}$ avec α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}})$.

Réciproquement:

$Rot_{(A,\alpha)} = S_{D'} o S_{D}$; avec D une droite quelconque passant par A et D' la droite passant par A et telle que : $(\overrightarrow{u_D}, \overrightarrow{u_{D'}}) \equiv \frac{\alpha}{2}(\pi)$.

La décomposition d'une rotation en deux symétries orthogonales n'est pas unique.

Cas particulier: Lorsque $\Delta \perp \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_{\Delta}$ est la symétrie centrale de centre le point d'intersection des droites Δ et Δ'.

Réciproquement, une symétrie centrale de centre un point A est la composée d'une infinité de manières de
deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires qui se coupent en A.

Théorème n°2 :

Une isométrie sans points fixes est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

Définition :

On appelle symétrie glissante φ toute composée $T_{\vec{u}} o S_{\Delta}$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul directeur de la droite Δ.

* La droite Δ s'appelle l'axe de la symétrie glissante φ.

* Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle le vecteur de la symétrie glissante φ.

Propriétés :

- Les éléments caractéristiques d'une symétrie glissante sont le vecteur et l'axe.
- $\vec{u}$ est un vecteur non nul directeur de la droite Δ. On a: $T_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o T_{\vec{u}}$.
- Une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe la droite Δ.est bijective et sa réciproque est la symétrie glissante de vecteur $-\vec{u}$ et d'axe la droite Δ.
- Si f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ. Alors fof = $T_{2\vec{u}}$.
- Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ.
  - La droite Δ est globalement invariante par l'application f.
  - La droite Δ est l'ensemble des milieux des segments [MM'], où M' = f(M).

II) Exercices



1 QCM ; FAUX OU VRAI

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) SiΔ est l'axe d'une symétrie glissante f alors pour tout $M \in \Delta$ on a : $f(M) = M$

2) Si une isométrie f n'admet aucun point invariant alors f est une symétrie glissante.

3) Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B alors $f = S_{(AB)}$

4) Si $f = R_{(O,\frac{2\pi}{3})}$ alors $fof = f^{-1}$

5) Si f est une isométrie qui n'admet aucun point fixe alors fof est une translation

6) Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o S_{\Delta'}$

7) Toute rotation $r_{(I,\alpha)}$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$r = S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)} \text{ avec } (\widehat{\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}}) \equiv \frac{\alpha}{2}[\pi]$$



2 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABC un triangle équilatéral

Le nombre d'isométrie qui laisse globalement invariant l'ensemble $\{A,B,C\}$ est :

a) deux isométries

b) trois isométries

c) six isométries



3 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABCD un carrée de sens direct, les isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A,B,C,D\}$ sont.

a. id_p et S_o

b. id_p, S_o, $r_{(O,\frac{\pi}{2})}$

c. id_p, S_o, $r_{(O,\frac{\pi}{2})}$, $r_{(O,-\frac{\pi}{2})}$, $S_{(AC)}$, $S_{(BD)}$, S_{Δ}, $S_{\Delta'}$ avec $\Delta = med[AB]; \Delta' = med[BC]$

4 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par H et K projetés orthogonaux de B respectivement sur (AD) et (DC) et on pose $f = S_{AB} \circ S_{DC} \circ S_{AD} \circ S_{BC}$

a) $f = t_{2\overrightarrow{HK}}$

b) $f = t_{\overrightarrow{HK}}$

c) $f = t_{2\overrightarrow{KH}}$



QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABCD un rectangle et on pose $g = S_{BC} \circ S_{AD} \circ S_{CD} \circ S_{AB}$

a) $g = t_{\overrightarrow{AC}}$

b) $g = t_{2\overrightarrow{AC}}$

c) $g = t_{2\overrightarrow{CA}}$



QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soient A,B et C trois points non alignés et f une isométrie qui fixe les points A et B

Et ne fixe pas C , alors f est :

a) $f = t_{\overrightarrow{AB}}$

b) $f = id_p$

c) $f = S_{AB}$



QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABC un triangle équilatéral direct et f une isométrie tel que f(A)=B et f(B)=C.

f n'admet pas de points invariants alors :

a) f est une translation

b) f est une symétrie glissante



QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ on pose O=B*C

Les isométries qui laisse globalement invariant l'ensemble $\{A,B,C\}$ sont

a) les symétries orthogonales d'axes passant par O

b) rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) symétrie orthogonale d'axe (OA)



APPLIQUER

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B. Soit f une isométrie du plan.

1) a) Montrer que si $f([AB]) = [AB]$ alors fof = Id_P.

b) En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant [AB].

2) Soient (C) et (C') deux cercles de centre respectifs O et O', O≠O', et de rayons R et R'.

Déterminer toute les isométries qui laissent invariant $(C) \cup (C')$. On distinguera deux cas :

R=R' et R≠R'



10 APPLIQUER

ABC est un triangle équilatérale I=A*B et J=A*C

1) Caractériser:

a) $S_{(BC)} \circ S_{(IC)}$. b) $S_{(BC)} \circ S_{(AC)}$. c) $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$ d) $S_{(BI)} \circ S_{(IC)}$

e) $S_{(BI)} \circ S_{(IA)}$ f) $r_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ r_{(B, -\frac{\pi}{3})}$ g) $r_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ S_B$

2) Décomposer en symétries orthogonales les isométries suivantes :

a) $r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$ b) $r_{(A, \frac{\pi}{3})}$ c) $t_{\overrightarrow{BC}}$ d) S_K

3) Caractériser : a) $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AK)}$ b) $r_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$ c) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(IK)}$



11 S'ENTRAINER

$ABCD$ est un carré direct ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_Δ et telle que : $f(B) = C$ et $f(D) = A$.

1- a) Montrer que le point $O = B * D$ est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f.

b) En déduire la nature et les caractéristiques de f.

2- Soit $g = f \circ S_\Delta$ et $\varphi = S_\Delta \circ f$

a) Chercher $g(A)$ et $g(C)$. En déduire que $g = S_{(AC)}$.

b) Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$.

c) En déduire la nature de $g \circ \varphi$.

12 S'ENTRAINER

ABC est un triangle isocèle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose $I = B * C$, $J = A * C$ et $K = A * B$.

Soit f une isométrie de P qui vérifie : $f(A) = B$ et $f(J) = K$.

1. Montrer que $f(C) = A$.
2. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'isométrie g définie par : g(A)= B ; g(C)= A et g(I)= I ; Quel est le point g(J) ?
3. Soit l'application $h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$.

a) Prouver que h est une isométrie vérifiant : h(A)= B et h(C)= A.

b) Déterminer le point I' = h(I).

4. a) Quelles sont les images possibles du triangle AIC par f ?

c) Déterminer alors les isométries f de P qui vérifient : $f(A) = B$ et $f(J) = K$.

13 S'ENTRAINER

Dans le plan orienté on considère un rectangle ABCD tel que AB=2AD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB]et[DC]et K le symétrique de I par rapport a (DC) . On pose $f = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$

1)
a) Caractériser $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$
b) Caractériser f

2) On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$.
a) caractériser l'isométrie : $goS_{(AJ)}$
b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) Soit φ une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ).
a) Montrer que φ fixe le point I
b) Déterminer alors toutes les isométries φ .



14 SE PERFECTIONNER

Dans le plan orienté P, on considère un carré $ABCD$ de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $E = S_{(CD)}(I)$.

1) On pose $f = S_{(CB)} \circ S_{(CA)}$.
a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
b) Déterminer $f(E)$.

2) La droite (ED) coupe (AB) en J et la perpendiculaire à (JC) en C coupe (BD) en K.
a) Préciser $f(J)$, en déduire la nature du triangle CJK
b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KD}}\right)[2\pi]$.

3) On pose $g = f \circ S_{(DE)}$ et $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ g$.
a)Déterminer $S_{(CA)} \circ S_{(DE)}$ et $S_{(CB)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.
b) En déduire que $g = S_{(EI)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$.
c)Caractériser alors h.
d) Pour tout point M du plan. On note $M_1 = S_{(ED)}(M)$ et $M_2 = f(M)$. On pose $N = M_1 * M_2$.

Montrer que N se déplace sur une droite fixe que l'on précisera lorsque M varie dans P.



1 QCM ; FAUX OU VRAI

1°) Faux : l'axe d'une symétrie glissante f est globalement invariant par f , c'est-à-dire pour tout dire $M \in \Delta$, $f(M) \in \Delta$
2°) Faux : une translation de vecteur non nul, n'a aucun point invariant.
3°) Faux : f peut être l'identité du plan.
4°) Vraie :
$f°f = R_{\left(o,-\frac{2\pi}{3}\right)} o R_{\left(o,-\frac{2\pi}{3}\right)} = R_{\left(o,-\frac{4\pi}{3}\right)} = R_{\left(o,\frac{2\pi}{3}\right)}$;

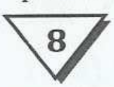
$f^{-1} = \left[R_{o,-\frac{2\pi}{3}}\right]^{-1} = R_{\left(o,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

5°) Vraie : une isométrie n'ayant aucun point fixe est une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissante $f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}$

et $f°f = t_{2\vec{u}}$ (c'est bien une translation).

6°) si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta}.oS_{\Delta} = t_{\vec{u}}$ mais $S_{\Delta} o S_{\Delta'} = t_{\vec{u}}$

7°) Faux : une infinité de décompositions, il suffit de prendre une droite quelconque (Ix) passant par I.



8 APPLIQUER

Exercices	2	3	4	5	6	7	8
Réponses	c	c	c	b	c	b	c

9 APPLIQUER

1) a) f est une isométrie du plan ; alors $f([AB]) = [f(A)f(B)]$

$f([AB]) = [AB] \Rightarrow \begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \end{cases}$

ou $\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = A \end{cases} \Rightarrow f \circ f(A) = A$

et $f \circ f(B) = B$.

$f°f$ est un déplacement qui fixe deux points distincts, donc $f \circ f = Id_p$.

b) $f \circ f = Id_P \Rightarrow f = Id_p$

ou $f = S_I$ ou $f = S_{(AB)}$ ou $f = S_{\Delta}$; ou I est le milieu de [AB] et Δ est la médiatrice de [AB].

Réciproquement, $Id_p ; S_I ; S_{(AB)}$

et S_{Δ} transforment [AB] en [AB].

Donc les isométries qui laisse globalement invariant [AB] sont $Id_p ; S_I ; S_{(AB)}$ et S_{Δ}.

2) a) R=R'
f est une isométrie qui laisse globalement invariant $(C) \cup (C') \Leftrightarrow f([OO']) = [OO']$.

Donc $f = Id_p$ ou $f = S_K$ ou $f = S_{(OO')}$ ou $f = S_{(D)}$ où K est le milieu de [OO'] et (D) est ma médiatrice de [OO'].

b) R≠R'

$f((C) \cup (C')) = (C) \cup (C') \Leftrightarrow f(O) = O$

et $f(O') = O' \Leftrightarrow f = Id_P$ ou $f = S_{(OO')}$

10 APPLIQUER

1)a) $S_{(BC)} o S_{(IC)} = R_{\left(C,2\left(\overline{CI},\overline{CB}\right)\right)} = R\left(C,\frac{\pi}{3}\right)$.

b) $S_{(BC)} o S_{(AC)} = R_{\left(c,2\left(\overline{CA},\overline{CB}\right)\right)} = R_{\left(c,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

c) $S_{(BC)} o S_{(IJ)} = t_{2\overline{IH}}$ avec H le projeté orthogonal de I

d) $S_{(BI)} o S_{(IJ)} = R_{\left(I,2\left(\overline{IC},\overline{IB}\right)\right)} = R_{(I,\pi)} = S_I$.

e) $S_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} o r_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)} = r_{\left(B,\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$

g) $r(B,\frac{\pi}{6}) o S_B = r_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} o r_{(B,\pi)} = r_{\left(B,\frac{7\pi}{6}\right)} = r_{\left(B,-\right)}$.

2°) a) $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(AI)} o S_{(AK)}$.

b) $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(AK)} o S_{(AI)}$

c) $t_{\overline{BC}} = S_{(AK)} o S_{\Delta}$ (Δ : la perpendiculaire à (BC) passant

d) $S_K = S_{(AK)} o S_{(BK)}$

3°) a) $S_{(BC)} o S_{(IJ)} o S_{(AK)} = t_{2\overline{IH}} o S_{(AK)}$ symétrie glissante de vecteur $2\overrightarrow{IH}$ et d'axe (AK).

b) $t_{\overline{BC}} o S_{(IK)} = t_{\overline{BJ}+\overline{JC}} o S_{(IK)} = t_{\overline{JC}} o t_{\overline{BJ}} o S_{(\overline{IK})} =$

$t_{\overline{JC}} o S_{(AC)} o S_{(IK)} o S_{(IK)} = t_{\overline{JC}} o S_{(AC)} o Id = t_{\overline{JC}} o S_{(AC)} =$

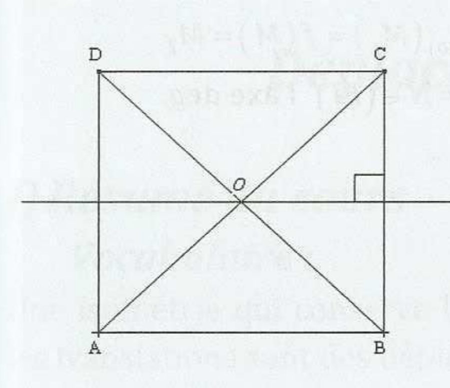
$t_{\frac{1}{2}\overline{AC}} o S_{(AC)} o t_{\frac{1}{2}\overline{AC}}$ d'où $t_{\overline{BC}} o S_{(IK)}$ est la symétrie glissante d'axe (AC) et de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

11 S'ENTRAINER

$ABCD$ est un carré direct ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_{Δ} et telle que : $f(B) = C$ et $f(D) = A$.



1. a) $O = B * D \Rightarrow f(O) = f(B) * f(D)$ car f conserve le milieu

$\Rightarrow f(O) = C * A = O \Rightarrow O$ est un point invariant par f.

Supposons qu'il existe un autre point O' invariant par $f \Rightarrow f$ est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan

- Supposons que f est une symétrie axiale $\Rightarrow f = S_\Delta$ car $f(B) = C$. Absurde
- Supposons que f est l'identité du plan $\Rightarrow f(B) = B$. Absurde

Ainsi O est l'unique point invariant par f.

b) f est une isométrie qui admet un seul point invariant O $\Rightarrow f$ est une rotation de centre O

$$\left.\begin{array}{l} f(O)=O \\ f(B)=C \\ (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$$

2. Soit $g = f \circ S_\Delta$ et $\varphi = S_\Delta \circ f$

a) $g(A) = f \circ S_\Delta(A) = f(D) = A$

$g(C) = f \circ S_\Delta(C) = f(B) = C$

g est une isométrie qui laisse fixe deux points distincts A et C $\Rightarrow$ g est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan

Or g est distincte de l'identité car si non f soit égale à S_Δ ce qui est absurde.

Ainsi g est la symétrie axiale d'axe (AC).

b) $\varphi(B) = S_\Delta \circ f(B) = S_\Delta(C) = B$

$\varphi(D) = S_\Delta \circ f(D) = S_\Delta(A) = D$

$\Rightarrow \varphi = S_{(BD)}$

c) $g \circ \varphi = S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = S_O$ car (AC) $\perp$ (BD) en O.

12 S'ENTRAINER

1. f une isométrie de P qui vérifie : $f(A) = B$ et $f(J) = K$.

J = A * C et f conserve le milieu $\Rightarrow f(J) = f(A) * f(C)$

$\Rightarrow K = B * f(C)$, or $K = B * A \Rightarrow f(C) = A$

2. g est une isométrie telle que : g(A)= B ; g(C)= A et g(I)= I

g(I) = I $\Rightarrow$ g est soit l'identité du plan, soit une symétrie axiale d'axe Δ passant par I, soit une rotation de centre I

Or $g(A) = B \neq A \Rightarrow g \neq id_P$ et $g \circ g(C) = B \neq C \Rightarrow$ g n'est pas une symétrie axiale

Ainsi $g = r_{\left(I,(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})\right)} = r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$

g(J) = K

3. $h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$

a) $\overrightarrow{IB}$ est un vecteur directeur de (KJ) $\Rightarrow$ h est la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{IB}$ et d'axe (JK)

$h(A) = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}(A) = t_{\overrightarrow{IB}}(I) = B$

$h(C) = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}(C) = S_{(KJ)} \circ t_{\overrightarrow{IB}}(C) = S_{(KJ)}(I) = A$

(la forme réduite d'une symétrie glissante est commutative)

b) $I' = h(I) = t_{\overrightarrow{IB}}(A) \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI'} \Rightarrow I'$ est le quatrième sommet du carré BIAI'

4. a) AIC est un triangle rectangle et isocèle en I

$\Rightarrow f(AIC) = Bf(I)A$ est un triangle rectangle et isocèle en $f(I)$

$\Rightarrow f(AIC)$ = BIA ou BI'A

b) Si f est une isométrie vérifiant $f(A) = B$ et $f(J) = K \Rightarrow f(AIC)$ = BIA ou BI'A

$\Rightarrow f(I) = I$ ou $f(I) = I' \Rightarrow f = g = r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$

ou $f = h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$

13 S'ENTRAINER

1) a) $S_{(BC)} o S_{(IJ)} = t_{2\overrightarrow{IB}} = t_{\overrightarrow{AB}}$. ((IJ)// (BC)).

b) $f = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)} = S_{(IC)} o S_{(BC)} o S_{(IJ)} o S_{(IJ)} = S_{(IC)} o S_{(BC)} = r_{\left(c,2(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI})\right)} = r_{\left(c,-\frac{\pi}{2}\right)}$

2) a) $g o S_{(AJ)} = t_{\overrightarrow{ik}} o S_{(IC)} o S_{(AJ)} = t_{\overrightarrow{IK}} o t_{\overrightarrow{KC}} = t_{\overrightarrow{IC}}$.

b) d'où $g = t_{\overrightarrow{IC}} o S_{(AJ)}$ avec $\overrightarrow{IC}$ directeur à (IJ) ainsi $g = t_{\overrightarrow{AJ}} o S_{(AJ)} = S_{(AJ)} o t_{\overrightarrow{AJ}}$. g est la symétrie glissante d'axe (AJ) et de vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

3) a) (AB) et (IJ) ne sont pas parallèles donc f ne peut pas être une symétrie orthogonale, ni une translation, ni l'identité, f est une rotation donc de centre $(AB) \cap (IJ) = \{I\}$ et donc I est fixe ; f n'est pas une symétrie glissante fixant le point I, φ est alors une rotation de centre I.

b) $\varphi=r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $\varphi=r_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)}$ car (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

14 SE PERFECTIONNER

1) a) $(CB)\cap(CA)=\{C\}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$

donc $f=r_{\left(C,2\times\frac{\pi}{4}\right)}=r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$

b) $CE=CI$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CI}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ donc $f(E)=I$

2) a) f rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour)

$f(C)=C$ et $(JC)\perp(KC)$ donc $f((JC))=(KC)$

$f((DE))=(f(D)f(E))=(BI)$

$J\in(JC)\cap(DE)$

$\Rightarrow f(J)\in f((JC))\cap f((DE))$

$=(KC)\cap(BI)$ or $(KC)\cap(BI)=\{K\}$

donc $f(J)=K$

D'où $CJ=CK$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CK}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et donc CJK est un triangle rectangle et isocèle en C.

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{f(J)f(C)},\overrightarrow{f(J)f(D)}}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KB}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KD}}\right)[2\pi]$

3°) a) $(CA)//(DE)$ donc $S_{(CA)}\circ S_{(DE)}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. En effet $\overrightarrow{DB}$ un vecteur normal de (DE) tel que $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}((DE))=(CA)$

$S_{(CB)}\circ t_{\overrightarrow{DC}}=\underbrace{S_{(CB)}\circ S_{(CB)}}_{Id}\circ S_{(EI)}=S_{(EI)}$

en effet $\begin{cases}(CB)//(EI)\\ \overrightarrow{DC}\text{ normal à }(CB)\\ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}}((EI))=(CB)\end{cases}$

b) $g=f\circ S_{(DE)}=S_{(CB)}\circ S_{(CA)}\circ S_{(DE)}$

$=S_{(CB)}\circ t_{\overrightarrow{DB}}=S_{(CB)}\circ t_{\overrightarrow{DC}}\circ t_{\overrightarrow{CB}}=S_{(EI)}\circ t_{\overrightarrow{CB}}$

en effet $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (EI) donc g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et d'axe (EI)

d'où $g=t_{\overrightarrow{CB}}\circ S_{(EI)}$ et donc $h=\underbrace{t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{CB}}}_{Id}\circ S_{(EI)}=S_{(EI)}$

d) $M_1=S_{(ED)}(M)\Leftrightarrow S_{(ED)}(M_1)=M$

$g(M_1)=f\circ S_{(ED)}(M_1)=f(M)=M_2$

• donc $M_1*M_2=N\in(EI)$ l'axe de g.

Déplacements – antidéplacements

I) Résumé du cours

Vocabulaire :

Une isométrie qui conserve les angles orientés s'appelle un **déplacement** : Les rotations et les translations sont des déplacements.

Une isométrie qui transforme les angles orientés en leurs opposés s'appelle un **antidéplacement** : la symétrie orthogonale est un antidéplacement.

Toute isométrie du plan est soit un déplacement soit un antidéplacement.

Exemple1 :

Le plan(P) orienté est un muni d'un repère orthonormé direct.

Soit f est l'application qui, au point M(x,y) associe le point M'(x',y') avec

$$\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=x+2 \end{cases}$$

a) f est une isométrie .pour le voir, il suffit de prendre deux points A (a, b) et B(c, d) ; A'= $A'=f(A)(-b+1,a+2)$; $B'=f(B)(-d+1,c+2)$ et de vérifier directement que AB=A'B'.

b) Pour savoir si f est un déplacement ou un antidéplacement, il suffit de savoir si f conserve un angle orienté.

On peut donc prendre un exemple. Pour O(0,0), A(1,0) et B(0,1), on a :
O'=(O) avec O' (1,-2), A'=f(A) avec A' (1,-1) et B'=f(B) avec B' (0,-2).

On remarque que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2} et \left(\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'}\right)=\frac{\pi}{2}$. f conserve donc l'orientation, c'est un déplacement.

c) f n'admet aucun point invariant car le système $\left\{\begin{matrix} x=-y+1 \\ y=x+2 \end{matrix}\right\}$ n'admet aucun couple (x ; y) comme solution.

Le point O' (1,-2) étant l'image de O par f, posons t comme la translation vérifiant t(O)=O'.
L'isométrie f se décompose alors en f= tog où g est un déplacement laissant O invariant. C'est donc une rotation de centre O.

On vérifie sans peine que g est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exemple2 :

f est l'application qui, au point M(x,y) associe le point M'(x',y') avec $\begin{cases} x'=y-1 \\ y'=x+1 \end{cases}$

a) On vérifie directement que f est bien une isométrie.

b) Si on pose t comme étant la translation de vecteur $\vec{u}(-1;1)$, on remarque

que : $f = t \circ g$ ou g est l'application qui associe au point M(x, y) le point M'(y,x).

g est donc la réflexion par rapport a la droite (D) d'équation : y=x.

Donc, f est un antidéplacement.

La composée de 2 déplacements est un déplacement.

La composée de 2 antidéplacement est un déplacement.

La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque **:(Loi générale)**

La composée d'un nombre quelconque de déplacement et d'un nombre impair d'antidéplacement est un antidéplacement.

La composée d'un nombre quelconque de déplacement et d'un nombre pair d'antidéplacement est un déplacement.

A) Déplacement (caractérisation, composition, expression analytique exemples)

Propriété1 :

Si deux déplacements f et g sont tels qu'il existe deux points A et B distincts tels que : f(A)=g(A) et f(B)=g(B) alors f=g.

En particulier, si un déplacement f admet deux points distincts invariants alors f est l'identité sur (P).

ropriété2 :

Si A et B sont deux points distincts et A'et B' sont deux points tels que AB=A'B' alors il existe un unique déplacement f tel que f(A)=A'et f(B)=B'.De plus f est une translation ou une rotation

Propriété3 :

Si f et g sont 2 rotations de centres respectifs A et B et d'angles respectifs a et b alors $f \circ g$ est une rotation d'angle (a+b).

De plus, si f et g ont même centre alors $f \circ g$ est aussi de centre A=B

En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

B) Antidéplacement

Propriété1 :

Tout antidéplacement est la composée d'un déplacement et d'une symétrie orthogonale

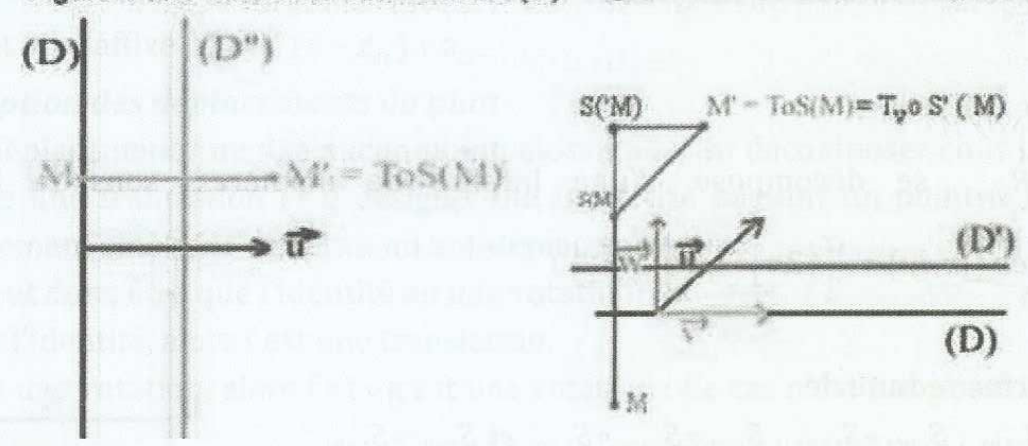
Propriété2 :

La composée d'une translation T de vecteur u et d'une symétrie orthogonale S d'axe (D) est :

- Une symétrie orthogonale si u est normal a (D).
- La composée d'une translation T de vecteur v, directeur de (D), et d'une symétrie orthogonale d'axe parallèle a (D) sinon.

On voit sur les figures ci-dessous deux cas :

Figure 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est normal à (D) Figure 2: Le vecteur u n'est pas normal à (D)



Conclusion :

Un produit (ou une composition) d'un nombre impair d'antidéplacement se décompose en :

- Soit une symétrie orthogonale
- Soit une composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale, le vecteur de la translation étant un vecteur directeur de l'axe de la symétrie orthogonale.

C) V-Classification des isometries :

1) comment identifier une isometrie :

Pour reconnaitre une isometrie f , on cherche l'ensemble des points invariants.

Ensemble des points invariants par f	Nature de l'isométrie : Déplacement	Nature de l'isométrie : Antidéplacement
$\mathcal{P}$	$f = \mathrm{Id}\mathcal{P}$	
(Δ)		$f = S_\Delta$ symétrie orthogonale
$\{\Omega\}$	$f = r_{(\Omega,\theta)}$	
Pas de points invariants	$f = t_{\vec{u}}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ si $\overrightarrow{MM'} = Cste$	$\overrightarrow{MM'} \neq Cste \Rightarrow f =$ symétrie glissée

Angle de déplacements :

Soit f un déplacement, A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par f, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est appelé angle du déplacement f. Toute mesure θ de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ est dite angle de f.

- La composée de deux déplacements d'angles α et β et un déplacement d'angle la somme des angles $\alpha + \beta$.
- la réciproque d'un déplacement d'angle α est un déplacement d'angle $(-\alpha)$

Translation :

Retenons :

Si $\Delta // \Delta'$ *alors* $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{IJ}}$ *où I est un point quelconque de* Δ *et J est son projete orthogonal sur* Δ'

Retenons : Toute translation $t_{\vec{u}}$ se décompose , d'une infinité de manières ,en deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} o S_\Delta$ où Δ est une droite arbitraire vérifiant :

$\vec{u} \perp dir(\Delta)$ et $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

Rotation :

. $S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)} = R(I, 2(Ix, Iy))$:

. Toute rotation $R_{(I,\alpha)}$ se décompose, d'une infinité de manières, sous la forme :

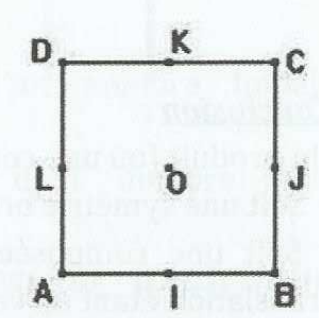
$R_{(I,\alpha)} = S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)}$ avec $(Ix, Iy) = \dfrac{\alpha}{2}[2\pi]$

Exemple :

1) Déterminer la forme réduite de

$S_{(JL)} \circ S_{(AB)}$, $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$, $S_{(JK)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(JL)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ et $S_{(BD)} \circ S_{(AB)}$

2) Décomposer en deux symétries orthogonales : $R_{(A,\frac{\pi}{2})}$, $t_{\overrightarrow{AB}}$, S_O



<u>Classification des déplacements :</u>

Soit f un déplacement ; Δ *et* Δ' deux droites tels que $f = S_{\Delta} o S_{\Delta'}$. Le tableau suivant détermine la nature, l'angle et l'ensemble des points invariants par f suivant la position relative de Δ *et* Δ'

Position relative de Δ et Δ'	Nature de f	Angle de f	Ensemble des points invariants
$\Delta = \Delta'$	Identité	$2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Le plan P
$\Delta // \Delta'$ et $\Delta \neq \Delta'$	Translation de vecteur non nul	$2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Φ
$\Delta \perp \Delta'$ et $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$	S_I	$\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$\{I\}$
$\Delta \cap \Delta' = \{I\}$ et $(\widehat{\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{\Delta'}}) \equiv \alpha [\pi]$	$R_{(I, 2\alpha)}$	$2\alpha \neq 2k\pi$	$\{I\}$

<u>Théorème :</u>

Si A, B, A'et B' sont quatre points du plan vérifiant : AB=A'B' et AB$\neq$0 alors

- Il existe un unique déplacement f vérifiant f(A)=A'et f(B)=B'.

-Il existe un unique antidéplacement g vérifiant : g(A)=A'et g(B)=B', et on a : $g = f \ o \ s_{(AB)}$

N.B : Let théorème précèdent prouve les assertions suivantes :

- Un déplacement est parfaitement détermine par son action sur deux points distincts.

-Un antidéplacement est parfaitement déterminé par son action sur deux points distincts.

<u>Ecriture complexe des déplacements</u>

Ecriture complexe des translations :

La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ associe, a tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + z_{\vec{u}}$ où $z_{\vec{u}}$ *designe l'affixe de* $\vec{u}$.

Ecriture complexe des rotations :

La rotation $r_{(\Omega;\alpha)}$ de centre Ω et d'angle α, est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z'=e^{i\alpha}(z-z_{\Omega})+z_{\Omega}$

Description des déplacements du plan

Si un déplacement f ne fixe aucun point, alors f peut se décomposer sous la forme f=t $\circ$ g, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant un point O fixe, g doit être un déplacement sinon f=t $\circ$ g serait un antidéplacement

g ne peut donc être que l'identité ou une rotation.

Si g est l'identité, alors f est une translation.

Si g est une rotation, alors f =t $\circ$ g est une rotation : Ce cas n'est pas possible si f ne fixe aucun point.

En conclusion: Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

II) Exercices



1 QCM ; FAUX OU VRAI

Dans le plan orienté ABCD un carré de sens direct et de centre O. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie glissante.

2) $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie orthogonale.

3)Si un déplacement f fixe A et B alors f est l'identité du plan.

4) $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale d'axe (AC).

5) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie orthogonale.

6) $R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est la symétrie centrale de centre O

7) $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

8) $t_{\overrightarrow{AC}} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ soit f l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) f est la rotation de centre Ω d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

b) f est la rotation de centre Ω d'affixe -1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$

c) f est la rotation de centre Ω d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$



3 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, soit f ; $P \to$ P : M(x,y) $\to$ M'(x',y')

Tel que $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = 2 - x \end{cases}$

a) f est symétrie orthogonale
b) f est une symétrie glissante
c) f est une rotation



4 QCM ; FAUX OU VRAI

Choisir la bonne réponse

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit f ; $P \to$ P : M(d'affixe z) associer M'(z') tel que $z' = i\overline{z} + 1$

a) f est une rotation
b) f est symétrie orthogonale
c) f est une symétrie glissante



5 APPLIQUER

Soit f la transformation du plan définie analytiquement par : Au point M (x,y) , on associe le point M'(x',y') tels que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$

1) On pose z=x+iy et z'=x'+iy'. Montrer que $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\overline{z} + 1$

2) On pose O'=f(O).Vérifier que : O'M'=OM

3) Déterminer l'ensemble des points invariant par f

4) Soit M'' d'affixe z '' et M''= fof(M). Exprimer z'' en fonction de z et montrer que $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

5) $Soit\ g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} of.\ A et B\ les points\ d'affixes\ respectives\ z_A = \frac{1}{2}\ et\ z_B = \frac{1}{2\sqrt{3}}i$

Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives de A et B par g .prouver que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ que l'on précisera.

6) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}$ est réel.

7) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.



6 S'ENTRAINER

Soit ABCD et CEFD deux carrés tels que $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

De centre respectifs I et J et soient les points O,L,K les milieux respectifs des segments [CD],[EF]et[CE].

1)soit f une isométrie qui transforme le carré ABCD en CEFD

a)Montrer que f(I)=J

b)Déduire qu'il existe une seule symétrie orthogonale et une seule translation que l'on précisera qui transforme le carré ABCD en CEFD

2) Déterminer trois rotations qui transforment le carré ABCD en CEFD

3) Soit f l'isométrie définie par f(A) =C ; f(B)=D ;f(C)=F ;f(D)=E

a) Déterminer f(O)

b) Montrer que f ne peut pas avoir des points invariants

c) Construire l'image F' de F par f

d) Calculer f o f(A) ;f o f(B) et f o f(C).Caractériser f o f

e) Trouver un vecteur $\vec{u}$ et une droite Δ tels que $f = S_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_\Delta$

7 S'ENTRAINER

Dans le plan orienté ,on considére un triangle équilatéral ABC de sens direct A',B'et C' sont les milieux respectifs de [BC][AC]et [AB],on pose $D = S_{(AC)}(B)$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

1) Trouver toute les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC

2) Trouver un déplacement qui transforme ABC en ACD

3) En déduire tous les déplacements qui transforment ABC en ACD et préciser les éléments caractéristiques de chacun d'eux

4) Trouver tous les antidéplacements qui transforment ABC en ACD et déterminer les éléments caractéristiques de chacun d'eux .



8 S'ENTRAINER

Le plan est orienté dans le sens direct.On considere un losange ABCD tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

et on designe par I et J les milieux respectifs des segments [AB]et[CD].

1) Montrer qu'il existe une seule isometrie f qui transforme A en B et D en C.

2) Montrer que si f admet un point invariant M alors $M \in (DI) \cap (BJ)$. conclure .

3) Montrer que f est une symetrie glissante d'axe (U).

4) Determiner fof(A) et en deduire le vecteur de la symetrie glissante f



9 S'ENTRAINER

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Soient les isomètries sivantes : $f = S_{(CB)} o S_{(AD)} o S_{(AB)}$ et $g = S_{(CB)} o S_{(AD)}$

1) a)Déterminer la nature et les élements caractéristiques de g

   b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

   a) Construire le point E=R(A)

   b) Quelle est la nature du triangle CAE ?.

   c) Montrer que les points B,D et C sont alignés.

3) Soit I le milieu de [EA]

   a) Vérifier que : $R = S_{(CI)} o S_{(OA)}$

   b) Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de $h = S_{(CI)} o R o S_{(CI)}$



10 S'ENTRAINER

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et par r la rotation de centre I et D'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que : $t \equiv S_{(\Delta)} o S_{(AB)}$ où(Δ) est une droite que l'on déterminera.

2) Montrer que $r \equiv S_{(IB)} o S_{(\Delta)}$

3) En déduire la nature de fot et ses éléments caractéristiques.

11 SE PERFECTIONNER

Dans le plan orienté ;on considère un triangle EFG équilatérale dans le sens indirect et soient les points A,B et C milieux respectifs des segments [FG] , [FE] et [EG]

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en E et F en C

b)Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle .

2) a)Déterminer $S_{(BO)}\, o\, S_{(BA)}(A)$ et $S_{(BO)}\, oS_{(BA)}(F)$, en déduire que $f = S_{(BO)}\, o\, S_{(BA)}$ puis le centre de f

a) Déterminer la droite Δ pour que $f = S_{(\Delta)}oS_{(BO)}$

3) Soit H le projeté orthogonal e G sur (BC) ; I et J les milieux respectifs des segments [GH] et [GB] et soit $I' = S_{(BO)}(I)$.on pose $g = t_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BO)}$ .Déterminer g(I), en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) Soit $h = S_{(oA)}of$

a) Caract ériser $S_{(OA)}oS_{(\Delta)}$

b) Déduire que h est une symètrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

12 SE PERFECTIONNER

Dans le plan orienté,on considère un losange ABCD tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$. On désigne par I,J, K,L et O les milieux respectifs des segments [AB],[BC],[CD],[DA]et [BD].On note (Δ)et(Δ') les médiatrices respectives de [AB] et [CD]

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et D en C

b) Prouver que f n'est pas un une symétrie orthogonale

2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a) Montrer que f=RoS

b) Déterminer f(B)puis la nature et les élements caractéristiques de f

3) On pose $g = f\, o\, \sigma$ où σ est la symétrie orthogonaled'axe(Δ').Déterminer g (c) et donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) On pose $h = g^{-1}oR$

a) Prouver que h est une translation que l'on caractérisera

b) La droite (BC) coupe (Δ) en un point $M_1 = R^{-1}(M)$ et $M_2 = g^{-1}(M)$.

Montrer que les points $M, M_1, et\, M_2$ *sont alignés*

13 SUR LE CHEMIN DU BAC

Dans le plan P orienté dans le sens direct, on considère un triangle OAB rectangle et isocèle en O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soient les points $I, J\, et\, C$ les milieux respectifs des segments $[OA], [OB]$ *et* $[AB]$ *et* D tel que $OABD$ soit un parallélogramme.

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation f qui transforme A en O et O en B

b) Caractériser f

c) Déterminer $f \circ f(C)$ puis caractériser $f \circ f$

2) On muni le plan P d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soit g l'application de P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z} + 2i$.

a) Montrer que g est une isométrie

b) Montrer que l'ensemble des points fixes de g est vide

c) Déterminer $g(A)$ et $g(O)$ et en déduire que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera

d) Montrer que $g(B) = D$

3) Soient $S = g^{-1} \circ f$ et $S(C) = E$.

a) Déterminer $g(E)$. Résoudre l'équation $-i\bar{z} + 2i = 1 + i$ et en déduire que $z_E = \overline{z_C}$

b) Montrer que S est la symétrie orthogonale d'axe (OA)

c) En déduire que $g = f \circ S$.

d) Déterminer l'ensemble des points M de P tel que $g(M) = f(M)$.

e) La droite (BE) coupe (OA) en K et la droite (CD) coupe (OB) en L. Montrer que CKL est un triangle rectangle et isocèle.

4) Soit $\varphi = f \circ g$. Montrer que $\varphi = S_C \circ S$ puis caractériser φ.



SUR LE CHEMIN DU BAC

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle OAB rectangle en O tel que : $OB = 2OA$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; On note I et J les milieux respectifs des segments $[OB]$ et $[AB]$.

1) a)Montrer qu'il existe une seule rotation f telle que $f(O) = \mathrm{I}$ et $f(A) = B$.

b) Donner l'angle de f et construire son centre Ω.

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note $g = f \circ R^{-1}$.

a) Déterminer $g(O)$, puis caractériser g.

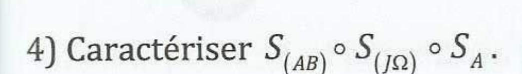
b) En déduire que $f = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R$.

3) Soient $C = R(\mathrm{I})$ et D l'image de O par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Vérifier que $OIDC$ est un carré direct.

b) Déterminer $(f \circ f)(O)$.

c) Caractériser $f \circ f$ et en déduire que Ω est le centre du carré $OIDC$.



4) Caractériser $S_{(AB)} \circ S_{(J\Omega)} \circ S_A$.

5) Soient $h = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(OA)}$ et $\varphi = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OA)}$.

a) Caractériser φ.

b) En déduire que h est une symétrie glissante que l'on caractérisera.



15 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient D = r(C) et E = r^{-1} (B).

On désigne par I le milieu du segment [CD].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit g = f o r.

a) Montrer que g est une translation.

b) Soit F = g(E).

Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3) Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

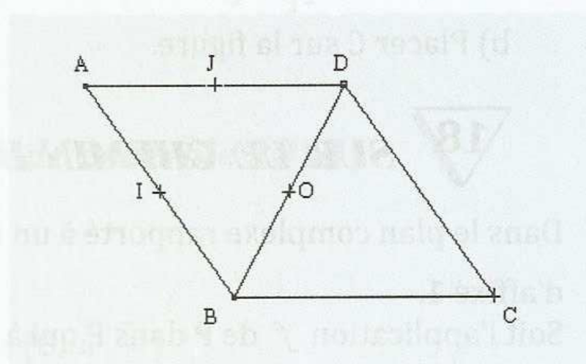
a) Montre qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

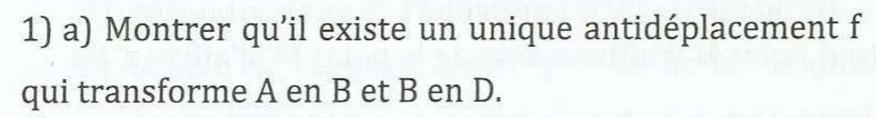
b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.



16 SUR LE CHEMIN DU BAC

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci – contre, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.





1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) Caractériser f.

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2) Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble

{A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que S(A) = C.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par S.

b) En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (BD).

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que g(A) = D.

a) Montrer que g(D) = B.

b) Caractériser alors g.



17 SUR LE CHEMIN DU BAC

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité : 2 cm)

On considère :

- Le point A d'affixe $a=5-i\sqrt{3}$
- Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct
- Le milieu Q de [OB].

1) a) Démontrer que B a pour affixe $b=4+2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q.

b) Déterminer l'affixe z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme

c) Démontrer que $\dfrac{z_K-a}{z_K}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit - on pour le triangle OKA ?

Préciser la nature du quadrilatère OQAK

d) Placer les points A, B, Q et K dans le plan.

2) Soit C le point d'affixe $c=\dfrac{2a}{3}$.

a) Calculer $\dfrac{z_K-b}{z_K-c}$; Que peut - on déduire pour les points B, C et K ?

b) Placer C sur la figure.



18 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session principale 2005)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z+1-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2)Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.

a) Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c) En déduire l'ensemble des valeurs de n pour les quelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

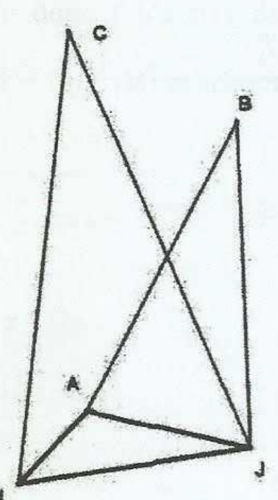


19 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session principale 2012)



Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangle isocèles respectivement en B et C tels que

$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et pas r_B et r_c les rotation de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1)

a) Déterminer r_c (I)

b) Montrer que $r_B ot(I) = j$

c) En déduire que $r_B ot = r_c$

2) Soit K=t(C)

Montrer que BC=BK et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.



3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $\left(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

a) Soit O le milieu de $[AC]$

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O et le triangle BKC

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.



20 SUR LE CHEMIN DU BAC (Session de contrôle 2012)

Soit a un réel strictement positif

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)\,az+ia^2=0$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia

a) quelle est la nature du triangle OAB ?

b) déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré

3) soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct

a) monter que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})a$

b) calculer l'affixe du point Q

c) montrer que les points B,P et Q sont alignés

1 QCM ; FAUX OU VRAI

1°) Faux : $S_{(AB)}oS_{(AC)}oS_{(AD)}$ fixe le point A , elle ne peut pas donc être une symétrie glissante.

2°) Faux : $S_{(AB)}oS_{(DC)}oS_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{CB}}oS_{(AD)}$ et $\overrightarrow{CB}$ directeur à (AB) donc $S_{(AB)}oS_{(DC)}oS_{(AD)}$ est une symétrie glissante et non pas une symétrie orthogonale.

3°) : Le seul déplacement qui fixe plus qu'un point est l'identité du plan.

4°) Faux : $R_{\left(o,\frac{\pi}{2}\right)}oS_{(AB)}(A) = B$ mais $S_{(AC)}(A) =$ A .

5°) Vraie : $t_{\overrightarrow{AB}}oS_{(AD)} = S_{\Delta}oS_{(AD)}oS_{(AD)} = S_{\Delta}$ (Δ la droite parallèle à (AD) passant par O).

6°) Faux $R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}oR_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ ne fixe pas le point O, alors que O est fixe par S_o .

7°) Vraie : $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}oR_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$ c'est une translation qui envoie A en C est donc $t_{\overrightarrow{AC}}$.

8°) Vraie : $t_{\overrightarrow{AC}}\ oR_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$ est la composée de deux déplacements d'angles O et $\frac{\pi}{3}$ est alors un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est une rotation.

4 APPLIQUER

Exercices	2	3	4
Réponses	c	b	c



5 APPLIQUER

1- $z = x+iy$, $z' = x+iy'$

$$z' = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3y}+2)+i\frac{1}{2}(\sqrt{3x}-y)$$

$$= \frac{1}{2}(x-iy)(1+i\sqrt{3})+1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z}+1$$

$$2-O'M' = |z'-z_{O'}| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z}+1-1\right|$$

$$= \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z}\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right||\bar{z}| = |\bar{z}| = |z| = OM$$

Donc f conserve la distance

3- Ensemble des points invariants par f

Un point M est invariant par f ssi f(M)

$$\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z}+1 = z$$

on pose $z = x+iy$ *donc on aura* $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(x-iy)+1 = x+iy$ $= M$

$$soit \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+1=x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y-1=0 \\ \sqrt{3}x-3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}(x-\sqrt{3}y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y=1 \\ (x-\sqrt{3}y)=0 \end{cases}$$

Ce qui est impossible donc f n'a pas de points invariants

4- M'' d'affixe z '' et M''= f o f (M).exprimons z'' en fonction de z

f o f(M)=M'' signifie

$$z'' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}+1\right)}+1$$

$$= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z+1\right)+1$$

$$f(f(M)) = M'' = z+\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$$

Donc fof est une translation de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$5-g = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}of.$

A et B les points d'affixes

$z_A = \frac{1}{2}$ *et* $z_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}}i$. $A' = g(A), B' = g(B)$

Affixe de A' et affixe de B' :

$A' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}of(A) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(f(A))$;

posons $f(A) = A_1$ *d'affixe* z_1 ;

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}+1 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$$

$$t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(A_1) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = z_A+\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{5+i\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{5+i\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = z_A$$

Donc g(A)=A de même on trouvera que g(B)=B.g est

différent de l'identité et g est une isométrie (composée de deux isométries) qui fixe deux points distincts donc g est une symétrie orthogonale d'axe (AB)

$$6-\frac{z_B-z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{3}}i-\frac{1}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{-2}{\sqrt{3}}i-2}{3+i\sqrt{3}}$$

$$=-(\frac{2i+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(3+i\sqrt{3})}=-(\frac{2i+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3i})$$

$$=-\frac{2}{3}(\frac{3\sqrt{3}+3i}{3\sqrt{3}+3i})=-\frac{2}{3}\in IR$$

$$7-t_{\frac{1}{2}\vec{u}}of=S_{(AB)}\Leftrightarrow f=t_{\frac{1}{2}\vec{u}}oS_{(AB)}$$

et on verifiera facilement que $\frac{1}{2}\vec{u}$ *est directeur de* (AB)

Donc f est une symétrie glissante d'axe (AB) et de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

6 S'ENTRAINER

1°) a) Soit une isométrie qui transforme le carré ABCD en CEFD donc f transforme le centre du carré ABCD en le centre J du carré CEFD, ainsi f(I) =J.

b) si f est un déplacement, transformant I en J est $t_{\overrightarrow{IJ}}$ ou $r_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}$. Si f est un antidéplacement, transformant I en J est $S_{(CD)}$ car (CD) est la médiatrice de $[IJ]$.

2° $r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)}$, $r_{\left(D,-\frac{\pi}{2}\right)}$ et $S_o=r_{(o,\pi)}$ sont trois rotations qui transforment le carré ABCD en CEFD.

3) a) On a f(c)=F et f(D)=E et comme O=C*D alors f(0)=f(C)*f(D)=F*E, ainsi f(0)=L.

b) f(0)=L donc $f=t_{\overrightarrow{OL}}$ on a $f=S_{(IK)}$.

c) f(F)=F' $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{FF'}=\overrightarrow{OL}$.

d) fof(A)=f(c)=F ; fof(B)=f(D)=E. fof(C)=f(F)=F' ;

7 S'ENTRAINER

1) ABC étant un triangle équilatéral, A', B' et C' désignent respectivement les milieux de [BC] [AC] et [AB] et O est le centre de gravité de ABC.

Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC

Donc $\varphi\left(\{A,B,C\}\right)=\{A,B,C\}$ et $\varphi(O)=O$

On distingue six cas :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=Id_p.\quad\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=S_{(OA)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=S_{(OC)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=S_{(OB)}.\quad\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=R_{(O;\frac{2\pi}{3})}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\\varphi(B)=B\\\varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\varphi=R_{(O;-\frac{2\pi}{3})}.$$

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l}R(A)=A\\R(B)=B\\R(C)=C\end{array}\right\}\Rightarrow$$ R est un déplacement qui transforme ABC en ACD.

3) Soit f un déplacement qui transforme ABC en ACD.

Or R^{-1} est un déplacement qui transforme ACD ; donc R^{-1} o f est un déplacement qui laisse globalement invariant ABC.

Donc on a $R^{-1}\circ f=Id_p$ ou $R^{-1}\circ f=R_{(O;\frac{2\pi}{3})}$ ou

$$R^{-1}\circ f=R_{(O;-\frac{2\pi}{3})}$$

Si $f=R\circ R_{(O;\frac{2\pi}{3})}$ et comme $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\equiv\pi[2\pi]$; alors f est une symétrie centrale

$$f(A)=R\circ R_{(O;\frac{2\pi}{3})}(A)=R(B)=C$$

Donc f est la symétrie centrale S_B , de centre B', milieu de [AC]

$S_{B'}(A)=C$; $S_{B'}(B)=D$ et $S_{B'}(C)=A$ donc $S_{B'}$ transforme ABC en ACD

Si $f=R\circ R_{(O;-\frac{2\pi}{3})}$

et comme $\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]$;

alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$R_{(C;\frac{-\pi}{3})}(A)=D$ et $R_{(C;\frac{-\pi}{3})}(B)=A$ donc

$R_{(C;\frac{-\pi}{3})}$ transforme ABC en ACD.

Ainsi les seulement déplacements qui transforment ABC en ACD sont R : $S_{B'}$ et $R_{(C;\frac{-\pi}{3})}$.

4) Soit g un antidéplacement qui transforme ABC en ACD.
Alors R^{-1} o g est un antidéplacement qui laisse globalement ABC.
Donc on a $R^{-1}\circ g=S_{(OA)}$ ou $R^{-1}\circ g=S_{(OB)}$ ou $R^{-1}\circ g=S_{(OC)}$.

D'où $g=R\circ S_{(OA)}$ ou $g=R\circ S_{(OB)}$ ou $g=R\circ S_{(OC)}$

Si $g=R\circ S_{(OA)}$, alors $g(A)=R(A)=A$, $g(B)=R(C)=D$ et $g(C)=R(B)=C$ Donc $gS_{(AC)}$.

Si $g=R\circ S_{(OB)}$, alors $g(A)=R(C)=D$, $g(B)=R(B)=C$ et $g(C)=R(A)=A$
Donc g est un antidéplacement tel que gog est non identique, car $g\circ g(C)=g(A)=D$.
Donc g est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

$g\circ g(C)=t_{2\vec{u}}(C)=D\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}$.

g(B)=C et g(C)=A alors les points A' et B' ; milieux respectifs de [BC]et[AC] sont des points de Δ. Donc Δ= (A'B')

Ainsi $g=t_{\overrightarrow{C'B'}}\circ S_{(C'B')}=S_{(C'B')}\circ t_{\overrightarrow{C'B'}}$

En conclusion ; les seuls antidéplacements qui transformes ABC en ACD sont :

$S_{(AC)};t_{\overrightarrow{A'B'}}\circ S_{(A'B')}$ et $t_{\overrightarrow{C'B'}}\circ S_{(C'B')}$.

8 S'ENTRAINER

1°) On a : AD = BC (car ABCD est une losange) et AD ≠ 0 , donc il existe une unique isométrie f telle que f(A)=B et f(0).

2°) si f admet un point invariant M, M serait un point commun aux médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$ qui sont (DI) et (BJ), c'est-à-dire M∈ (DI)∩ (BJ) or (DI)∩ (BJ)=∅, donc f n'a pas de point invariant. F est une symétrie glissante. (f ne peut pas être une symétrie orthogonale car les médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$ qui sont (DI) et (BJ) ne sont pas confondues, donc f est nécessairement une symétrie glissante).

3°) On a f= $t_{\overrightarrow{AB}}oS_{(AD)}=t_{\overrightarrow{AD}}ot_{\overrightarrow{DC}}ot_{\overrightarrow{CB}}oS_{(AD)}$

$=t_{\overrightarrow{AD}}ot_{\overrightarrow{CB}}ot_{\overrightarrow{AD}}oS_{(AD)}=t_{\overrightarrow{AD}}ot_{\overrightarrow{CB}}oS_{(IJ)}oS_{(AD)}oS_{(AD)}$

$=t_{2\overrightarrow{AD}}oS_{(IJ)}$, comme $\overrightarrow{AD}$ est directeur à (IJ), alors f est la symétrie glissante d'axe (IJ) de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4°) On va retrouver dans cette question, le vecteur de f.

9 S'ENTRAINER

1°)a) $g=S_{(CB)}oS_{(AD)}=t_{2\overrightarrow{AB}}((CB)//(AD))$.

b) f= $S_{(CB)}oS_{(AD)}oS_{(AB)}=t_{2\overrightarrow{AB}}oS_{(AB)}$. Comme $2\overrightarrow{AB}$ est directeur à (AB), f est alors la symétrie glissante de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ et d'axe (AB).

2°) R= $R_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$,

a) E=R(A) : voir figure

b) $\begin{cases}CA=CE\\(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ donc le triangle AEC est équilatéral.

3°)a) $S_{(CI)}oS_{(OA)}=S_{(CI)}oS_{(CA)}=R_{(C,2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}))}$

$=R_{(C,2.\frac{\pi}{6})}=R_{(C,\frac{\pi}{3})}\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}\right)=\frac{\pi}{6}$ car AEC est équilatéral et I=A*E)

b) $h=S_{(CI)}oR_{(CI)}$ est la composée d'un nombre pair d'antidéplacements et d'un déplacement est alors un déplacement.

$h=S_{(CI)}oS_{(CI)}oS_{(OA)}oS_{(CI)}$

$=S_{(OA)}oS_{(CI)}=S_{(OA)}oS_{(CI)}=R_{(C,2(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CA}))}=R_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

10 S'ENTRAINER

On pose $t=t_{\overrightarrow{BC}}$; $r=r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$.

1°) Soit Δ la médiatrice de $\left[BC\right]$ qui coupe (BC) en J ; $S_{\Delta}oS_{(AB)}=t_{\overrightarrow{BC}}$.

2°) $S_{(IB)}oS_{\Delta}=r_{(I,2(\overline{IJ},\overline{IB}))}=r_{\left(I,2.\frac{\pi}{4}\right)}=r_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$

= r $\left((IB)\cap\Delta=\{I\}\right)$.

3°) f est la composée d'une translation et d''une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est alors une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; f=r o t = $S_{(IB)}oS_{\Delta}OS_{\Delta}oS_{(AB)}=S_{(IB)}oS_{(AB)}$

$=r_{(B,2(\overline{BA},\overline{BI}))}=r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$.



11 SE PERFECTIONNER

1) a) On a AF=EC et AF≠ 0, donc il existe un unique déplacement f tel que f(A)=E et f(F)=C

b) l'angle de f est $\theta\equiv\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}\right)[2\pi]$.

$\theta\equiv\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GC}\right)+\pi[2\pi]$ $\theta\equiv\frac{\pi}{3}+\pi[2\pi]$

$\theta\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

2°) a) $S_{(BC)}oS_{(BA)}(A)=E$, $S_{(BC)}oS_{(BA)}(F)=C$; f et $S_{(BC)}oS_{(BA)}$ sont deux déplacements qui coïncident en deux points distincts A et F, ils coïncident alors partout ; d'où $f=S_{(BC)}oS_{(BA)}$. Comme $S_{(BC)}oS_{(BA)}$ fixe le point B ; donc f=$r_{\left(B,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

b) $f=S_{\Delta}oS_{(BC)}\Rightarrow\Delta$ passe par B et $\left(\overrightarrow{BC},\vec{u}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ avec $\vec{u}$ directeur de Δ, d'où Δ=(BE).

3°) g(I)=$t_{\overrightarrow{HG}}oS_{\frac{n!}{r!(n-r)!}BC)}(I)=t_{\overrightarrow{HG}}(I')=I$ g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est alors un antidéplacement fixant le point I est donc une symétrie orthogonale d'axe passant par I.

g(H)=$t_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}(H)=t_{\overrightarrow{HG}}(H)=G$ d'où l'axe de g est la médiatrice de $\left[HG\right]=(IJ)$, $g=S_{(IJ)}$.

4°) a) $S_{(CA)}oS_{(BE)}$ est une translation car (BE)//(CA) ainsi $S_{(CA)}oS_{(BE)}=t_{\overrightarrow{2BJ}}=t_{\overrightarrow{BG}}$.

b) $h=S_{(CA)}of=S_{(CA)}oS_{(BE)}oS_{(BC)}=t_{\overrightarrow{2BJ}}oS_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BG}}oS_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BH}}ot_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}=t_{\overrightarrow{BH}}oS_{(IJ)}$

h est alors la symétrie glissante d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{JI}$.



12 SE PERFECTIONNER

1) a) On a AD=BC (ABCD est un losange) et AD ≠ 0, donc il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et D en C.

b) Si f est une symétrie orthogonale, son axe Δ serait à la fois Med$\left[AB\right]$ et Med$\left[CD\right]$, impossible, donc f n'est pas une symétrie orthogonale.

2°) a) R o S (A) = R (B) =B; R o S (D) = R(D) =C.
RoS et f sont deux antidéplacements qui coïncident en les points A et D donc ils coïncident partout, d'où f= RoS.

b) f(B)= RoS(B)=R(A)=D. f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est alors un antidéplacement, qui n'est pas une symétrie orthogonale est donc une symétrie glissante. f(A)=B et f(D)=C, donc l'axe de f est D=(IK).
fof(B)=f(D)=C ; donc le vecteur de f est $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IO}$.Ainsi

$f=S_{(IK)}ot_{\overrightarrow{IO}}=S_{(IK)}ot_{\frac{1}{2}\overrightarrow{IK}}oS_{(IK)}$

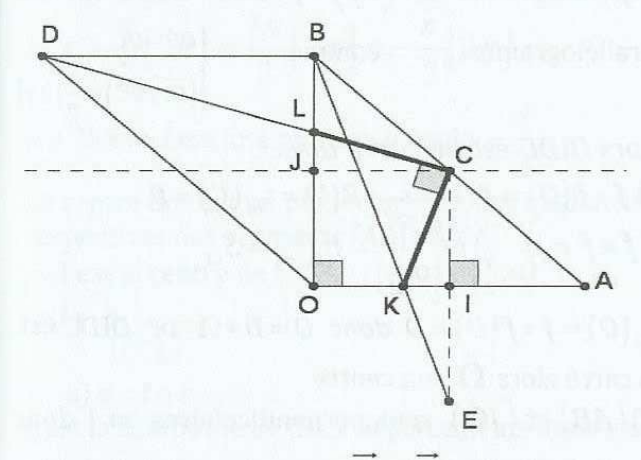
3°) g(c)=foS(C)=f(D)=C
g est la composée de deux antidéplacements est alors un déplacement fixant le point C est alors une rotation de centre C.
g(B)=foS(B)=f(B)=D donc g est d'angle $\theta\equiv\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$, g=$r_{\left(c,-\frac{\pi}{3}\right)}$

4°) a) $h=g^{-1}oR$ est la composée de deux déplacement d'angles $\frac{\pi}{3}$ et -$\frac{\pi}{3}$ est donc un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$-$\frac{\pi}{3}$=0, h est donc une translation,
h(A)= $g^{-1}oR(A)=g^{-1}(D)=B$, $h=t_{\overrightarrow{AB}}$.

b) $\left(\overrightarrow{MM},\overrightarrow{MM_2}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MM_2}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{3}+0+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\equiv0[2\pi]$ d'où les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

13 SUR LE CHEMIN DU BAC



1°) a) On a $AO = OB \neq 0$ et $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{OB}$ donc il existe une unique rotation f telle que $f(A) = O$ et $f(O) = B$.

b) On a f d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de centre C le point d'intersection des médiatrices (IC) et (JC) respectivement des segments $[OA]$ et $[OB]$. $f = r_{\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

c) On a $f \circ f(C) = f(C) = C$. $f \circ f$ est la composée de deux déplacements donc c'est un déplacement d'angle $-\pi$ (la somme des angles de f et f) et donc c'est une symétrie centrale de centre C (un point fixe de $f \circ f$).

2°) a) Soient $M_1'(z_1') = g(M_1(z_1))$ et $M_2'(z_2') = g(M_2(z_2))$.

On a $M_1'M_2' = \left|z_2' - z_1'\right|$

$$= \left|-i\left(\overline{z_2 - z_1}\right)\right| = \overbrace{\left|-i\right|}^{1} \cdot \overbrace{\left|\overline{z_2 - z_1}\right|}^{|z_2 - z_1|} = \left|z_2 - z_1\right| = M_1M_2$$

Donc g est une isométrie (conserve la distance).

b) $M(z)$ est un point fixe de g si et seulement si $g(M) = M \Leftrightarrow -i\overline{z} + 2i = z$.

Soit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $-i\overline{z} + 2i = z \Leftrightarrow -i(x - iy) + 2i = x + iy$

$\Leftrightarrow x + y + i(x + y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + y = x + y + 2 = 0 \Rightarrow 2 = 0$

ce qui est impossible et donc l'ensemble des points fixes de g est vide.

c) On a : $z_O = 0$; $z_A = 2$;

$-i\overline{z_A} + 2i = -2i + 2i = 0 = z_O$ donc $g(A) = O$ et

$-i\overline{z_O} + 2i = 2i = z_B$ donc $g(O) = B$.

g est une isométrie qui n'a pas de points fixes donc g soit une translation soit une symétrie glissante

Or $g(A) = O$, $g(O) = B$ et $\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{OB}$ alors g n'est pas une translation et donc c'est une symétrie glissante de vecteur $\vec{v}$ et d'axe Δ.

$g \circ g(A) = g(O) = B$ et $g \circ g = t_{2\vec{v}}$ donc

$2\vec{v} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ par suite $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$g(A) = O \Rightarrow I = A * O \in \Delta$ et $g(O) = B \Rightarrow J = O * B \in \Delta$

par suite $\Delta = (IJ)$. $g = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(IJ)}$.

d) On a $OABD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD}$

1ère méthode (géométrique) :

$g \circ g(O) = t_{\overrightarrow{AB}}(O) = D \Leftrightarrow g(g(O)) = g(B) = D$.

2ème méthode (expression complexe) :

$z_D = z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2i - 2$.

$-i\overline{z_B} + 2i = -i(-2i) + 2i = -2 + 2i = z_D$

Et donc $g(B) = D$

3°) a) On a $S = g^{-1} \circ f \Leftrightarrow g \circ S = f$ donc $C = f(C) = g(S(C)) = g(E)$.

L'équation $-i\overline{z} + 2i = 1 + i \Leftrightarrow -i\overline{z} = 1 - i$

$\Leftrightarrow \overline{z} = i(1 - i) = 1 + i \Leftrightarrow z = 1 - i$

$g(E) = C \Leftrightarrow -i\overline{z_E} + 2i = z_C = 1 + i \Leftrightarrow z_E = 1 - i = \overline{z_C}$

b) $S(O) = g^{-1}(f(O)) = g^{-1}(B) = O$

et $S(A) = g^{-1}(f(A)) = g^{-1}(O) = A$. S fixe les deux points O et A et différente de l'identité du plan $(S(C) = E \neq C)$ donc S est une symétrie orthogonale d'axe (OA). $S = S_{(OA)}$.

c) On a :

$g \circ S = f \Leftrightarrow g = g \circ \overbrace{S \circ S}^{Id_p} = f \circ S$ car $S = S_{(OA)}$

d) On a : $g(M) = f(M)$

$\Leftrightarrow f(S(M)) = f(M) \Leftrightarrow S(M) = M \Leftrightarrow M$ est un point fixe de S or l'ensemble des points fixes de S est son axe (OA) alors l'ensemble des points M tels que $g(M) = f(M)$ est la droite (OA).

e) On a : $K \in (OA) \cap (BE)$

donc $g(K) \in g((OA)) \cap g((BE))$

$= (g(O)g(A)) \cap (g(B)g(E)) = (BO) \cap (DC) = \{L\}$

donc $g(K) = L$ or $K \in (OA)$ alors

$f(K) = g(K) = L$ et donc $\begin{cases} CK = CL \\ (\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CL}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

d'où CKL est un triangle rectangle et isocèle en C .

4°) On a : $\varphi = f \circ g = f \circ \overbrace{f \circ S}^{g} = S_C \circ S$ car $f \circ f = S_C$

Comme (IC) et (JC) sont perpendiculaires en C alors $S_C = S_{(IC)} \circ S_{(JC)}$ par suite

$\varphi = S_{(IC)} \circ \overbrace{S_{(JC)} \circ S_{(OA)}}^{t_{\overrightarrow{OB}}} = S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{OB}}$

car $\begin{cases} \overrightarrow{OB} \text{ est un vecteur normal de } (OA) \\ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}((OA)) = t_{\overrightarrow{OJ}}((OI)) = (JC) \end{cases}$

Or $\overrightarrow{OB}$ est un vecteur directeur de (IC) et donc φ est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et d'axe (IC).

14 SUR LE CHEMIN DU BAC

1°) a) $I = O * B$ donc $2IB = OB = 2OA$ d'où $IB = OA \neq 0$ en plus $\overrightarrow{OI} \neq \overrightarrow{AB}$ donc il existe une seule rotation f telle que $f(O) = I$ et $f(A) = B$

b) f est d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ω est l'intersection de $Med[OI]$ et $Med[AB]$

2°) a) $R = r_{(O,\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow R^{-1} = r_{(O,-\frac{\pi}{2})}$

$g(O) = f \circ R^{-1}(O) = f(O) = I$. g est la composée de deux déplacements (rotations) donc c'est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ d'où c'est une translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ car $g(O) = I$

b) $g = t_{\overrightarrow{OI}} = f \circ R^{-1} \Leftrightarrow f = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R$

3°) $C = R(I) \Rightarrow (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $OI = OC$.

$D = r_{(I,-\frac{\pi}{2})}(O) \Rightarrow (\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{ID}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ et $OI = ID$

Ainsi $OC = ID$ et $(OC)//(ID)$ (deux droites perpendiculaires à (OI)) d'où $OIDC$ est un parallélogramme comme $\begin{cases} OC = OI \\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

alors OIDC est un carré direct

b) $f \circ f(O) = f(I) = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R(I) = t_{\overrightarrow{OI}}(C) = D$

c) $f \circ f = r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})} = r_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega$

$S_\Omega(O) = f \circ f(O) = D$ *donc* $O = D * \Omega$ *or* $OIDC$ est un carré alors Ω son centre

4°) (AB) *et* $(J\Omega)$ sont perpendiculaires en J donc $S_{(AB)} \circ S_{(J\Omega)} = S_J$

$t = S_{(AB)} \circ S_{(J\Omega)} \circ S_A = S_J \circ S_A$ est la composée de deux déplacement (symétries centrale) donc c'est un déplacement d'angle $\pi + \pi = 2\pi$ d'où c'est une translation

Or $t(A) = S_J \circ S_A(A) = S_J(A) = B$ *alors* $t = t_{\overrightarrow{AB}}$

5°) a) $\varphi = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OA)} = S_{(IJ)} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} = S_{(IJ)}$

en effet $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ *et* $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}((OA)) = (IJ)$

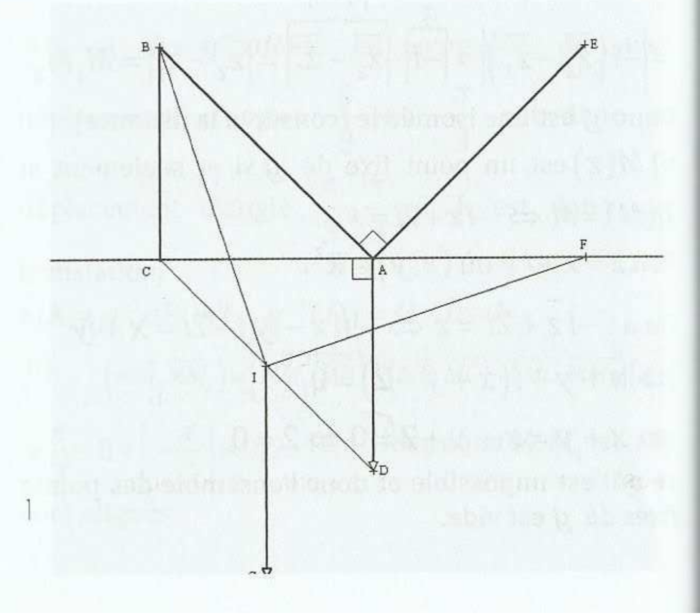
b) $\varphi = S_{(IJ)} = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OA)} \Leftrightarrow S_{(OA)} = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(IJ)}$

d'où $h = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(OA)} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BO}} \circ S_{\overrightarrow{IJ}} = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(IJ)}$

Or $\overrightarrow{AO}$ *et* (IJ) sont de même direction donc h est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et d'axe (IJ)



1. a) AC = DA ≠ 0 ⇒ il existe un déplacement unique f tel que f(A) = D et f(C) = A.



$\Rightarrow \alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}})[2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})[2\pi]$

$\equiv \pi + \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\alpha \neq 2k\pi \Rightarrow$ f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Le centre de f est un point commun des médiatrices respectives des segments [AD] et [CA]

$\Rightarrow$ I est le centre de f.

$\Rightarrow f = r_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

2. a) g = f o r.

g est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow$ g est une translation.

<u>Remarque</u> : f o r (A) = f(A) = D

$\Rightarrow$ g est une translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

b) F = g(E).

f(B) = f o r (E) = g(E) = F

$r_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)}(B) = F$

$\Rightarrow \begin{cases} IB = IF \\ (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IF}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow BIF$ est un triangle rectangle et isocèle.

c) $\begin{cases} f(C) = A \\ f(B) = F \end{cases} \Rightarrow (CB) \perp (AF)$

Or (CB) ⊥ (CA) ⇒ (CA) // (AF) ⇒ C, A et F sont alignés.

3. $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IG} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DG} \Rightarrow AI = DG$

Or IA = IC = ID ⇒ CI = DG ≠ 0 ⇒ il existe un antidéplacement unique φ tel que φ(C) = D et φ(I) = G.

b) φ est un antidéplacement donc φ est soit une symétrie axiale soit une glissante.

Puisque [CD] et [IG] n'ont pas la même médiatrice donc φ n'est pas une symétrie axiale

φ est donc une symétrie glissante

$\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

ou $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

φ(C) = D ⇒ I le milieu de [CD] est un point de Δ

φ(I) = G ⇒ $\vec{u} = \overrightarrow{IG}$

Δ est donc la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IG}$

16 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. a) AB = AD et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ⇒ ABD est équilatéral ⇒ AB = BD ≠ 0

⇒ il existe un antidéplacement unique f tel que f(A) = B et f(B) = D.

b) f est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante

* f o f(A) = D ≠ A ⇒ f o f n'est pas l'identité ⇒ f n'est pas une symétrie axiale ⇒ f est une symétrie glissante.

* Soit f = $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$, avec $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ.

f o f(A) = D ⇒

$t_{2\vec{u}}(A) = D \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IO}$

f(A) = B ⇒ A ∗ B = I ∈ Δ

f(B) = D ⇒ B ∗ D = O ∈ Δ ⇒ Δ = (IO)

c) f(ABD) est un triangle équilatéral indirect car f est une isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Puisque f(A) = B et f(B) = D ⇒ f(ABD) = BDC.

2. Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que S(A) = C.

a) S({A, B, D}) = {B, C, D} et S(A) = C

⇒ S({B, D}) = {B, D} ⇒ S([BD]) = [BD].

b) S([BD]) = [BD]

Deux cas se posent :

- S(B) = B et S(D) = D ⇒ S est un antidéplacement qui a des points invariants ⇒ S = $S_{(BD)}$
- S(B) = D et S(D) = B

O = B ∗ D ⇒ S(O) = D ∗ B = O ⇒ S est une symétrie axiale d'axe la médiatrice de [BD] qui est (AC)

⇒ S(A) = A impossible car S(A) = C.

Ainsi le seul cas qui se pose est S = $S_{(BD)}$

3. Soit g un antidéplacement qui transforme {A, B, D} en {B, C, D} et tel que g(A) = D.

a) g({A, B, D}) = {B, C, D} et g(A) = D

⇒ g({B, D}) = {B, C}

Si g(D) = C ⇒ g(B) = B ⇒ g est une symétrie axiale

⇒ g o g est l'identité

Or g o g (A) = C ≠ A absurde.

⇒ g(D) ≠ C ⇒ g(D) = B.

b) g est un antidéplacement tel que : g(A) = D, g(D) = B et g(B) = C.

g ne peut pas être une symétrie axiale car

g o g (A) = B ≠ A

$\Rightarrow$ g est une symétrie glissante de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JO}$ et d'axe la droite (JO) (milieux de [AD] et [DB]).

- Le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$
- Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct
- Le milieu Q de [OB].



17 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. a) OAB soit équilatéral direct

$$r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}(A) = B \Leftrightarrow z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(5 - i\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 5i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

Q = O * B $\Leftrightarrow$ q = $\frac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}$.

b) ABQK est un parallélogramme $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{KQ}}$$

$$\Leftrightarrow b - a = q - k$$

$$\Leftrightarrow k = q - b + a$$

$$= 2 + i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3} + 5 - i\sqrt{3} + = 3 - 2i\sqrt{3}$$

c)

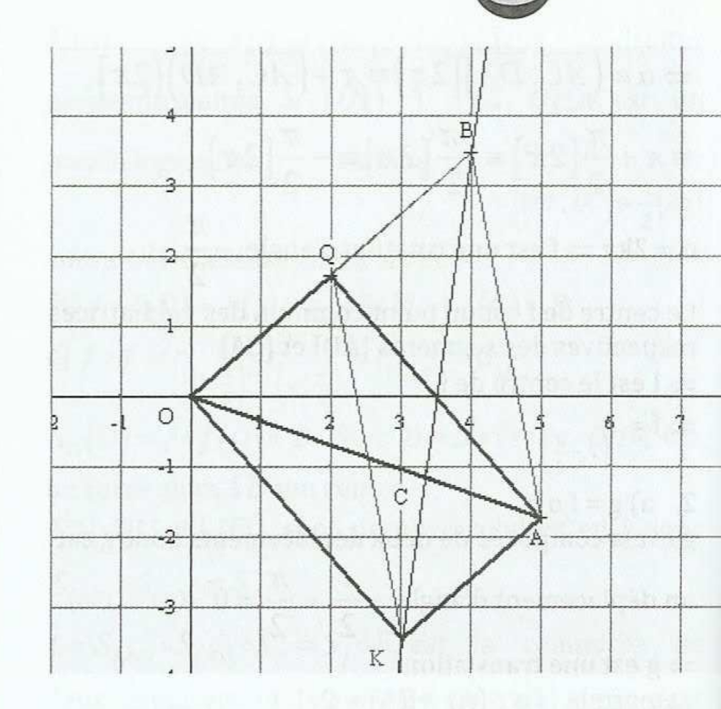
$$\frac{z_K - a}{z_K} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(-2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + 2i\sqrt{3}\right)}{21} = \frac{-7i\sqrt{3}}{21} = -i\frac{\sqrt{3}}{3} \in iIR$$

$\frac{z_{\overrightarrow{AK}}}{z_{\overrightarrow{OK}}} \in iIR \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{OK} \Leftrightarrow$ OKA est un triangle rectangle en K.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{KA} \Rightarrow$ OQAK est un parallélogramme, de plus on a : (KO) $\perp$ (KA)
$\Rightarrow$ OQKA est un rectangle.

d)



2. $c = \frac{2a}{3}$.

a) $$\frac{z_K - b}{z_K - c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{2}{3}\left(5 - i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{\frac{1}{3} - 4i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 + 4i\sqrt{3}}{\frac{1 + 4i\sqrt{3}}{3}} = 3 \in IR$$

$\Rightarrow$ B, C et K sont alignés.

b) Voir figure.



18 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

1. f: M(z) $\rightarrow$ M'(z') tel que : $z' - 1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(z - 1)$

$$\Leftrightarrow z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 1)$$

D'où f est la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

2. $M_0(2)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$; $M_n(z_n)$ et

$Z_n = aff(\overrightarrow{AM_n}) = z_n - 1$.

a) $Z_1 = z_1 - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_0 - 1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout n de IN,

$Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

- Pour n = 0, $Z_0 = z_0 - 1 = 1 = e^{i0\frac{\pi}{4}}$
- Pour n ≥ 0, supposons que $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et

montrons que $Z_{n+1} = e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$

En effet :

$Z_{n+1} = z_{n+1} - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_n - 1) = e^{i\frac{\pi}{4}} \times Z_n = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{n\pi}{4}} = e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$

Ainsi : ∀ n ∈ IN, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c) A, M_0 et M_n sont alignés ⇔ $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_0}$

sont colinéaires ⇔ $\frac{Z_n}{Z_0} = Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ est réel

⇔ $n\frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in IN$ ⇔ n = 4k, k ∈ IN ⇔ n est un multiple de 4.

19 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) a) $r_C(I) = J$ car $\begin{cases} CI = CJ \\ (\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

b) $r_B \circ t(I) = r_B(A) = J$ (BA = BJ et

$(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$)

c) $r_B \circ t$ est la composée de deux déplacements d'angles respectifs $\frac{\pi}{6}$ et 0 ⇒ $r_B \circ t$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$

⇒ $r_B \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

Posons Ω le centre de cette rotation

$r_B \circ t(I) = J \Rightarrow \begin{cases} \Omega I = \Omega J \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \Omega = C$

Ainsi $r_B \circ t = r_C$

2) K = t(C) ⇔ $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK}$

$r_B \circ t = r_C \Rightarrow r_B \circ t\ (C) = r_C\ (C) \Rightarrow r_B(K) = C$

$\Rightarrow \begin{cases} BK = BC \\ (\widehat{\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} BK = BC \\ (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

3) a) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK}$ ⇒ IAKC est un parallélogramme

4) ⇒ A ∗ C = I ∗ K ⇒ O = I ∗ K

⇒ $S_O(A) = C$ et $S_O(I) = K$

$\begin{cases} DI = DA \\ (\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

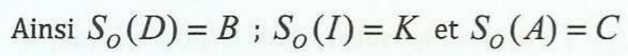
Si $S_O(D) = D'$

$\Rightarrow \begin{cases} D'K = D'C \\ (\widehat{\overrightarrow{D'K}, \overrightarrow{D'C}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

car S_O conserve les distances et les mesures des angles orientés

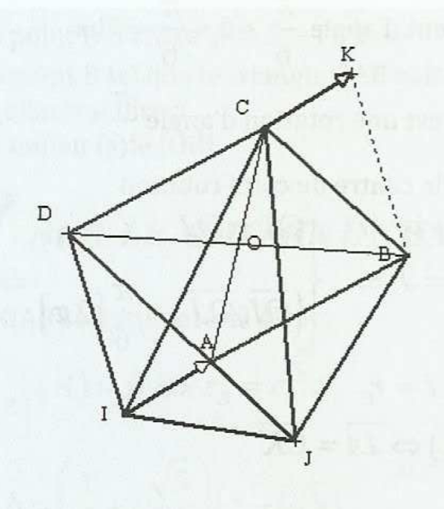
Or $\begin{cases} BK = BC \\ (\widehat{\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow D' = B$

⇒ $S_O(D) = B$


Ainsi $S_O(D) = B$; $S_O(I) = K$ et $S_O(A) = C$

b) $S_O(A) = C$ et $S_O(D) = B$

$\Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

$a \in \mathbb{R}_+^*$

1) (E) : $z^2 - (1 + i)a \times z + ia^2 = 0$

$\Delta = [-(1 + i)a]^2 - 4 \times 1 \times ia^2 = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = [(1 - i)a]^2$

$\Rightarrow \delta = (1 - i)a$ est une racine carré de Δ

$\Rightarrow z' = \dfrac{(1+i)a - (1-i)a}{2} = ia$ et $z'' = \dfrac{(1+i)a + (1-i)a}{2} = a$

2) A(a) et B(ia)

a) OA = $|a| = a$ et OB = $|ia| = |a| = a \Rightarrow$ OA = OB

AB = $|ia - a| = |a| \times |i - 1| = a\sqrt{2}$

$AB^2 = 2a^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow$ OAB est rectangle en O

Ainsi le triangle OAB est rectangle et isocèle en O

On peut aussi dire que B est l'image de A par la transformation complexe ($F : z \mapsto iz$) qui est celle de la rotation de centre O et d'angle dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$

b) OACB est un carré $\Rightarrow$ OACB est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow z_C = z_A + z_B = a + ia = (1 + i)a$

3) a) OAP est équilatéral direct

$\Leftrightarrow P = r_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)}(A)$

$\Leftrightarrow z_P = e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_A = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

b) AQC est équilatéral direct

$\Leftrightarrow Q = r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}(C)$

$\Leftrightarrow z_Q - z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$

$\Leftrightarrow z_Q = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times z_C + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \times z_A$

$\Leftrightarrow z_Q = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1 + i)a + \left(1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times a$

$\Leftrightarrow z_Q = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1 + i)a + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times a$

$\Leftrightarrow z_Q = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times a$

$= \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) \times a$

c) B(0, a) ; P $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ et Q $\left(a\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \dfrac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} \\ a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BQ}\begin{pmatrix} a\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -\dfrac{a}{2} \end{pmatrix}$

$dét\left(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BQ}\right) = -\dfrac{a^2}{4} - a^2\left(\dfrac{3}{4} - 1\right) = 0 \Rightarrow$ B, P et Q sont alignés

Similitudes planes

I) Résumé du cours

1) TRANSFORMATION DU PLAN

Définition

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une translation si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout point N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que f(M)=N.

Exemple :

Une translation, une homothétie, une rotation, une réflexion sont des transformations du plan. L'application identique ou l'identité, notée id (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe M lui-même) est une transformation du plan.

Propriété :

Soit f une transformation du plan. L'application du plan dans lui même qui à tout point N associe l'unique point M tel que f(M)=N est aussi une transformation du plan. Elle est appelée transformation réciproque de f est notée f^{-1}. On a alors f(M)=N $\Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$

Soit f et f' des transformations du plan, la composée $f' \circ f$ est une transformation du plan.

(il en est de même pour la composée $f \circ f'$)

Exemple :

Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Une rotation de centre O et d'angle α est une transformation et sa réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.

Une homothétie de centre O et de rapport k est une transformation et sa réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

2) GENERALITES

A) DEFINITIONS – PROPRIETES

Définition

On appelle similitude du plan toute transformation f du plan conservant les rapports de distance. C'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle :

Pour tous points M, N, P, Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P', Q',

On a : $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$.

Propriété

Soit f une transformation du plan.

f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a $M'N' = k\,MN$. On dit que k est le rapport de la similitude f.

Définition

Une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une transformation qui conserve les distances, est appelée isométrie.

Exemple :

Les translations, les rotations, les symétries, et leurs composées sont des isométries

L'identité est une isométrie.

Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$, ce n'est pas en général une isométrie.

B) RECIPROQUE – COMPOSEE

Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k', alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk'.

C) Dans le plan complexe

- Une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z}$ +b avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = |a|$.
- Une similitude conserves les angles géométriques
- Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.
- Soit A, B et C trois points non alignés. Si f est une similitude telle que f(A)=A, f(B)=B, f(C)=C , alors f est l'application identique.
- Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'application identique.
- Soit A et B deux points distincts, si f est une similitude telle que f(A) =A et f(B) = B, alors f est l'application identique ou f est la symétrie axiale d'axe(AB).

3)SIMILITUDES DIRECTES

A) DEFINITION ET ECRITURE COMPLEXE

Définition

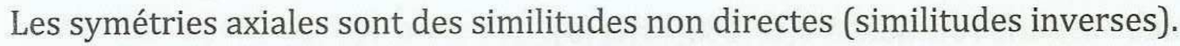
On appelle similitude directe toute similitude conservant les angles orientés.

La propriété suivante découle de ce qu'on a vu précédemment.

Une application du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$, le rapport de la similitude est alors k=$|a|$.

Exemples :

L'identité, les translations, les rotations, les homothéties sont des similitudes directes.



Les symétries axiales sont des similitudes non directes (similitudes inverses).

B) ANGLE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Soit f une similitude directe. Il existe un réel θ tel que, pour tous points distincts M et N du plan, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta[2\pi]$.

Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ Avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$, alors $\theta = arg(a)[2\pi]$.

On dit que θ est l'angle de la similitude directe.

- Les translations et les homothéties de rapports positifs ont pour angle $\theta = 0\pi[2\pi]$.
- Les homothéties de rapports négatifs ont pour angle $\theta = \pi[2\pi]$.
- Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta[2\pi]$.
- Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors f^{-1} est une similitude directe de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$ et d'angle −θ.

- Si f et f' sont deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ', alors la composée f '∘ f est une similitude directe de rapport kk' et d'angle θ+θ'. (il en est de même pour la composée f∘f').

Remarque : la conservation des angles orientés par une similitude directe et la transformation d'un angle orienté en son opposé par une similitude indirecte font que :

- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

C) CENTRE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Une similitude directe qui n'est pas une translation a un point invariant unique. Ce point est appelé centre de la similitude.

Remarque : Une similitude directe ayant au moins deux points invariants est nécessairement l'application identique.

D) FORME REDUITE

Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation, l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f.

f est la composée de l'homothétie h (Ω ;k) de centre Ω et de rapport k et de la rotation r(Ω ;θ) de centre Ω et d'angle θ.

Ces deux applications commutent, on peut écrire :

f=h (Ω ; k) 0 r (Ω ; θ)= r (Ω ; θ) 0 h (Ω ; k)

Cette décomposition est appelée forme réduite de la similitude directe f.

Définition

Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω, de son rapport k et de son angle θ.

On note : f=s(Ω ;k ;θ) (k est un réel strictement positif et θ réel).

Cas particuliers :

Si k= 1 , la similitude f est une rotation. f=s(Ω ;1 ;θ)=r(Ω ;θ).

Si θ=0 $[2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport k. f=s(Ω ;k ;0)=h(Ω ;k)

Si θ= π $[2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport k.

f= s(Ω ;k ; π)=h(Ω ;-k).

E) DONNEE D'UNE SIMILITUDE PAR DEUX POINTS ET LEURS IMAGES

Soit A, B, A', B' quatre points du plan tels que A≠B et A'≠B'.

Il existe une unique similitude directe f transformant A en A' et B en B'.

Remarque :

Lorsqu'un triangle A'B'C' est l'image par une similitude directe d'un triangle ABC, on dit que ABC et A'B'C' sont directement semblables.

F) DECOMPOSITION D'UNE SIMILITUDE INDIRECTE

Soit f une similitude indirecte, on peut écrire f sous la forme $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.

On peut écrire f aussi sous la forme : $f = s' \circ g'$, où s' est une symétrie axiale et g' une similitude directe.

Propriétés géométriques des similitudes planes

Soit f une similitude plane. *A,B,C,D* sont quatre points et on note A'=f(A), B'=f(B), C'=f(C), D'=f(D).

- f conserve les rapports de distances, c'est-à-dire que si A≠B et C≠D, on a $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
- f conserve les angles géométriques.
- Si A, B, et C sont deux distincts, on a $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- f conserve l'alignement, si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' sont alignés.
- f transforme une droite en une droite,
- si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et la droite (A'B') est l'image par f de la droite (AB).
- f transforme un segment en un segment,
- si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et le segment $[A'B']$ est l'image par f du segment $[AB]$
- f conserve le parallélisme et l'orthogonalité,
- si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles, alors (A'B') et (C'D') sont deux droites parallèles.
- si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles, alors (A'B') et (C'D') sont deux droites parallèles.
- si (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaire, alors (A'B') et (C'D') sont deux droites perpendiculaires.
- f conserve le barycentre,
- si G est le barycentre de $(M_1 : a_1)$; $(M_2 : a_2)$; .... ; $(M_n : a_n)$

- ($a_1+a_2+...+a_n \neq 0$) , alors son image G' est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients :(M'_1 :a_1) ; (M'_2 :a_2) ; .... ; (M'_n :a_n)
- f conserve le milieu, si C est le milieu de $[AB]$ alors C' est le milieu de $[A'B']$.
- f transforme un triangle en un triangle semblable,
- si A,B et C sont deux à deux distincts, alors A', B' et C' sont deux distincts et les triangles A'B'C' et ABC sont semblables.
- si f est similitude directe, on dira que triangles sont directement semblables, si f est une similitude inverse, on dira que les triangles sont inversement semblables)
- f transforme un cercle en un cercle, l'image par f du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr (où k est le rapport de la similitude f)

Similitudes indirectes :

On appelle similitude indirecte la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement

Forme réduite :

Théorème 1 :

Soit Δ une droite et A un point de Δ, k ∈ IR*, Si h est l'homothétie de centre A et de rapport k alors $S_\Delta \circ h = h \circ S_\Delta$

Théorème 2 :

Toute similitude indirecte du rapport k et de centre A se décompose d'une manière unique en composée commutatif d'une homothétie de centre A et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ passant par A.

Théorème 3 :

L'axe (Δ) de la similitude indirect du centre A et de rapport $k \neq 1$ est l'ensemble des points M d'image M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$

Expression complexe d'une similitude indirecte :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

f : P → P, M(z) ↦ M'(z') est une similitude indirecte si et seulement si il existe deux nombres complexes $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que $z' = a\bar{z} + b$ dans ce cas le rapport k = $|a|$ Si k = $|a| \neq 1$ alors le centre Ω a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$

Savoirs faire :

Savoir ...	Comment faire ?
... démontrer qu'une transformation f est une similitude	. Démontrer que f multiplie toutes les distances par un même nombre k . . Ecrire f sous la forme d'une composée de translations, rotations, homothéties, symétries axiales. . Etablir que l'écriture complexe de f dans un repère orthonormé direct du plan est de la forme : z' = az + b ou bien z' = a $\bar{z}$+ b avec a dans C – {0] et b dans C.

... déterminer le rapport k d'une similitude f : M $\mapsto$ M'	. Si A et B sont deux points distincts alors k = $\frac{A'B'}{AB}$. . Si f a pour écriture complexe z' = az + b ou z' = a $\bar{z}$ + b dans un repère orthonormal direct, alors k = $\lvert a \rvert$. . Si f est la composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2, alors k = $k_1 \times k_2$. . Si f est la réciproque d'une similitude de rapport k', alors k = $\frac{1}{k'}$.
... démontrer qu'une transformation f est une symétrie axiale	On peut établir que f est une similitude distincte de l'identité qui admet au moins deux points fixes. La droite passant par ces deux points fixes est l'axe de la symétrie.
... démontrer qu'une transformation f est une similitude directe	. Démontrer que f est une similitude qui conserve les angles orientés. . Ecrire f comme la composée de similitudes directes (en particulier : translations, rotations, homothéties) . Ecrire f sous la forme d'une composée de deux similitudes directes. . Etablir que l'écriture complexe de f est z' = az + b avec a dans C – {0} et b dans C.
... déterminer l'angle θ d'une similitude directe f : M $\mapsto$ M'	. Si A et B sont 2 points distincts alors θ = (; $\overrightarrow{A'B'}$) . Si f a pour écriture complexe z' = az + b, alors θ = arg(a) modulo 2π. . Si f est la composée de 2 similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 alors $\theta = \theta_1 + \theta_2$ modulo 2π. . Si f est la réciproque d'une similitude d'angle θ' alors θ = –θ' modulo 2π.
... construire l'image M' d'un point M par une similitude directe f	. Si A' et B' sont les images de 2 points distincts A et B, alors tout triangle ABM a pour image le triangle A'B'M' directement semblable au triangle ABM. . Si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, alors M'est le point tel que : ΩM' = k ΩM et ($\overrightarrow{\Omega M}$; $\overrightarrow{\Omega M'}$) = θ modulo 2π.
... définir une similitude directe	. Soit avec le centre, le rapport et l'angle si f n'est pas une translation. . Soit avec 2 points A et B et leurs images A' et B'. . Soit avec un point A et son image A', le rapport de f et l'angle de f.

Qelques idées à retenir :

1) Transformations qui conservent les rapports distances et les angles orientés $\frac{CD}{AB}=\frac{C'D'}{A'B'}$

et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$

2) Une similitude possède un rapport k>0, et une similitude multiplie les distances par k :

A'B'=kAB ; $k=\frac{A'B'}{AB}$

3) Une similitude directe possède un angle θ (une similitude indirecte n'en possède pas), une similitude directe fait tourner les vecteurs de θ, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)=\theta$

4) Une similitude directe peut possèder un point Ω : unique point invariant (sinon c'est l'identité ou une translation)

$\Omega M'=k\Omega M\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta.$

5) Une similitude directe admet une forme réduite : homothetie $(\Omega;k)$ o rotation $(\Omega:\theta)$ ou translation ou identité.

6) Formule complexe $z'=az+b$ avec $a\neq 0$; $k=|a|$, $\theta=arg(a)$, $\omega=\frac{b}{1-a}$.

Autre forme équivalente lorsqu'il existe un centre : $z'-\omega=ke^{i\theta}(z-\omega)$, ce qui revient à dire : $a=ke^{i\theta}$ et $b=\omega(1-ke^{i\theta})$

7) Savoir reconnaitre les cas particuliers de similitude directe (homothétie, rotation, translation) d'après les valeurs de k et θ.

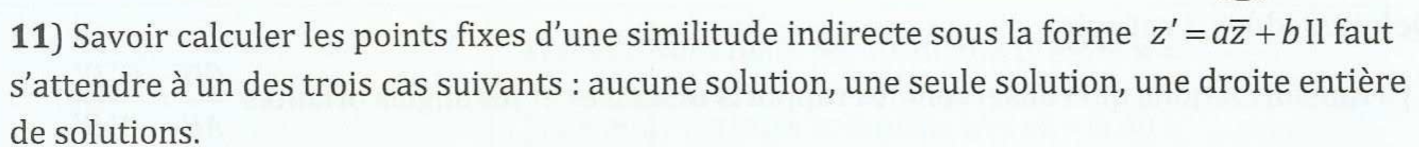
Attention au sens du mot « rapport » quand on l'applique à une homothétie. Si $\overrightarrow{\Omega M'}=-2\overrightarrow{\Omega M}$, le rapport d'homothétie est -2 alors que le rapport de similitude est 2.

8) Composée de deux similitudes directes : les rapports se multiplient, les angles s'ajoutent.

Cas particulier : si S a pour $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, alors S o S est une homothétie (et peut être dans certains cas une symétrie centrale).

9) Connaître les principales façons de déterminer une similitude directe :
- par son centre, son rapport et son rapport et son angle (forme réduite)
- par deux points distincts A,B et leurs transformés distincts A',B'. Connaître ce théorème et sa démonstration. Quand on l'utilise, ne pas oublier de dire : « car A≠B et A'≠B' ». Le rapport est $\frac{A'B'}{AB}$ et l'angle est $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$. Mais le théorème ne dit pas comment trouver le centre.

10) Connaitre la classification des similitudes d'après le nombre de leurs points fixes (avec la démonstration dans le cas « au moins deux points fixes »). Cette classification permet parfois de répondre aux questions du type : « déterminer la nature de la similitude »



11) Savoir calculer les points fixes d'une similitude indirecte sous la forme $z' = a\overline{z} + b$ Il faut s'attendre à un des trois cas suivants : aucune solution, une seule solution, une droite entière de solutions.

Exemple : résoudre $z = (1+2i)\overline{z} + 2$. Une seule solution $z = -1-i$.

Exemple ; résoudre $z = -i\overline{z} + 2 + 2i$. Une droite de solutions : $y = -x + 2$.

Exemple : résoudre $z = \overline{z} + 1$. Aucune solution.

12) savoir calculer sos si s est une similitude indirecte : on obtient une similitude directe, et plus précisément une homothétie ou une translation ou l'identité, Essayer avec les exemples précédents.

13) Attention : une similitude indirecte n'a pas d'angle.

14) Savoir trouver la formule complexe d'une symétrie dont l'axe est (AB). On peut écrire qu'on connait deux points invariants (A et B) ou bien on peut exprimer l'égalité des longueurs et les propriétés des angles : $AM' = AM$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$

Soit A(1+i) et B(2i). La symétrie d'axe (AB) a pour formule $z' = -i\overline{z} + 2 + 2i$.

15) Connaître les images des figures usuelles par une similitude (2 page 106) et les propriétés de conservation (1 page 106, 2 page 110)

16. Réflexe : chaque fois qu'une figure comporte un triangle d'une forme connue (angles et rapports des côtés) alors on peut la traduire par une similitude directe.

Exemples : triangle rectangle isocèle, triangle «équilatéral , demi-triangle équilatéral.

Attention au sens des angles orientés. Si ABC est rectangle isocèle en A, direct, alors $c - a = i(b-a)$.

II) Exercices



1 QCM ; FAUX OU VRAI

A) Choisir la bonne réponse

Nº	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$z' = \overline{i}.z + 1$ est l'écriture complexe d'une:	translation	rotation	Similitude indirecte
2	L'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe1+ i est:	$z' = (1+i)z + 1$	$z' = z + 1 + i$	$z' = \overline{i}.z + 1 + i$
3	La similitude d'écriture complexe $z' = (1+i)z + i$, est celle de:	une similitude directe de centre Ω(i)	une similitude directe de centre Ω(-1)	La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω(-1)

4	L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω(1+i) de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est:	$z'=3i.\overline{z}+1+i$	$z'=3i.z+1+i$	$z'=3iz-2i+4$
5	La réflexion d'axe (AB) avec $z_A=1+i$ et $z_B=1$, a pour écriture complexe:	$z'=(1+i).\overline{z}-1$	$z'=-\overline{z}+2$	$z'=(1+i).\overline{z}-i$
6	La forme réduite de la similitude de la 4ème question est:	$h_{(\Omega,-3)}\circ r_{(\Omega,-\frac{\pi}{2})}$	$h_{(\Omega,3)}\circ r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}$	$h_{(\Omega,-3)}\circ r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}$
7	OAB est un triangle isocèle rectangle direct en A, où O est l'origine du repère. La similitude directe de centre O qui transforme A en B a pour rapport k et angle α	k = 1 et α = π/2	$k=1/\sqrt{2}$ et α = -π/4	$k=\sqrt{2}$ et α = π/4
8	L'écriture complexe de la composée de l'homothétie de centre O et de rapport -2 suivie de la translation de vecteur d'affixe 3i est:	$z'=-2z+3i$	$z'=-2z-6i$	$z'=-2z+6i$

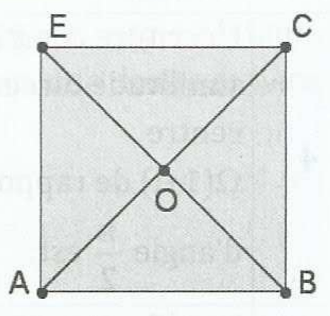
B) Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée

Le plan complexe est menu d'un repère orthonormé $(\vec{O},\vec{i},\vec{j})$

1) La transformation complexe de f est $z'=-2e^{\frac{\pi}{4}}z+1+i$ alors f est une similitude directe d'angle :

a) $-\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

2) La transformation complexe de f $z'=a\overline{z}+b$ avec $a\neq 0$ et $|a|\neq 1$ alors f est une similitude indirecte de centre d'affixe



a) $\dfrac{b\overline{a}+b}{1-|a|^2}$ b) $\dfrac{b}{1-a}$ c) $\dfrac{a\overline{b}+b}{1-|a|}$ d) $\dfrac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$

3) la transformation complexe de f est m $\overline{z}=i\overline{z}+1$ alors f est une :

a)Rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ b) symétrie glissante

c) symétrie orthogonale d) translation



2 APPLIQUER

ABCD est un carré direct de centre O.
Déterminer l'angle et le rapport des similitudes directes s :
de centre A telle que s(O) = D



3 APPLIQUER

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1}{2}z + 3 - i$

4 APPLIQUER

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

D est le symétrique de A par rapport à B.

1) a) Justifier qu'il existe une unique similitude directe s telle que s(D) = B et s(B) = C.
   b) donner le rapport et l'angle de s

2) On se place dans le repère orthogonal direct $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$.
   a) Donner les affixes des points B, C et D
   b) Déterminer alors l'écriture complexe de s

5 APPLIQUER

Dans le plan complexe, s est la similitude indirecte d'écriture complexe :

$z' = -5i\ \overline{z} + 1 + i.$

1) a) Déterminer l'affixe de l'image A' par s du point A d'affixe 3 + i.
   b) Déterminer l'affixe de l'image B' par s du point B d'affixe – i.

2) En déduire le rapport de cette similitude.



6 S'ENTRAINER

On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives 3i et 6.

Partie A

1) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g qui transforme A en O et O, en B.

2) Déterminer l'écriture complexe de f.

3) Préciser les éléments caractéristiques de f.

Partie B

1) a) Montrer que l'écriture complexe de g est $z' = -2i\overline{z} + 6$

b) Déterminer l'affixe du centre Ω' de g.

2) a) Déterminer l'affixe du point A' image du A par l'homothétie de centre Ω' et de rapport 2.

b) Préciser les éléments caractéristiques de g.



S'ENTRAINER

On se propose de caractériser la similitude indirecte f d'écriture complexe

$z' = i\sqrt{2}\overline{z} + +2i\sqrt{2} - 2$

Partie A

Soit g la similitude directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}\overline{z} + +2i\sqrt{2} - 2$.

1) Préciser le rapport, l'angle et l'affixe du centre Ω de g.

2) Déterminer une symétrie orthogonale s tel f=g o s.

Partie B

1) Déterminer centre de f.

2) Soit (Δ) la droite d'équation y=x+2.

Montrer que pour tout point M de (Δ), le point M'=f(M) appartient à (Δ).

3) On pose h= f o S_Δ où S_Δ désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

a) Montrer que l'écriture complexe de S_Δ est $z' = i\overline{z} - 2 + 2i$.

b) En déduire que l'écriture complexe de h est $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c) Donner la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques.

4) Déduire de ce qui précède le rapport et l'axe de f.



S'ENTRAINER

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(\overline{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1cm.

Partie A

1) Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

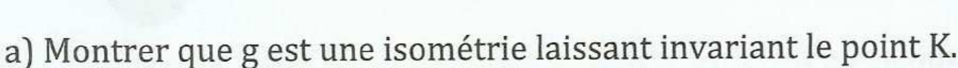
2) Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1) Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2i\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Montrer que f possède un point invariant et un seul . On note K ce point.

2) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose g=f o h .


a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) identifier g



9 SE PERFECTIONNER

Le triangle ABC étant rectangle en A, on désigne par (C) le cercle de diamètre [AB] et par (C') le cercle de diamètre [AC].

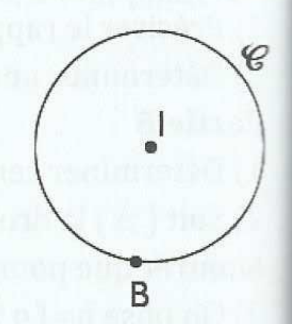
a) Montrer que le second point d'intersection H de (C) et (C'), autre que A, est le pied sur [BC] de la hauteur issue de A.

b) Préciser l'image du cercle (C) par la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

c) Une droite d passant par H recoupe (C) en P ($P \neq H$) et (C') en Q ($Q \neq H$).
Que dire sur le triangle APQ ?



10 SE PERFECTIONNER



Soit A un point donné du plan orienté ; soit (C) un cercle donné.
(son centre sera nommé I)
B est un point variable qui décrit le cercle (C).
On construit le point D tel que le triangle ABD est rectangle en A et $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Déterminer et construire le lieu des points D, lorsque B décrit le cercle (C).



11 SE PERFECTIONNER

Soit ABC un triangle quelconque, d une droite contenant le point B et Δ une droite du plan.
Construire un triangle AEF directement semblable au triangle ABC tel que E appartient à d et F appartient à Δ.



12 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère dans la plan P orienté, un triangle A A_1 A_2 tel que $AA_2=2AA_1$ et qu'une mesure de $(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AA_2})$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles (ς_1) et (ς_2) passant par A et de centre respectifs A_1 et A_2 se recoupent en B.

1) On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant (ς_1) en (ς_2) Soit M un point de (ς_1) et M' son image par S_A

a) Justifier la relation : $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{A_1M}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A_2A}.\overrightarrow{A_2M}}\right)2\pi$

b) Démontrer que les points M,B et M' sont alignés.

2) a) On désigne par σ_A a pour axe la médiatrice du segment $[A_1K]$ où K est le milieu du segment $[AA_2]$.

b) Soit l'application $f=\sigma_A \circ S_A^{-1}$. Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement. En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M du plan sont symétriques par rapport à la droite (AA_2)



13 SUR LE CHEMIN DU BAC

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$

Partie A

1) Résoudre dans Z x Z l'équation (E) : $3y=5(15-x)$.

2) Soit I le point d'affixe 1.

On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique ζ de centre O.

Sa position initiale est I.

On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle ζ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle ζ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1=r_1\circ h_1$ et $s_2=r_2\circ h_2$.

1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.

2) On pose :

$S_m=s_1\circ s_1 ... \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul).

$S'_n=s_2\circ s_2 ... \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul),et $f=S'_n\circ S_m$.

Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n}\times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3}+n\frac{6\pi}{5}$



SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AD]$

1) Soit S la similitude directe telle que $S(D)=O$ et $S(C)=I$

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S

b) Soit Ω le centre de S. Trouver une construction géométrique de Ω

c) Préciser les images respectives des droites (BD) et (BC) par S

d) Déterminer alors $S(B)$ et $S(A)$

e)Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(J,4)$

2) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D)=O$ et $\sigma(C)=I$

a)Vérifier que $\sigma = S_{(OI)} \circ S$ puis déterminer $\sigma(B)$

b) Donner alors la forme réduite de σ

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $h = R \circ S$

a) Préciser h(B) puis caractériser h

b) On note Ω' le milieu de $[\Omega B]$. Montrer que le triangle $O\Omega\Omega'$ est rectangle



SUR LE CHEMIN DU BAC (Session de contrôle 2012)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB],[CD] et [AD]

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J

1) montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S

b) en déduire S(C)

3) a) déterminer l'image du carré ABCD par S

b) en déduire que S(D)= K

a) soit Ω le centre de S. monter que Ω est le barycentre des points pondérés (C,1) et (K,4)

b) soit E le milieu du segment [OD]. Monter que S_0 S (A)=E

c) construire Ω

4) montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes




1 QCM ; FAUX OU VRAI

A)

№	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$z' = i.\bar{z} + 1$ est l'écriture complexe d'une:			Similitude indirecte
2	L'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe1+ i est:		$z' = z + 1 + i$	
3	La similitude d'écriture complexe $z' = (1+i)z + i$, est celle de:		une similitude directe de centre Ω(-1)	
4	L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω(1+i) de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est:			$z' = 3iz - 2i + 4$
5	La réflexion d'axe (AB) avec $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1$ a pour écriture complexe:		$z' = -\bar{z} + 2$	
6	La forme réduite de la similitude de la 4ème question est:		$h_{(\Omega,3)} \circ r_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}$	
7	OAB est un triangle isocèle rectangle direct en A, où O est l'origine du repère. La similitude directe de centre O qui transforme A en B a pour rapport k et angle α			$k = \sqrt{2}$ et α = π/4
8	L'écriture complexe de la composée de l'homothétie de centre O et de rapport −2 suivie de la translation de vecteur d'affixe 3i est:	$z' = -2z + 3i$		

B)

1) c)

2)

3)

D'après la figure, on a :

$(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$ d'où l'angle de s vaut $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{AD}{AO} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

d'où le rapport vaut $\sqrt{2}$.

de centre C telle que s(B) = D.

D'après la figure, on a :

$(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$ d'où l'angle de s vaut $-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{CD}{CB} = 1$ d'où le rapport vaut 1. (s est une isométrie, c'est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$)



2 APPLIQUER

Comme l'écriture complexe de s est de la forme : z' = a z + b, on en déduit que s est une similitude directe.

Le rapport de s est égale à $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

L'angle de s est égal à : arg $(\frac{1}{2}) = 0$

Il reste à déterminer le centre de s qui est son unique point fixe Ω d'affixe ω.

On doit avoir : $\omega = \frac{1}{2}\omega + 3 - i$ d'où $\frac{1}{2}\omega = 3 - i$ d'où $\omega = 6 - 2i$.

Donc le centre de s est le point Ω d'affixe 6 − 2i.

$z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z - 1$.

Comme l'écriture complexe de s est de la forme : z' = a z + b, on en déduit que s est une similitude directe.

Le rapport de s est égale à $\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$.

L'angle de s est égal à : arg (+ i$\sqrt{3}$).

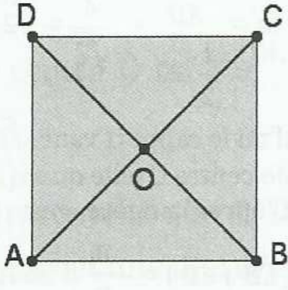
Si on note θ cet argument, alors on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ d'où $\theta = \frac{\pi}{3}$

Il reste à déterminer le centre de s qui est son unique point fixe Ω d'affixe ω.

On doit avoir :

$\omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega - 1$ d'où



$\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\omega = -1$ d'où

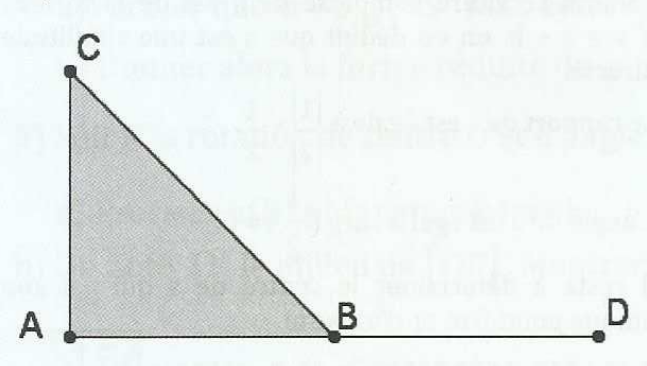
$\omega = \dfrac{-1}{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}} =$

$$\frac{-2(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc le centre de s est le point Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



APPLIQUER



1) a) Comme $D \neq B$ et $B \neq C$, il existe une unique similitude directe s telle que s(D)= B et s(B) =C.

b) Si on note k le rapport de s alors on a :

$k = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{1}{\cos 45°} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Si on note θ l'angle de s alors on a : $\theta = (\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{BC}) =$

$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{4}$

2) a) $z_B = 1$, $z_C = i$ et $z_D = 2$.

b) L'écriture complexe de s est de la forme : $z' = a z + b$.

On sait que s(D) = B et s(B) = C d'où le système :

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ i = a + b \end{cases}$$

Par soustraction des deux égalités, on trouve :

$1 - i = a$.

Par substitution dans la seconde équation on obtient : $i = 1 - i + b$ d'où $b = -1 + 2i$.

Donc l'écriture complexe de s est :

$z' = (1 - i)z - 1 + 2i$.



APPLIQUER

1) a) $z_{A'} = -5i(\overline{3+i}) + 1 + i = -5i(3 - i) + 1 + i$ $= -15i - 5 + 1 + i = -4 - 14i$.

b) $z_{B'} = -5i(\overline{-i}) + 1 + i = -5i(i) + 1 + i = 5 + 1 + i$ $= 6 + i$.

2) Si on note k le rapport de cette similitude alors k

$= \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{|z_{B'} - z_{A'}|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{|10+15i|}{|-3-2i|}$

D'où $k = \dfrac{|5(2+3i)|}{|-3-2i|} = \dfrac{|5|\times|2+3i|}{|-3-2i|}$

$= \dfrac{5\times\sqrt{2^2+3^3}}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}} = 5.$



APPLIQUER

Partie A

1) On a : $A \neq O$, $OB = |z_B| = |6|$ et $OA = |z_A| = |3i| = 3$ donc $OB = 2AO$.

Ainsi, il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g qui transforme A en O et O en B.

2) l'écriture complexe de f est du type $z' = az + b$ avec a et b deux nombres complexes.

$f(O) = B \Leftrightarrow a\times 0 + b = z_B \Leftrightarrow b = 6$ et

$f(A) = O \Leftrightarrow a\times z_A + b = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-6}{3i} \Leftrightarrow a = 2i$

Par suite, l'écriture complexe de f est $z' = 2iz + 6$.

3. On sait que le rapport de f est $|2i| = 2$ et qu'une mesure de l'angle de f est un argument de 2i d'où $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de f.

Le centre de f est le point Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6}{1-2i} = \dfrac{6(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{12}{5}i$.

Partie B :

1) a) L'écriture complexe de g est du type $z' = a\overline{z} + b$, où a et b sont deux nombres complexes.

$g(O) = B \Leftrightarrow a\times\overline{0} + b = z_B \Leftrightarrow b = 6$

Et $g(A) = O \Leftrightarrow a\times\overline{z}_A + b = 0$

$\Leftrightarrow -3ia + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -2i$.

Par suite, l'écriture complexe de g est $z' = -2i\overline{z} + 6$.

b) Posons z=x+iy, où x et y sont réels.

$z' = z \Leftrightarrow -2i\overline{z} + 6 = z$

$\Leftrightarrow -2i(x+iy)+6=x+iy$

$\Leftrightarrow (x+2y-6)+i(2x+y)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-6=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-6=0 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

Donc le centre de g est le point Ω' d'affixe -2+4i.

2) a) A' est l'image de A par l'homothétie de centre Ω' et de rapport 2 équivaut à dire $\overrightarrow{\Omega' A'}=2\overrightarrow{\Omega' A} \Leftrightarrow z_{A'}-z_{\Omega'}=2(z_A-z_{\Omega})$

$\Leftrightarrow z_{A'}=6i-(-2+4i)$

b) g est une similitude indirecte de centre Ω' d'affixe -2+4i et de rapport $|-2i|=2$.

L'axe (Δ) de g est l'ensemble des points M d'image M' par g tels que $\overrightarrow{\Omega' M'}=2\overrightarrow{\Omega' M}$.

Posons $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x,y , x' et y' sont réels :

$z'-(-2+4i)=2[z-(-2+4i)]$

$\Leftrightarrow -2i\overline{z}+6-(-2+4i)=2z+4-8i$

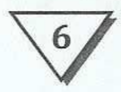
$\Leftrightarrow -2i\overline{z}+8-4i=2z+4-8i$

$\Leftrightarrow 2z+2i\overline{z}-4-4i=0 \Leftrightarrow z+i\overline{z}-2-2i=0$

$\Leftrightarrow (x+iy)+i(x-iy)-2-2i$

$\Leftrightarrow x+y-2+i(x+y-2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$

Ainsi une équation de (Δ) est $x+y-2=0$.



6 S'ENTRAINER

Partie A

Soit g la similitude directe d'écriture complexe : $z'=i2\sqrt{2}z+2i\sqrt{2}-2$.

1) Le rapport de g est $|i\sqrt{2}=\sqrt{2}|$.

L'angle de g est un argument de $i\sqrt{2}$ et comme $arg(i\sqrt{2})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors g est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le centre de g est le point d'affixe $z_{\Omega}=\frac{-2+2i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}=\frac{-2(1-i\sqrt{2})}{1-i\sqrt{2}}=-2$.

2) Remarquons que :

$z'=i\sqrt{2}\overline{z}+2i\sqrt{2}-2=i\sqrt{2}(\overline{z})+2i\sqrt{2}-2$

donc, on a : $M(z)\mapsto M_1(\overline{z})\mapsto M'(z')$

et par suite s est la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{u})$ telle que f=g o s.

Partie B :

1) Posons $z=x+iy$, où x et y sont réels.

$z'=z \Leftrightarrow i\sqrt{2}\overline{z}+2i\sqrt{2}-2=z$

$\Leftrightarrow i\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2i\sqrt{2}-2=x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}+2=0 \\ -x\sqrt{2}+y-2\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{2}-2 \\ -\sqrt{2}(y\sqrt{2}-2)+y-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{2}-2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

Donc Ω (-2) est le centre de f.

2) M(z) appartient à la droite $\Delta: y=x+2 \Leftrightarrow z=x+i(x+2)$, x est réel.

Donc l'affixe de M'=f(M) est $z'=i\sqrt{2}\overline{z}+2i\sqrt{2}-2$

$=i\sqrt{2}(x-i(x+2))+2i\sqrt{2}-2$

$=(x\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2)+i(x\sqrt{2}+2\sqrt{2})$

En posant $z'=x'+iy'$ avec x' et y' réels, on obtient :

$\begin{cases} x'=x\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2 \\ y'=x\sqrt{2}+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow y'=x'+2$ donc $M'\in(\Delta)$.

3) On pose h=f o S_Δ où S_Δ désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

a) On sait que l'écriture de S_Δ est du type $z'=a\overline{z}+b$ avec a et b sont deux nombres complexes tels que $|a|=1$.

Les points A(-2) et B(2i) son deux points distincts de la droite (Δ) e donc sont invariants par S_Δ . il en résulte que :

$\begin{cases} a\overline{(-2)}+b=-2 \\ a\overline{(2i)}+b=2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b=-2 \\ -2ia+b=2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2i)a=2+2i \\ b=-2+2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)a=1+i \\ b=-2+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=(1+i)^2 \\ b=-2+2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2i \\ b=-2+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=i \\ b=-2+2i \end{cases}$

Ainsi , l'écriture complexe de S_Δ est $z'=i\overline{z}-2+2i$.

b) On a : $M(z)\xrightarrow{S_\Delta}M'(z')\xrightarrow{f}M''(z'')$

avec $z'=i\overline{z}-2+2i$ et $z''=i\sqrt{2}\overline{z}'+2i\sqrt{2}-2$

$=i\sqrt{2}(\overline{i\overline{z}-2+2i})+2i\sqrt{2}-2$

$=i\sqrt{2}(iz-2-2i)+2i\sqrt{2}-2=\sqrt{2}z+2\sqrt{2}-2$

Par suite, l'écriture complexe de h est $z'=\sqrt{2}z+2\sqrt{2}-2$

c) h est l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre $\Omega(-2)$.

4) $f\circ S_\Delta=h \Leftrightarrow f=h\circ S_\Delta$.

Il en résulte que f est donc la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre $\Omega(-2)$ et d'une symétrie orthogonale d'axe $\Delta: y=x+2$ passant par $\Omega(-2)$.

On en déduit que $\Delta : y = x + 2$ est l'axe de f

7 S'ENTRAINER

A d'affixe 3i et B d'affixe 6.

Partie A

1. $\begin{cases} 0 = a\times 3i + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 2i \end{cases} \Rightarrow 2iz + 6$

Angle : $\frac{\pi}{2}$, rapport : 2, point invariant :

$\omega = 2i\omega + 6 \Leftrightarrow \omega = \frac{6}{5}(1+2i)$

2. $\begin{cases} 0 = a\times \overline{3i} + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a\times -3i + b \\ 6 = a\times 0 + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = -2i \end{cases} \Rightarrow z' = -2i\overline{z} + 6.$

Partie B

1. $z' = -2i\overline{z} + 6 \Leftrightarrow x' + iy'$

$= -2i(x - iy) + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y + 6 \\ y' = -2x \end{cases}$

On cherche le point invariant : $\begin{cases} x = -2y + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6x + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$;

K a pour affixe -2+4i.

2. a et b $h : z \to z' / z' + 2 - 4i$

$= \frac{1}{2}(z + 2 - 4i) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}z - 1 + 2i.$

$g = f\circ h : z \mapsto z'' = -2i\overline{z}' + 6$

$= -2i\left(\frac{1}{2}\overline{z} - 1 - 2i\right) + 6 = -i\overline{z} + 2i + 2.$

il s'agit bien d'une isométrie car le module du coefficient de $\overline{z}$ est 1 ; image de K $-i(-2-4i) + 2i + 2 = -2 + 4i$, on retrouve bien K.

c. $z'' = -i\overline{z} + 2i + 2$

$\Leftrightarrow x'' + iy'' = -(x + iy) + 2i + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -y + 2 \\ y'' = -x + 2 \end{cases}$

si L est invariant il est tel que $\begin{cases} x = -y + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$;

s'il est sur $(\vec{O}, \vec{v})$, son abscisse est nulle, soit x=0, ce qui donne le point 2i.

g. est donc la réflexion d'axe (KL), d'équation x+y-2=0.

d. On a $f = f\circ h\circ h^{-1} = g\circ h^{-1}$ donc h' est l'homothétie de centre K, de rapport2.

3. Comme h^{-1} transforme une droite en une droite parallèle, il suffit que Δ soit parallèle à (KL) pour que son image le soit également.

Exercice10

Comme H est un point du cercle de diamètre [AB], on a : (HA) ⊥ (HB).

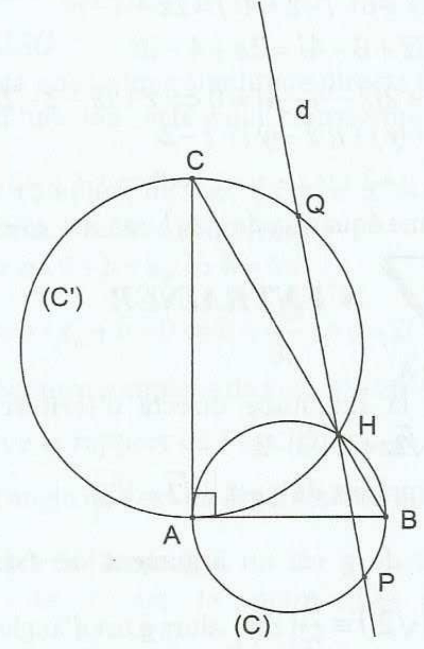
Comme H est un point du cercle de diamètre [AC], on a : (HA) ⊥ (HC).

On en déduit que H est un point de la droite (BC) et que (AH) ⊥(BC) donc H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

2) Cette similitude transforme A en A et B en C d'où elle transforme [AB] en [AC].

On en déduit qu'elle transforme le milieu de [AB] ou centre de (C) en le milieu de [AC] ou centre de (C').

Donc cette similitude transforme le cercle (C) en le cercle (C').



3) La similitude de centre A transforme (C) en (C'), les deux cercles se coupent en A et H.

P est un point de (C), Q est un point de (C') et les point P, H et Q sont alignés donc l'image de P par cette similitude est Q (Configuration de 2 cercles sécants et similitude directe)

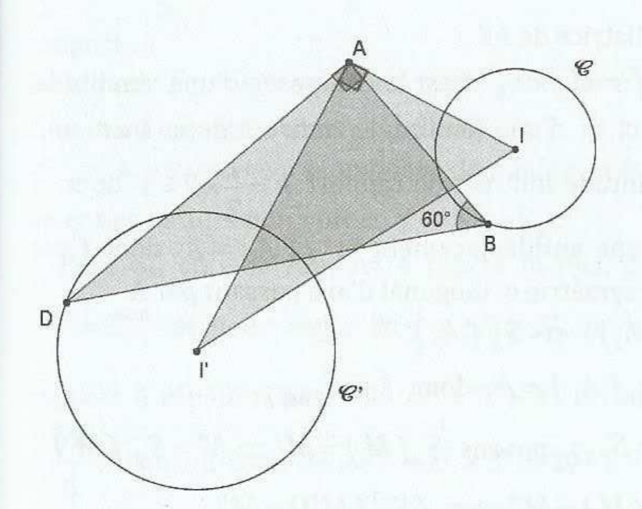
Comme le triangle ABC est rectangle en A et la similitude a pour centre A et transforme B en C, on en déduit que l'angle de cette similitude est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

(suivant si ABC est direct ou indirect).

On sait que l'image par la similitude de P est Q donc le triangle APQ est rectangle en A.



S'ENTRAINER



Par construction, on a : $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{-\pi}{2}$ et

$$\frac{AD}{AB} = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

On en déduit que D est l'image de B par la similitude directe f de centre A, d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{3}$.



SE PERFECTIONNER

Analyse de l'exercice :
Figure initiale :

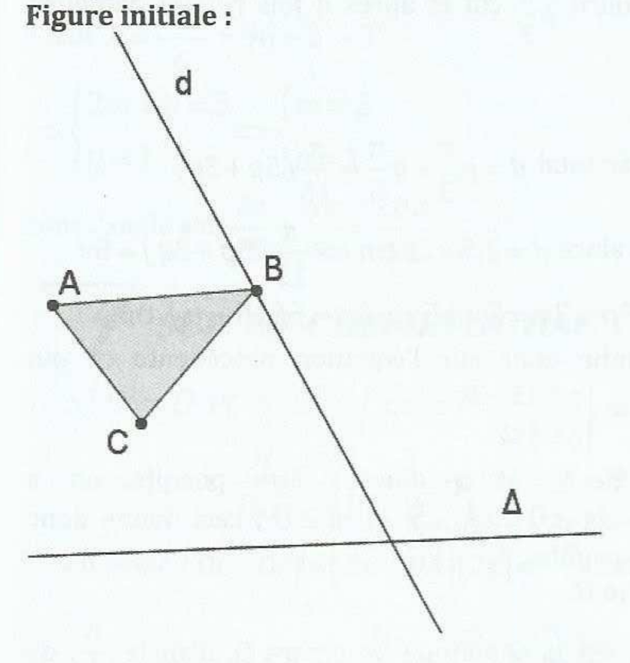
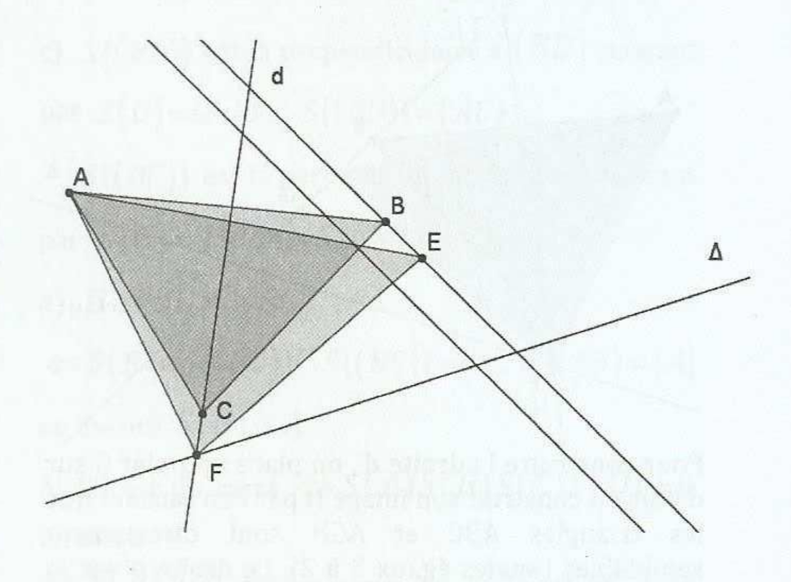
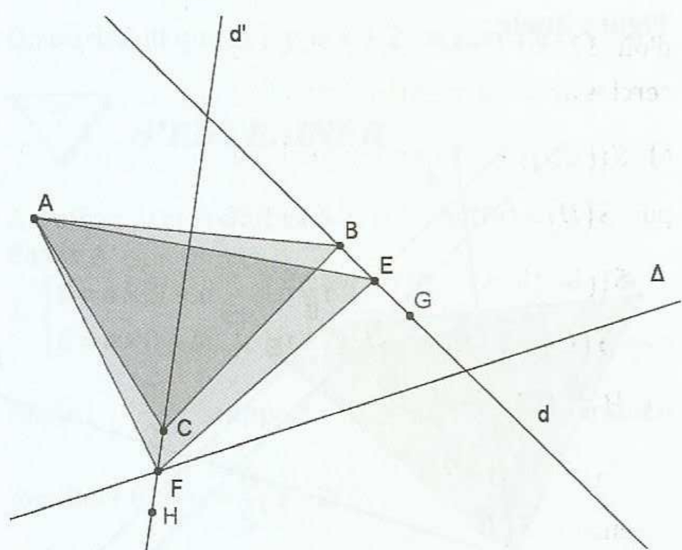


Figure finale :



On note f la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
Puisque AEF doit être directement semblable à ABC, on doit avoir nécessairement
f(E) = F.
Or E appartient à la droite d donc F doit appartenir à l'image d' de la droite d par f.
D'autre part, F appartient à la droite Δ donc F est nécessairement un point d'intersection de d' et de Δ.

Résolution de l'exercice :
Soit d' l'image de d par la similitude directe f de centre A et transformant B en C.
c'est une droite qui peut être :
Strictement parallèle à Δ : dans ce cas l'exercice n'a pas de solution.
Confondue avec Δ : dans ce cas n'importe quel point F de Δ convient, la droite Δ est nécessairement la droite (AC) et A se trouve à l'intersection de d et Δ. Le point E se trouve alors sur d et les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès.
Sécante à Δ : F est nécessairement le point d'intersection de d' et de Δ.
Si on note E l'antécédent de F par f, on a : f(E) = F.
Si on note f^{-1} la similitude réciproque de f, on a: $f^{-1}(F) = E$.
F appartient à d', image de d par f donc E appartient à l'image de d' par f^{-1} qui est la droite d, ainsi le triangle AEF vérifie les conditions imposées.
Construction des points E et F :



Pour construire la droite d', on place un point G sur d puis on construit son image H par f en sachant que les triangles ABC et AGH sont directement semblables (angles égaux 2 à 2). Le droite d' est la droite (CH)

Le point F est à l'intersection des droites Δ et d'.

Le point E est le point de d tel que les triangles ABC et AEF sont directement semblables.



SE PERFECTIONNER

1) Similitude direct de centre A $S_A(\varsigma_1)=\varsigma_2$;

$M\in\varsigma_1$; $S_A(M)=M'$

a) On a $S_A(\varsigma_1)=\varsigma_2$

$S_A(A_1)=A_2 \Rightarrow$ La similitude directe conserve les mesures des angles alors

$S_A(M)=M'$ $\quad\left(\overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{A_1M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A_2A}.\overrightarrow{A_2M'}\right)2\pi$

$S_A(A)=A$

b) On a $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}\right)2\pi$

$\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{A_1A}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_2A},\overrightarrow{A_2M'}\right)2\pi$

$\equiv 0 2\pi$

$\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires donc M,B,M' alignés.

2)a) σ Similitude indirect de centre A et $\sigma_A(\varsigma_1)=\varsigma_2\Rightarrow\sigma_A(A)=A,\sigma_A(A_1)=A_2$ donc le rapport K de σ_A est $k=\frac{AA_2}{AA_1}=2$

Posons $\sigma_A=S_\Delta\circ h_{(h,2)}$

donc $\sigma_A(A_1)=A_2\Leftrightarrow S_\Delta\circ h_{(h,2)}(A_1)=A_2$

$\Leftrightarrow S_\Delta(A_1)=h_{(A,\frac{1}{2})}(A_2)=k$

Car on a k=A*A2 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2}$ et par suite Δ est la médiatrice de AK

b) $f=\sigma_A\circ S_A^{-1}$ f est la composée d'une similitude direct et d'une similitude indirect donc f est une similitude indirect de rapport $k=\frac{1}{2}\times 2=1$ donc f est une antidéplacement et $f(A)=A$ donc f est une symétrie orthogonal d'axe passant par A.

$f(A_2)=\sigma\circ S_A^{-1}(A_2)$

$=\sigma_A(A_1)=A_2$ donc $f=S_{(AA_2)}$

$f=S_{(AA_2)}$ posons $S_A(M)=M'\Rightarrow M=S_A^{-1}(M')$

$\sigma_A(M)=M''\Rightarrow\sigma_A(S_A^{-1}(M'))=M''$

$\sigma_A\circ S_A^{-1}(M')=M''$

alors f(M')=M'' $\Rightarrow S_{(AA_2)}(M')=M''$



SE PERFECTIONNER

Partie A

1. $3y=5(15-x)$: comme 5 ne divise pas 3, il doit diviser y, donc $y=5k$; ceci donne alors : $15k=5(15-x)\Leftrightarrow 15-x=3k\Leftrightarrow x=15-3k$.

2. Comme l'unité est le centimètre, la distance sur le cercle lorsque A fait un angle θ est θ centimètres (définition du radian) Après p fois , il a donc parcouru $\rho\frac{\pi}{3}$ cm et après q fois r₂. Il a parcouru $q\frac{\pi}{5}$

Soit au total $d=p\frac{\pi}{3}+q\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{15}(5p+3q)$

On a alors $d=2{,}5\times 2\pi cm\Leftrightarrow\frac{\pi}{15}(5p+3q)=5\pi$

$\Leftrightarrow 5p+3q=5\times 15\Leftrightarrow 3q=5(15-p)$. On retombe donc sur l'équation précédente ce qui donne $\begin{cases}p=15-3k\\q=15k\end{cases}$

Comme p et q doivent être positifs, on a $15-3k\geq 0\Leftrightarrow k\leq 5$ et $k\geq 0$; ceci donne donc les 6 couples.

Partie B

1. s_1 est la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$, de rapport 4, S_2 est la similitude de centre O, d'angle

$\frac{\pi}{5}+\pi=\frac{6\pi}{5}$ et de rapport 6 (attention au signe du rapport...)

2. On pose $S_m = s_1 \circ s_1 \circ ... \circ s_1$ (composée de m fois s_1 m étant un entier naturel non nul)

$S'_n = s_2 \circ s_2 \circ ... \circ s_2$ (composée de n fois s_2 n étant un entier naturel non nul) et $f = S'_n \circ S_m$.

a. Pour S_m on a le rapport 4 répété m fois, donc $4^m = 2^{2m}$ et pour angle $m\frac{\pi}{3}$; pour S'_n on a le rapport 6 répété n fois, soit $6^n = 2^n \times 3^n$ e l'angle $n\frac{5\pi}{6}$, d'où un total de $2^{2m} \times 2^n \times 3^n = 2^{2m+n} \times 3^n$ pour le rapport et $m\frac{\pi}{3}+n\frac{6\pi}{5}$ pour l'angle.

b. On a $144 = 12^2 = 2^4 \times 3^2$, il faudrait $\begin{cases} 2m+n=4 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ est donc un angle de $\frac{\pi}{3}+2\frac{6\pi}{5}=\frac{5+36}{15}\pi=\frac{41}{15}\pi \neq 0[2\pi]$

Ca colle pour le rapport mais pas pour l'angle

c. Si $OM' = 240$, OM=6, alors le rapport de similitude doit être de 40, ce qui est impossible puisque 5 n'apparait pas comme diviseur dans le rapport.

Avec $OM' = 576$,

il faut $k=\frac{576}{6}=96=2^5 \times 3^1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2m+n=5 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

donc l'angle est $\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{5}=\frac{28\pi}{15}$.

12 SUR LE CHEMIN DU BAC

a) $S(D)=O$ *et* $S(C)=I$ donc

S de rapport $\frac{OI}{DC}=\frac{AI}{AB}=\frac{1}{2}$ *car* $I = A * B$

S d'angle $(\overrightarrow{DC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OI}) \equiv (\overrightarrow{DC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DA})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Ω le centre de S donc $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega D}\,\hat{,}\,\overrightarrow{\Omega O}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega C}\,\hat{,}\,\overrightarrow{\Omega I}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

d'où Ω est l'intersection des arcs $\widehat{DO}$ *et* $\widehat{CI}$ des cercles de diamètres respectifs $[DO]$ *et* $[CI]$

c) $S((BD))$ est la perpendiculaire à (BD) passant par $S(D)=O$ *donc* $S((BD))=(AC)$

$S((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $S(C)=I$ *donc* $S((BC))=(AB)$

d) $B \in (BD) \cap (BC)$

$\Leftrightarrow S(B) \in S((BD)) \cap S((BC)) = (AC) \cap (AB) = \{A\}$

ou encore $S(B)=A$

ABCD est un carré $\Leftrightarrow S(A)S(B)S(C)S(D)$ est un carré

$\Leftrightarrow S(A)AIO$ est un carré or JAIO est un carré alors $S(A)=J$

e) $S \circ S$ est la composée de deux similitudes directes donc c'est une similitude direct de rapport $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$ d'où c'est une homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$ et de centre Ω

Car $-\frac{1}{4} \neq 1$ *et* $S \circ S(\Omega) = S(\Omega) = \Omega$

Ainsi $h_{(\Omega,-\frac{1}{4})}(B) = S \circ S(B) = S(A) = J$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega J} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \Omega$ est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ *et* $(J,4)$

2) a) $S_{(OI)} \circ S$ est la composée d'une similitude direct et d'une similitude indirect donc c'est une similitude indirecte

$\begin{cases} S_{(OI)} \circ S(D) = S_{(OI)}(O) = O = \sigma(D) \\ S_{(OI)} \circ S(C) = S_{(OI)}(I) = I = \sigma(C) \end{cases}$

Donc $\sigma = S_{(OI)} \circ S(B) = S_{(OI)}(A) = B$

b) σ est une similitude indirecte de rapport $\frac{OI}{DC}=\frac{1}{2} \neq 1$ *et* $\sigma(B)=B$ donc σ de centre B

$S(D)=O$ donc S d'axe (OD), la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle nul $(\overrightarrow{BD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BO})$

D'où $\sigma = S_{\left(B,\frac{1}{2},(OD)\right)} = h_{\left(B,\frac{1}{2}\right)} \circ S_{(OD)} = S_{(OD)} \circ h_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}$

3)a) $h(B) = R \circ S(B) = R(A) = B$

h est la composée de deux similitudes directes donc c'est une similitude direct de rapport $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ d'où c'est une homothétie de rapport $\frac{1}{2} \neq 1$

Or $h(B) = B$ donc h de centre B $h = h_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}$

b) $\Omega' = \Omega * B \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Omega'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Omega} \Leftrightarrow h(\Omega) = \Omega'$

$\Leftrightarrow R \circ S(\Omega) = \Omega' \Leftrightarrow R(\Omega) = \Omega'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} O\Omega = O\Omega' \\ \left(\widehat{O\Omega, O\Omega'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

D'où $O\Omega\Omega'$ est un triangle rectangle et isocèle en O



13 SUR LE CHEMIN DU BAC

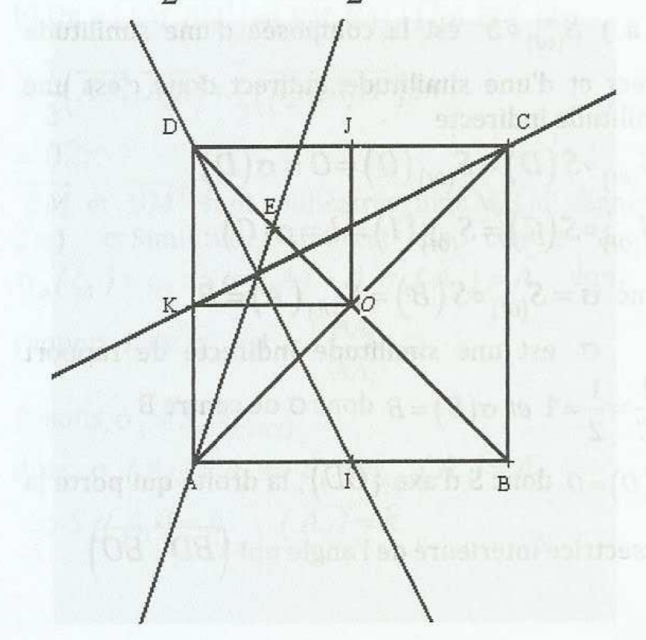
1) S(A) = O et S(B) = J

Soit k le rapport de S et θ une mesure de son angle

$k = \frac{OJ}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AB} = \frac{1}{2}$

$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

car $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$



2) a) S((BC)) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par S(B) = J ⇒ S((BC)) = (CD)

de même S((AC)) = (BD)

b) C ∈ (BC) ∩ (AC) ⇒ S(C) ∈ (CD) ∩ (BD)
⇒ S(C) = D

3) a) L'image du carré ABCD par S est le carré OJDD' où D' = S(D) or OJDK est un carré
⇒ S(ABDC) = OJDK

b) D' = S(D) = K

c) Soit Ω le centre de S ⇒ S o S =
$S_{\left(\Omega,\frac{1}{4},\pi\right)} = h_{\left(\Omega,-\frac{1}{4}\right)}$

Or S o S (C) = K ⇒
$h_{\left(\Omega,-\frac{1}{4}\right)}(C) = K$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{\Omega K} + \overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$

⇒ Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (K, 4)

d) Soit E le milieu de [OD]

S o S (A) = S(O) = E car

$\begin{cases} JE = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}BO \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{JE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

e) $h_{\left(\Omega,-\frac{1}{4}\right)}(A) = E$ ⇒ Ω ∈ (AE) or Ω ∈ (CK) ⇒

Ω ∈ (AE) ∩ (CK)

4) Ω ∈ (CK) ⇒ S(Ω) = Ω ∈ S((CK)) = (DI)

<u>**NB**</u> : S((CK)) est la perpendiculaire à (CK) passant par S(C) = D

Or $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(C) = D$ et $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(K) = I$

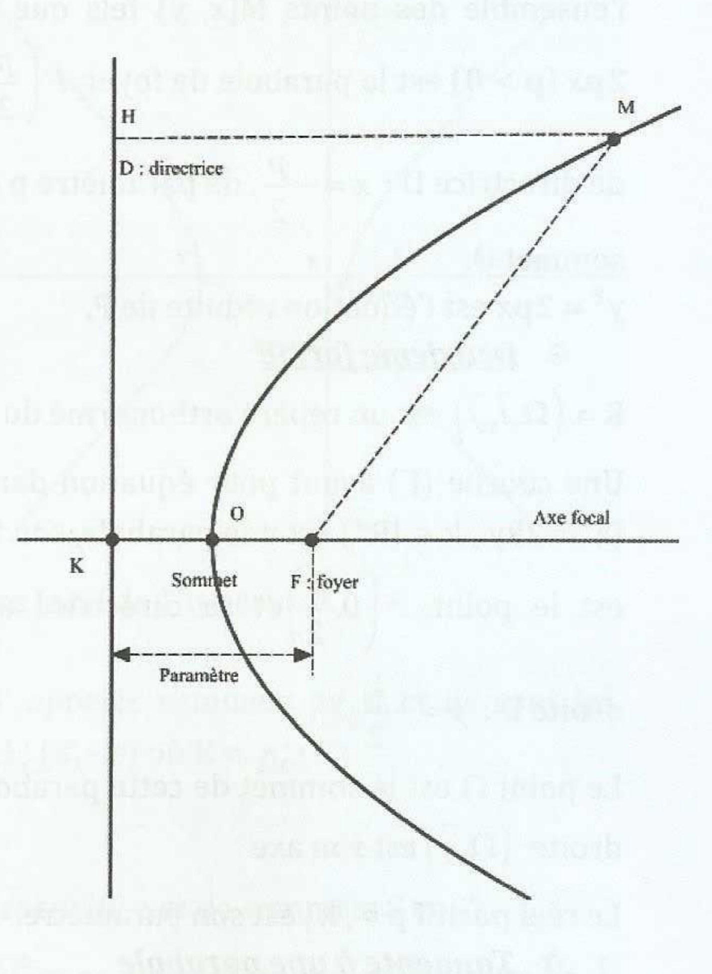
⇒ (DI) ⊥ (CK) ⇒ S((CK)) = (DI)

Ainsi Ω ∈ (AE) ∩ (CK) ∩ (DI) ⇒ les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes en Ω

Coniques

I) Résumé du cours

1) La parabole



Définition

Etant donnés une droite D et un point F n'appartenant pas à D,

On appelle **parabole** de **foyer F** et de **directrice D** l'ensemble des points M du plan tels que **MF = MH** où H = $p_D^{\perp}(M)$ ou bien **MF = d(M, D)**.

On note $P_{(F,\,D)}$ = {M ∈ P / MF = d(M, D)}.

Vocabulaire

P une parabole de foyer F et de directrice D.

La perpendiculaire D menée de F est appelée **axe focal** d(F, D) est appelée **paramètre** de P .

Théorème

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un point unique S appelé sommet de la parabole

Le sommet de $P_{(F,\,D)}$ est le milieu de [FK] où K = $p_D^{\perp}(F)$.

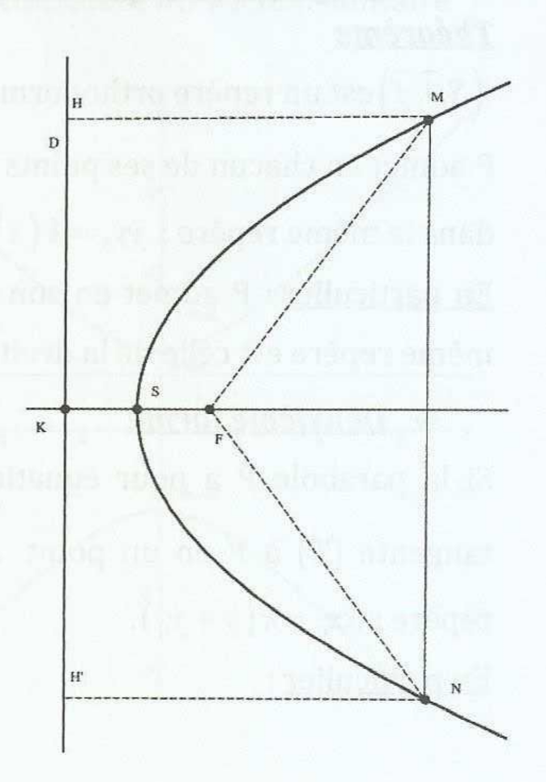
☆ ***Equation réduite d'une parabole***

Théorème

P une parabole de sommet S, de foyer F, de paramètre p et de directrice D.

On munit le plan à un repère orthonormé (S,i,j) où $\vec{i}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$

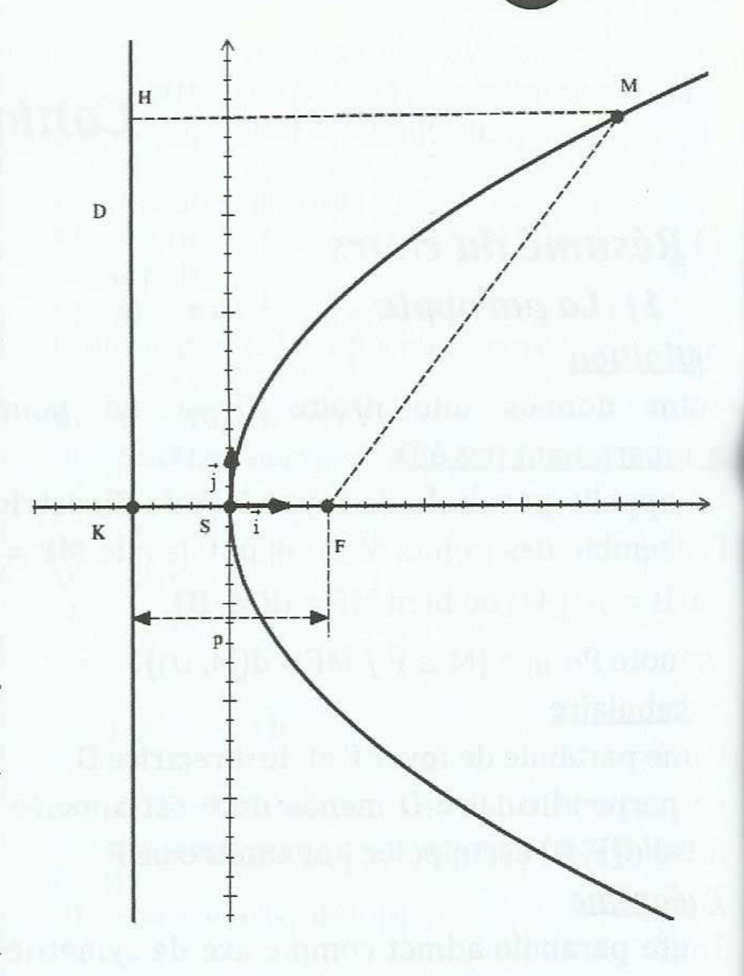
La parabole P a pour équation **$y^2 = 2px$**, D : $x=-\frac{p}{2}$ et $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.



Inversement

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points M(x, y) tels que $\mathbf{y^2 = 2px}$ **(p > 0)** est la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, de directrice D : $x=-\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.

$\mathbf{y^2 = 2px}$ est l'équation réduite de P.



◈ ***Deuxième forme***

R = $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan

Une courbe (Γ) ayant pour équation dans R : ($x^2 = 2ky$; k ∈ IR*) est une parabole, son foyer est le point $F\left(0,\frac{k}{2}\right)$ et sa directrice est la droite D : $y=-\frac{k}{2}$

Le point Ω est le sommet de cette parabole, la droite $\left(\Omega,\vec{j}\right)$ est son axe

Le réel positif p = | k | est son paramètre.

☆ ***Tangente à une parabole***

Théorème

$\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan. P est une parabole d'équation $y^2 = 2kx$; k ∈ IR*

P admet en chacun de ses points $M_0\left(x_0,y_0\right)$ une tangente (T) ayant pour équation cartésienne dans le même repère : $yy_0=k\left(x+x_0\right)$

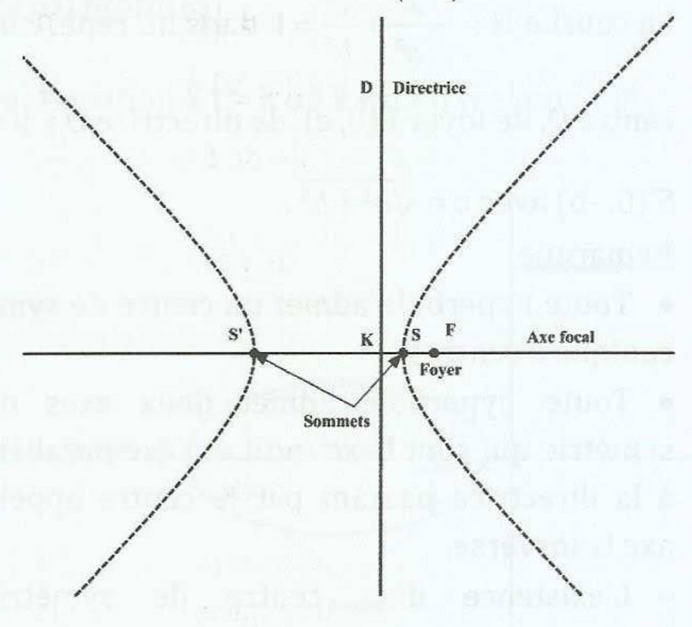
En particulier : P admet en son sommet S une tangente dont l'équation cartésienne dans le même repère est celle de la droite $\left(S,\vec{j}\right)$, elle est donc parallèle à la directrice D de P.

◈ ***Deuxième forme***

Si la parabole P a pour équation cartésienne dans $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$: ($x^2 = 2ky$; k ∈ IR*) alors la tangente (T) à P en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ de P a pour équation cartésienne dans le même repère : $xx_0=k\left(y+y_0\right)$.

En particulier :

La tangente à P en son sommet S a pour équation (y = 0), c'est la droite $\left(S,\vec{i}\right)$ parallèle à la directrice D : $y=-\frac{k}{2}$.



2) L'hyperbole

Définition

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **e > 1**.

On appelle hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH}=e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

On note $H_{(F,\,D,\,e)}=\left\{M\in P\,/\,\frac{MF}{MH}=e,\text{ où } H=p_D^{\perp}(M)\right\}$.

- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'hyperbole.
- L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H .
- H rencontre son axe focal en deux points S et S' appelés sommets de H et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

☆ Equation réduite d'une hyperbole

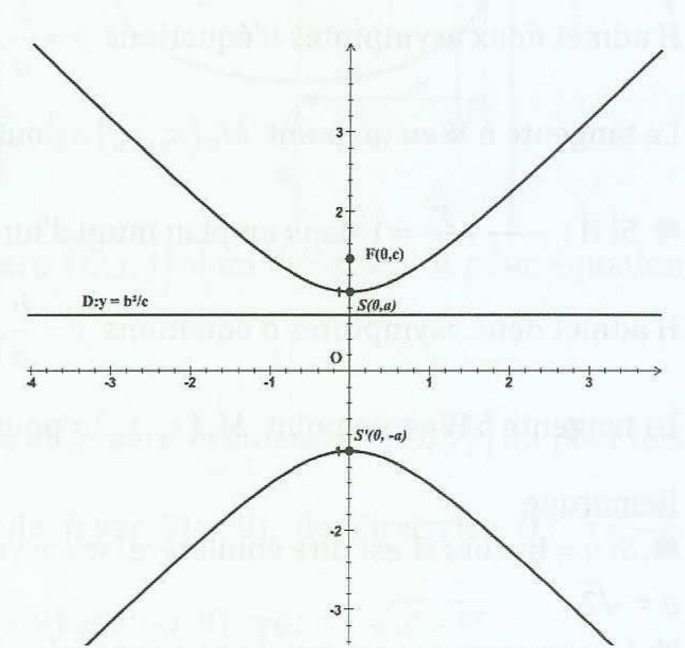
Théorème

Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets S et S'.

On désigne par O le milieu de [SS'], on pose $\vec{i}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D

Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ alors l'hyperbole H a pour équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avec

$b^2 = c^2 - a^2$



Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(a > 0 et b > 0) est une hyperbole de foyer F(c, 0), de directrice D : $x=\frac{a^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{a}$ et de sommets S(a, 0) et S'(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2+b^2}$.

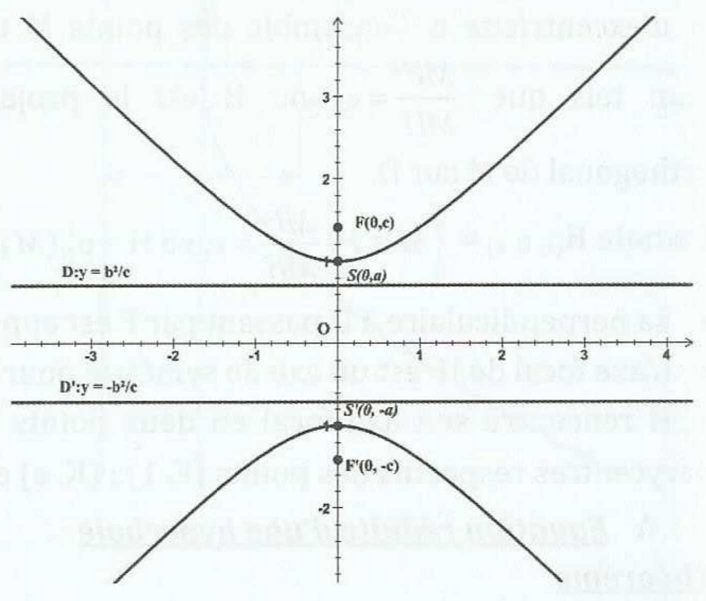
◈ Deuxième forme

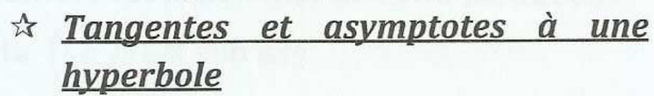
La courbe H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan est une hyperbole de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets (c'est une conique à centre)
- Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre appelé axe transverse.
- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.





☆ Tangentes et asymptotes à une hyperbole

Théorème

➡ Soit H : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

➡ Si H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

Remarque

➡ Si a = b alors H est dite équilatère, ses asymptotes sont perpendiculaires et son excentricité e = $\sqrt{2}$.

➡ La tangente au sommet d'une hyperbole est parallèle aux directrices.

☆ **Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes**

Théorème :

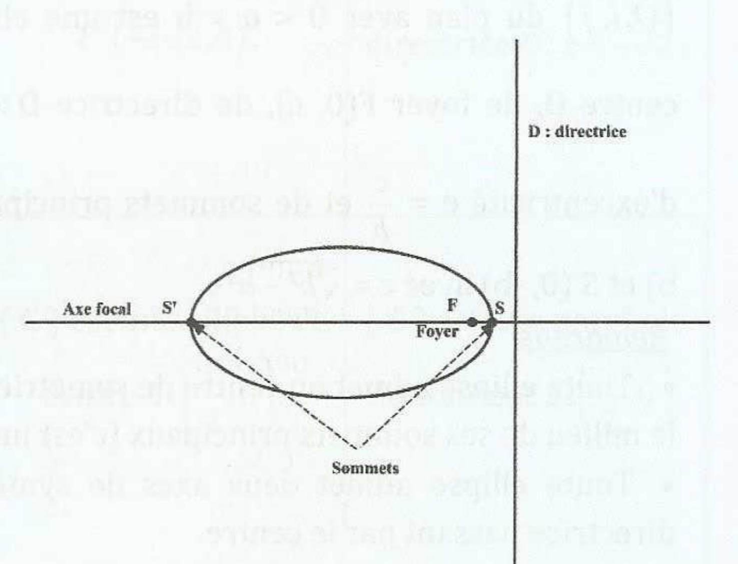
Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation XY = k où k est un réel non nul.

3) L'ellipse

Définition

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **0 < e < 1**.

On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



On note $E_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.

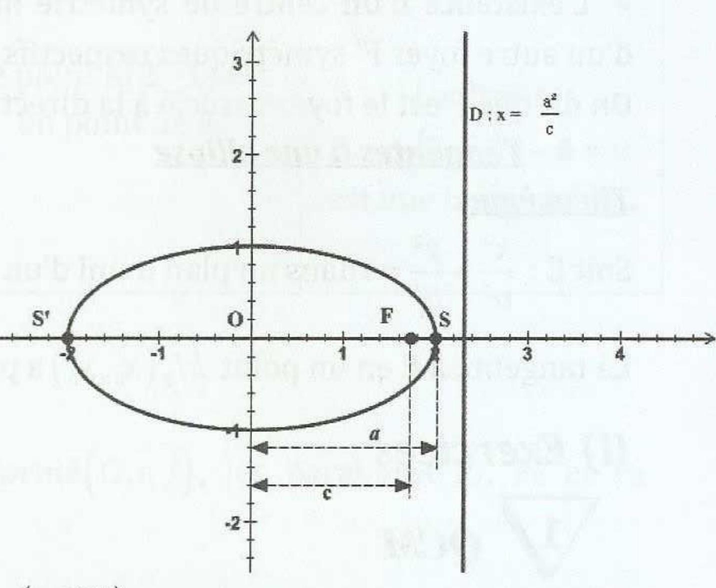
- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'ellipse.
- L'axe focal de E est un axe de symétrie pour E
- E rencontre son axe focal en deux points S et S' appelés sommets principaux de E et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

☆ **Equation réduite d'une ellipse**

Théorème

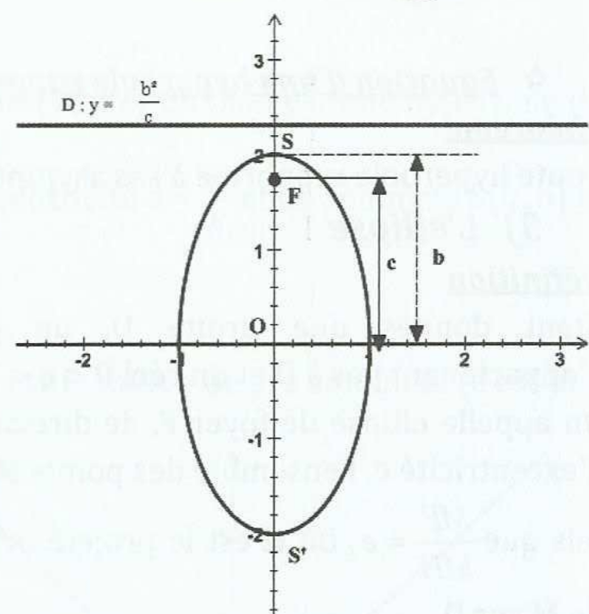
Soit E une ellipse de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets principaux S et S'.

On désigne par O le milieu de [SS'], on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D. Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}$



Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) est une ellipse de foyer F(c, 0), de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{a}$ et de sommets principaux S(a, 0) et S'(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2 - b^2}$.

◈ ***Deuxième forme***



La courbe E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan avec $0 < a < b$ est une ellipse de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets principaux S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{b^2-a^2}$.

Remarque

- Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets principaux (c'est une conique à centre)
- Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre.
- Ce deuxième axe coupe l'ellipse en deux points appelés sommets secondaires.
- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.

☆ ***Tangentes à une ellipse***

Théorème

Soit E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ **a > 0 et b > 0**

La tangente à E en un point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

II) Exercices



Pour chaque question il existe une seule bonne réponse :

Question 1 Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole (P) d'équation : $y^2+6x+15=0$, (P) a pour paramètre p =	3	-3	6

Question 2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, l'ensemble des points M(z) vérifiant : $z^2-4=4-\bar{z}^2$ est :	Une hyperbole équilatère de foyer $F\left(2\sqrt{2},0\right)$ et de directrice associée la droite $D: x=\sqrt{2}$.	Une ellipse de foyers $F\left(2\sqrt{2},0\right)$ et $F'\left(-2\sqrt{2},0\right)$.	Une parabole de foyer $F\left(\sqrt{2},0\right)$ et de directrice $D: x=-\sqrt{2}$.
Question 3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la courbe (C) : $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$. Alors on a :	(C) est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$.	(C) est une ellipse de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$.	(C) est une parabole de sommet $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$.
Question 4 Soit E une ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ dans un repère orthonormé du plan alors :	Le point F $(0, \sqrt{2})$ est un foyer de E.	Le point A(2, -1) est un point de E.	La droite $\Delta: x\sqrt{2} + 2y - 4 = 0$ est une tangente à E.



Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les paraboles P_1, P_2 et P_3 d'équations respectives :

3 APPLIQUER

$y^2 = 6x$, $y^2 = -4x$ et $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Déterminer les éléments caractéristiques (paramètre, foyer et directrice) de chacune de ces paraboles.

Tracer P_1, P_2 et P_3.

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (Γ) dont une équation cartésienne est :
$y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$.
Montrer que (Γ) est une parabole. Déterminer les coordonnées de son foyer F et donner une équation de sa directrice. Tracer (Γ).



Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Montrer que (C) est une parabole dont on déterminera les éléments caractéristiques (foyer, paramètre, directrice).



Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la courbe (H) d'équation :
$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$.
Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et les asymptotes.

6 APPLIQUER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Montrer que chacune des représentations paramétriques suivantes définit une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes.

a) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t \end{cases} \quad t \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\begin{cases} |x| = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x = 2\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{3}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère l'ellipse (E) de centre O, de sommets

1) A(5, 0), A'(-5, 0) et passant par le point M(4, 2).

2) Déterminer l'équation réduite de (E) et calculer les coordonnées de ses foyers.

8 APPLIQUER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Former l'équation réduite de l'ellipse (E) admettant pour foyers les points F(3, 0) et F'(-3, 0) et pour grand axe AA' = 8.



Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C) d'équation :

$4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0.$

Montrer que la courbe (C) est une ellipse dont on déterminera le centre Ω, les sommets et les foyers.

10 S'ENTRAINER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit (P) la parabole de sommet O et de foyer F(3, 0).

1. Donner l'équation réduite de (P). tracer (P).
2. Soit M le point (P) d'abscisse $\dfrac{3}{4}$ et d'ordonnée positive et H le projeté orthogonal de M sur la droite $\left(O, \vec{i}\right)$. Former une équation de la tangente en M à (P), ainsi qu'une équation de la normale à (P) en M.
3. La tangente et la normale en M rencontrent l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$ en T et N. vérifier que le sommet de (P) est le milieu de [TH] et que HN est égale au paramètre de (P).

11 S'ENTRAINER

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'hyperbole (H) de centre O, de distance focale FF′ = 12 et de sommets A et A′ tels que AA′ = 8.

1. En supposant que F appartient à la droite $(O,\vec{i})$, donner l'équation réduite de (H) ainsi que les équations de ses asymptotes Δ et Δ′. TracerΔ, Δ′ et (H).

2. En supposant, dans cette partie, que F appartient à la droite $(O,\vec{j})$ donner l'équation réduite de (H) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ainsi que les équations des asymptotes Δ et Δ′.

TracerΔ, Δ′ et (H).

12 S'ENTRAINER

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'hyperbole (H) d'équation réduite : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

On désigne par K et K′ les points de (H) d'abscisse 6, par Δ la tangente en K à (H) et par Δ′ la tangente en K′ à (H).

1. Donner une équation crtésienne de chacune des deux tangentes Δ et Δ′.
2. Vérifier que Δ et Δ′ se coupent suivant un point de la droite $(O,\vec{i})$.

13 SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par m un réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :
$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$.

1. Déterminer (E_m) pour les valeurs particulières m = 0 et m = 1.
2. Pour quelle valeur de m l'ensemble (E_m) est-il un cercle ? Préciser, dans ce cas, son centre et son rayon.
3. Dans cette partie, m est un réel non nul et différent de 1. Soit O′ le point de coordonnées (-1, 0).

On note (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(O',\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer qu'une équation de (E_m) dans ce repère est : $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$.

b) En déduire, suivant les valeurs de m, la nature de (E_m).



14 SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

A tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1. Vérifier que si $z = re^{i\varphi}$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.
2. Trouver les coordonnées du point M′ si $z = re^{i\varphi}$.
3. En déduire que, lorsque M décrit un cercle de centre O, et de rayon $r \neq 1$, le point M′ décrit une ellipse.



15 SE PERFECTIONNER

On considère la parabole P définie dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ par l'équation : $y^2 = 4x$.

1) Déterminer les coordonnées de son foyer F et une équation de sa directrice D.

2) Soient $M_1\left(x_1, y_1\right)$ et $M_2\left(x_2, y_2\right)$ deux points distincts de P tels que $F \in \left[M_1M_2\right]$.

a) Montrer que $y_1y_2 = -4$.

b) Soit I le milieu du segment $\left[M_1M_2\right]$.

Montrer que I varie sur un ensemble P ′ ayant pour équation dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$:

$y^2 = 2(x-1)$.

Donner la nature de P ′ et ses éléments caractéristiques.

c) Montrer que $\frac{1}{M_1F}+\frac{1}{M_2F}=1$.

d) Montrer que les tangentes à P en M_1 et M_2 sont perpendiculaires.

16 SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la courbe (C) d'équation : $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

1) a) Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

b) Tracer (C) et ses asymptotes.

2) Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.

a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en E.

b) La droite (T) coupe les asymptotes de (C) en G et H. Prouver que E est le milieu de [GH].

3) Calculer le volume, en unité de volume, engendré par la rotation de l'arc AE de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses ; où A est un sommet de (C).



17 SE PERFECTIONNER

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit (H) l'ensemble des points M(x, y) vérifiant : $9x^2-4y^2-36=0$.

1) a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera son excentricité.

b) Donner les coordonnées des sommets et des foyers de (H) ainsi que les équations de ses asymptotes.

c) Vérifier que la droite (T) d'équation : $3\sqrt{2}x-2y-6=0$ est la tangente à (H) au point A $\left(2\sqrt{2},3\right)$.

2) On désigne par (P) la parabole de sommet O et de dirctrice D : $y=-\dfrac{2}{3}$

a) Déterminer les coordonnées du foyer de la parabole (P) ainsi que l'équation réduite de (P).

b) Vérifier que la droite (T) est tangente à (P) en A.

c) Tracer (T), (H) et (P).

3) Pour tout réel θ de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on considère dans ℂ, l'équation $(E_\theta): z^2-\dfrac{4}{\cos\theta}z+\dfrac{13}{cos^2\theta}-9=0$.

a) Résoudre dans ℂ, l'équation (E_θ).

b) Soient M'_θ et M''_θ les points images des solutions z′ et z″ de l'équation (E_θ).

Montrer que M'_θ et M''_θ varient sur (H) lorsque θ décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

18 SE PERFECTIONNER

Dans le plan, on considère un triangle OAB isocèle et rectangle en O. Soit $G=A*B$ et F le point tel que $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OG}$. (on pose OG = 2p où p > 0). On appelle P la parabole de foyer F et de sommet O.

1) Construire la directrice D de P.

2) Montrer que $AF=\dfrac{5}{2}p$. En déduire que A et B appartiennent à P.

3) Ecrire une équation de P dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{OG}\cdot\overrightarrow{OG}$.

4) Les tangentes à P en A et B se coupent en I.

a) Déterminer les coordonnées des points A, B et I en fonction de p. (on suppose que $y_A>0$)

En déduire que $I\in(OF)$.

b) Vérifier que $O=I*G$.

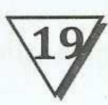
c) Soit H le projeté orthogonal de A sur D. Montrer que AHIF est un losange.

5) Soit $M\left(x_1,y_1\right)$ et $N\left(x_2,y_2\right)$ deux points de P tels que OMN soit rectangle en O. On pose une équation de la droite (MN) : $x=ay+b$ où $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

a) Montrer que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation : $y^2-2pay-2pb=0$.

b) En calculant $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, montrer que b = 2p. En déduire que $G\in(MN)$.

c) Donner une construction de N connaissant le point M de P.



19 SE PERFECTIONNER

Relativement à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, on considère la courbe (H) d'équation $x^2-4y^2-2x-3=0$.

1) a) Montrer que (H) est une hyperbole, déterminer les sommets, les foyers, les asymptotes, les directrices et l'excentricité de (H).

b) Tracer (H).

2) a) Vérifier que le point $M_0\left(1+2\sqrt{2},1\right)$ est un point de (H).

b) Donner une équation de la tangente (T) à (H) en M_0.

3) Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$.

$\left(E_\theta\right):\left(\cos^2\theta\right)z^2-2\left(\cos^2\theta+2\cos\theta\right)z+5+4\cos\theta=0$.

a) Résoudre l'équation $\left(E_\theta\right)$.

b) M' et M'' sont les images respectives des solutions z' et z''.

Montrer que M' et M'' varient sur une branche de l'hyperbole (H)



20 SE PERFECTIONNER

Soit ℋ une hyperbole de foyers F, de directrice D et d'excentricité e. Montrer que l'image de ℋ par une similitude directe f de rapport k est une hyperbole que l'on caractérisera.

On considère dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, la courbe (C) d'équation : $xy - 2x - 3y - 1 = 0$ et la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z associe son image M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 2 + 2i$.

a) Reconnaître f et donner ses éléments caractéristiques.

b) Exprimer les coordonnées (x, y) du point M en fonction des coordonnées (x', y') de M'.

c) Montrer que la courbe (C') image de (C) par f a pour équation : $x^2 - y^2 - x + 3y - 9 = 0$.

d) En déduire que (C') est une hyperbole dont on donnera dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ les coordonnées du centre et des sommets. Représenter (C') dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

e) Déduire la nature de (C) et préciser ses éléments caractéristiques.



SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation : $z^2 - \left(2u - i\bar{u}\right)z - 2iu \cdot \bar{u} = 0$

$\bar{u}$ étant le nombre conjugué de u.

1) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E_u). On désignera par z' et z" les solutions de cette équation.

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ et on désigne par A, M, M' et M" les points d'affixes respectives 2i, u, z' et z".

Soit (H) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M" soient alignés.

a) Trouver une équation cartésienne de (H).

b) Montrer que l'ensemble (H) est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

c) Vérifier que (H) passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à (H) en O.

d) Tracer (H).



SUR LE CHEMIN DU BAC

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (on choisira 2 cm comme unité graphique). Soit (E) la conique d'équation : $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$.

1) a) Quelle est la nature de (E) ?

b) Déterminer les foyers de (E).

c) Tracer (E).

2) A chaque point M de (E) de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.

a) Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3-x)$.

b) En déduire que $|z| = \frac{3}{2+\cos\theta}$; θ est un argument de z.

3) Soient M' et M'' les points de (E) dont les affixes z' et z'' ont pour arguments respectifs θ et $\theta+\pi$.

a) Calculer $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ en fonction de θ.

b) Déterminer θ pour que $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ soit maximum puis minimum.

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse (E) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (E).

b) Tracer (E) et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à (E).

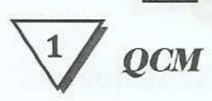
2) Soit (T) la tangente à (E) en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par A l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $A = \frac{2}{\sin 2\theta}$.

b) En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].



1 QCM

Question 1

(P) : . $y^2+6x+15=0$. $\Leftrightarrow y^2+6x+15=2\times3\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ (P) a pour paramètre p = 3

Question 2

$z^2-4=4-\bar{z}^2$

Posons $z=x+iy$, l'équation devient :

$x^2-y^2=4$

C'est le cas d' une hyperbole équilatère de foyer $F\left(2\sqrt{2},0\right)$ et de directrice associée la droite $D: x=\sqrt{2}$.

Question 3

(C) : $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

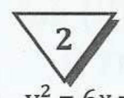
$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$

C'est le cas d'une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Question 4

E une ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

La droite $\Delta : x\sqrt{2} + 2y - 4 = 0$ est une tangente à E au point de coordonnées $\left(\sqrt{2},1\right)$



2 APPLIQUER

- $y^2 = 6x = 2 \times 3x$

Le paramètre p = 3, le foyer F $\left(\frac{3}{2},0\right)$ et la directrice D :

$x=-\frac{3}{2}$

- $y^2 = -4x = 2 \times (-2)\,x$ (p = 2, F (-1, 0) et D : $x = 1$)
- $x^2=\frac{1}{2}y=2\times\frac{1}{4}y$ (p = $\frac{1}{4}$, F $\left(0,\frac{1}{8}\right)$ et D : $y=-\frac{1}{8}$)

3 APPLIQUER

$(\Gamma) : y^2 +2y -4x +3 = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2=2\times2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Soit $\Omega\left(\frac{1}{2},-1\right)$

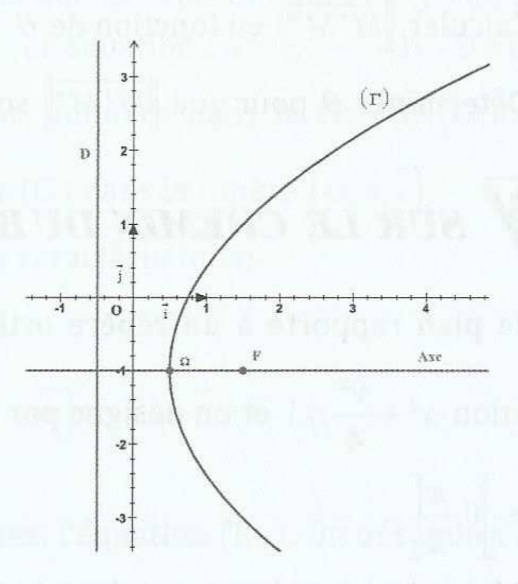
$(\Gamma) : Y^2 = 2 \times 2X$, dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

$\Rightarrow (\Gamma)$ est une parabole de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},-1\right)$

De foyer F $(1,0)_{(\Omega,\vec{i},\vec{j})}$ et de directrice D : X = - 1 dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on a :

$F\left(\frac{3}{2},-1\right)$ et $D: x=-\frac{1}{2}$



4 APPLIQUER

$$(C) : \begin{cases} x=\frac{t^2-1}{2} & t\in\mathbb{R} \\ y=2t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2-1}{2} \Leftrightarrow y^2=2\times4\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ (C) est une parabole de paramètre p = 4, de foyer F $\left(\frac{3}{2},0\right)$ et de directrice D : $x=-\frac{5}{2}$

5 APPLIQUER

(H) : $9x^2 -4y^2 -36x -8y -4 = 0$.

$\Leftrightarrow 9(x-2)^2-4(y+1)^2=36$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

On pose Ω (2, -1)

$\Rightarrow$ (H) : $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1$ dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

$\Rightarrow$ (H) est une hyperbole de centre Ω (2, -1), de foyers F $\left(\sqrt{13},0\right)$ et F ' $\left(-\sqrt{13},0\right)$, de sommets S (2, 0) et S ' (-

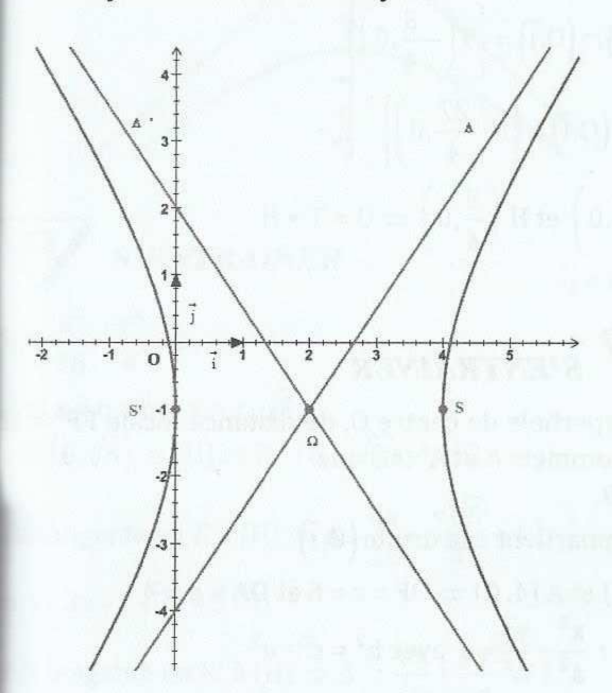
$\overline{2},0)$ et d'asymptotes $\Delta : Y = \dfrac{3}{2}X$ et $\Delta' : Y = -\dfrac{3}{2}X$ dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on a :

$F\left(2+\sqrt{13},-1\right)$ et $F'\left(2-\sqrt{13},-1\right)$

$S(4,-1)$ et $S'(0,-1)$

$\Delta : 3x-2y-8=0$ et $\Delta' : 3x+2y-4=0$



6 APPLIQUER

a) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t \end{cases}$ $t \neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^2 = 1+2y^2 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}^2} = 1$

C'est une hyperbole de foyers $F\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ et $F'\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$

De sommets $S(1, 0)$ et $S'(-1, 0)$

D'asymptotes $D : y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ et $D' : y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

b) $\begin{cases} |x| = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 1$

C'est une hyperbole équilatère

De foyers $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

De sommets $S\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et $S'\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

D'asymptotes $D : y = x$ et $D' : y = -x$.

c) $\begin{cases} x = 2\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{9}{16}x^2 - 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

C'est une hyperbole

De foyers $F(5, 0)$ et $F'(-5, 0)$

De sommets $S(4, 0)$ et $S'(-4, 0)$

D'asymptotes $D : y = \dfrac{3}{4}x$ et $D' : y = -\dfrac{3}{4}x$

7 APPLIQUER

(E) est une ellipse de centre O, de sommets $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$ et passant par le point $M(4, 2)$.

$\Rightarrow (E) : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a = 5$

$\Rightarrow (E) : \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Or $M(4, 2) \in (E) \Rightarrow b = \dfrac{10}{3}$

D'où $(E) : \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\dfrac{100}{9}}=1$

Les foyers de (E) sont $F\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3},0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{3},0\right)$

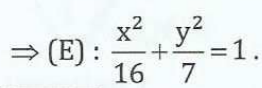


8 APPLIQUER

(E) est une ellipse admettant pour foyers les points $F(3,0)$ et $F'(-3, 0)$ et pour grand axe $AA' = 8$.

(E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a = \dfrac{AA'}{2} = 4$ et $a^2 - b^2 = c^2 = 3^2 = 9$

$\Rightarrow b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$



$\Rightarrow$ (E) : $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

9 APPLIQUER

(C) : $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$.

$\Leftrightarrow 4(x-3)^2+9(y-2)^2=36$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

On pose Ω (3, 2) ⇒ (C) : $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

⇒ (C) est une ellipse de centre Ω (3, 2)

De sommets A (3, 0), A ′ (-3, 0), B (0, 2) et B ′ (0, - 2) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

De foyers F $(\sqrt{5},0)$ et F ′ $(-\sqrt{5},0)$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on a :

A (6, 2), A ′ (0, 2), B (3, 4) et B ′ (3, 0)

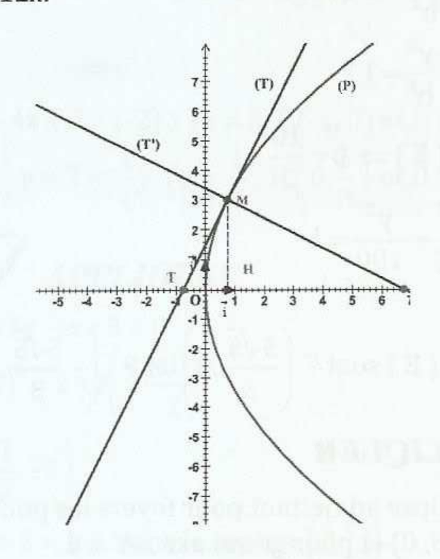
F $(3+\sqrt{5},2)$ et F ′ $(3-\sqrt{5},2)$

10 S'ENTRAINER

1. M ∈ (P) : parabole de sommet O et de foyer F (3, 0)
⇔ MF = MH où H est le projeté orthogonal de M sur la directrice D : $x = -3$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=(x+3)^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 12x$.



2. M $\left(\dfrac{3}{4},3\right)$ et H $\left(\dfrac{3}{4},0\right)$

(T) : $3y=6\left(x+\dfrac{3}{4}\right)$

$\Leftrightarrow$ (T) : $y=2x+\dfrac{3}{2}$

Soit (T ′) la normale à (P) en M

⇒ (T ′) est la perpendiculaire à (T) en M

⇒ (T ′) : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{27}{8}$

3. $(T)\cap(O,\vec{i})=\left\{T\left(-\dfrac{3}{4},0\right)\right\}$

$(T')\cap(O,\vec{i})=\left\{N\left(\dfrac{27}{4},0\right)\right\}$

$T\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$ et H $\left(\dfrac{3}{4},0\right)$ ⇒ O = T ∗ H

NH = 6 = p

11 S'ENTRAINER

(H) hyperbole de centre O, de distance focale FF′ = 12 et de sommets A et A′ tels que AA′ = 8.

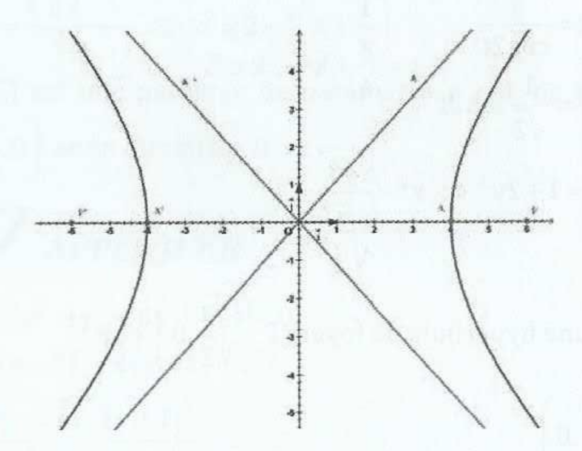
1. F appartient à la droite $(O,\vec{i})$.

F (6, 0) et A (4, 0) ⇒ OF = c = 6 et OA = a = 4

⇒ (H) : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $b^2 = c^2 - a^2$

⇒ (H) : $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$

$\Delta : y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ et $\Delta' : y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

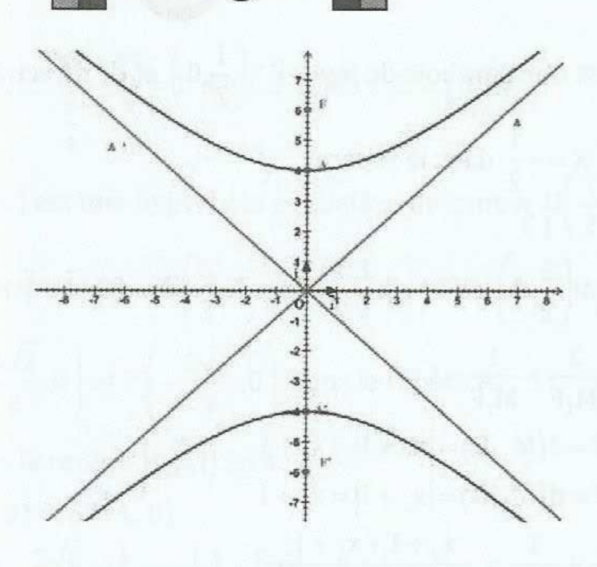


2. F appartient à la droite $(O,\vec{j})$

F (0, 6) et A (0, 4) ⇒ OF = c = 6 et OA = b = 4

⇒ (H) : $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a^2 = c^2 - b^2 = 20$

⇒ (H) : $-\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$



C'est le cercle de centre Ω (- 1, 0) et de rayon $\sqrt{\frac{8}{3}}$

3. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

a) Si M (X, Y) dans le repère $(O',\vec{i},\vec{j})$ avec O′ (- 1, 0)

$\Rightarrow X = x + 1$ et $Y = y \Rightarrow (E_m)$:

$(m-1)(x+1)^2 + 3my^2 = -4$

$\Rightarrow (E_m) : (m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$

b) $(E_m) : \frac{X^2}{3m} + \frac{Y^2}{m-1} = \frac{-4}{3m(m-1)}$

- Si m > 1 alors $\frac{X^2}{3m} + \frac{Y^2}{m-1} > 0$ et $\frac{-4}{3m(m-1)} < 0$

$\Rightarrow (E_m) = \varnothing$

- Si 0 < m < 1 alors $(E_m) : \frac{X^2}{3m} - \frac{Y^2}{1-m} = \frac{4}{3m(1-m)}$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{3m} - \frac{Y^2}{1-m} = \frac{4}{3m(1-m)}$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\sqrt{\frac{4}{1-m}}^2} - \frac{Y^2}{\sqrt{\frac{4}{3m}}^2} = 1$

$\Rightarrow (E_m)$ est une hyperbole.

- Si m < 0 alors $(E_m) : \frac{X^2}{\sqrt{\frac{4}{1-m}}^2} + \frac{Y^2}{\sqrt{-\frac{4}{3m}}^2} = 1$

$\Rightarrow (E_m)$ est une ellipse.

14 SE PERFECTIONNER

A tout point M du plan d'affixe z ≠ 0, on associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Si $z = re^{i\varphi}$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$

Il suffit de constater que $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

2. Si $z = re^{i\varphi}$ alors $z' = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$

$\Rightarrow z' = \frac{1}{2}\left(r\cos\varphi + \frac{1}{r}\cos\varphi + ir\sin\varphi - \frac{i}{r}\sin\varphi\right)$

$\Rightarrow M'\left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi ; \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right)$

3. Si $M \in \zeta_{(0,r)}$ avec $r \neq 1$ alors $z = re^{i\varphi}$

Si $M'(x',y')$ alors $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ y' = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1$$

$\Rightarrow$ M ′ appartient à une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1$$

15 SE PERFECTIONNER

$P : y^2 = 4x$.

1) $y^2 = 4x = 2 \times 2x \Rightarrow$ P est une parabole de foyer F(1, 0) et de directrice D : $x = -1$.

2) Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points distincts de P tels que $F \in [M_1M_2]$.

a) $y_1^{\,2} = 4x_1$ et $y_2^{\,2} = 4x_2$

$F \in [M_1M_2] \Rightarrow \overrightarrow{FM_1}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FM_2}\begin{pmatrix} x_2-1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Rightarrow (x_1-1)y_2 - (x_2-1)y_1 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}y_1^{\,2}-1\right)y_2 - \left(\frac{1}{4}y_2^{\,2}-1\right)y_1 = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{4}y_1y_2(y_1-y_2) + (y_1-y_2) = 0 \Rightarrow$

$(y_1-y_2)\left(\frac{1}{4}y_1y_2+1\right) = 0$

Or $y_1 \neq y_2$ car $M_1 \neq M_2 \Rightarrow \frac{1}{4}y_1y_2 + 1 = 0 \Rightarrow y_1y_2 = -4$.

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

$\begin{cases} x_I = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_I = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$y_I^{\,2} = \frac{1}{4}(y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+2y_1y_2) = \frac{1}{4}(4x_1+4x_2-8) = (x_1+x_2-2) = (2x_I-2) = 2(x_I-1)$

$\Rightarrow$ I varie sur un ensemble P ′ ayant pour équation dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $y^2 = 2(x-1)$.

On pose $Y = y$ et $X = x - 1 \Rightarrow$ P ′ a pour équation :
$Y^2 = 2X$, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\Omega(1, 0)$.

P ′ est une parabole de foyer $F'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de directrice $D' : X = -\frac{1}{2}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$\Rightarrow F'\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et $D' : x = \frac{1}{2}$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) $\frac{1}{M_1F} + \frac{1}{M_2F} = 1$

$M_1F = d(M_1, D) = |x_1+1| = x_1+1$

$M_2F = d(M_2, D) = |x_2+1| = x_2+1$

$\frac{1}{M_1F} + \frac{1}{M_2F} = \frac{x_2+1+x_1+1}{x_1x_2+x_1+x_2+1}$

$= \frac{x_2+x_1+2}{\frac{1}{16}\left(\underbrace{y_1y_2}_{-4}\right)^2 + x_1+x_2+1} = 1$

d) Soit (T_1) la tangente à P en M_1 et (T_2) la tangente à P en M_2.

$(T_1) : yy_1 = 2(x+x_1)$

$(T_2) : yy_2 = 2(x+x_2)$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{y_1} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T_1)

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{y_2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T_2)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 + \frac{4}{y_1y_2} = 0 \Rightarrow (T_1) \perp (T_2)$



16 SE PERFECTIONNER

1. a) $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$

On pose $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow$ (C) : $\dfrac{X^2}{\frac{9}{4}} - \dfrac{Y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ dans le repère $R' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$\Rightarrow$ (C) est une hyperbole équilatère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

de sommets $S\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et $S'\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et de foyers

$F\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ dans le repère R'

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

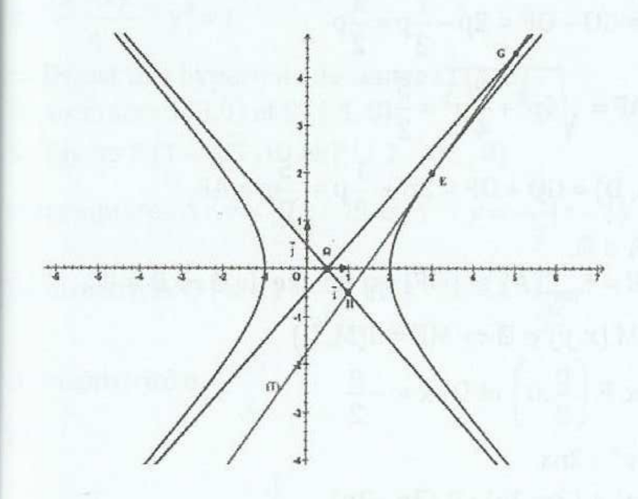
S(2, 0) et S'(- 1, 0)

$F\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

b) Traçage :

Les asymptotes de (C) sont Δ : Y = X et Δ' : Y = - X dans le repère R'

Dans le repère R on a : $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$ et $\Delta' : y = -x + \frac{1}{2}$



2. Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive $\Rightarrow$ E(3, 2) dans le repère R

Dans le repère R' on a : $E\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

a) (T) est la tangente à (C) en E $\Rightarrow$ (T) : $\dfrac{\frac{5}{2}X}{\frac{9}{4}} - \dfrac{2Y}{\frac{9}{4}} = 1$

dans le repère R'

Dans le repère R on a : (T) : $5x - 4y - 7 = 0$.

b) On montre que $(T) \cap \Delta = \left\{G\left(5, \frac{9}{2}\right)\right\}$

et $(T) \cap \Delta' = \left\{H\left(1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Il suffit de résoudre les systèmes : $\begin{cases} 5x - 4y - 7 = 0 \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases}$

et $\begin{cases} 5x - 4y - 7 = 0 \\ y = -x + \frac{1}{2} \end{cases}$.

On vérifie que G * H (3, 2) = E.

3. Soit A = S (2, 0)

$V = \pi \int_2^3 y^2 dx = \pi \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx$

$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = \frac{11\pi}{6}$

17 SE PERFECTIONNER

1. a) (H) : $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow$ (H) est une hyperbole d'excenticité $e = \frac{c}{a}$

$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

b) Les sommets sont S (2, 0) et S '(-2, 0)

Les foyers sont $F_1(\sqrt{13}, 0)$ et $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

Les asymptotes sont Δ : $y = \frac{3}{2}x$ et Δ' : $y = -\frac{3}{2}x$

c) $A\left(2\sqrt{2}, 3\right) \in (H)$

Soit (T) la tangente à (H) en A

(T) : $\frac{2\sqrt{2}x}{4} - \frac{3y}{9} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{2}x - 2y - 6 = 0$

2. (P) la parabole de sommet O et de directrice D : $y = -\frac{2}{3}$

a) Le foyer de (P) est $F\left(0, \frac{2}{3}\right)$

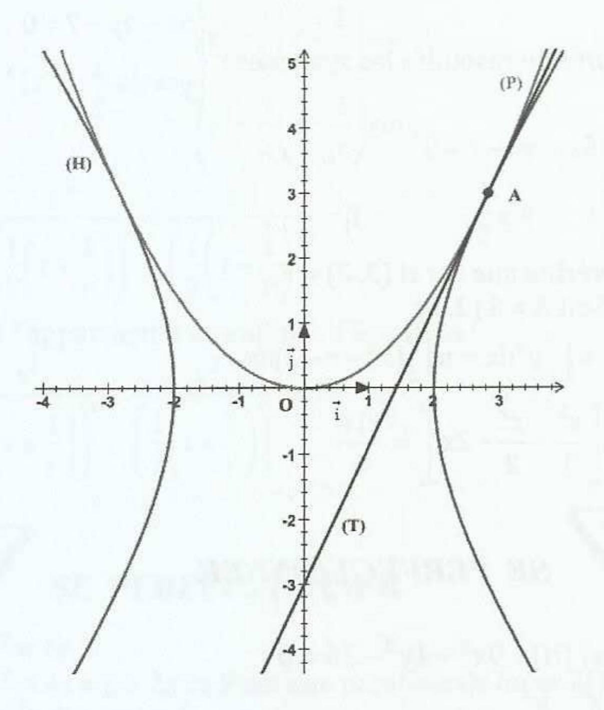
(P) : $x^2 = \frac{8}{3}y$

b) $A\left(2\sqrt{2}, 3\right) \in (P)$

(T') la tangente à (P) en A $\Rightarrow$ (T') : $2\sqrt{2}x = \frac{4}{3}(y + 3)$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow (T') = (T)$

c)



3. $(E_\theta): z^2 - \frac{4}{\cos\theta}z + \frac{13}{\cos^2\theta} - 9 = 0$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) $z^2 - \frac{4}{\cos\theta}z + \frac{13}{\cos^2\theta} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \frac{2}{\cos\theta}\right)^2 + \frac{9}{\cos^2\theta} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \frac{2}{\cos\theta}\right)^2 = (3i\tan\theta)^2$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{\cos\theta} + 3i\tan\theta$ ou $z = \frac{2}{\cos\theta} - 3i\tan\theta$

b) M'_θ et M''_θ les points images des solutions z' et z'' de l'équation (E_θ)

$M'_\theta\left(\frac{2}{\cos\theta} + 3i\tan\theta\right)$ et $M''_\theta = S_{(O,\vec{i})}(M'_\theta)$

Les coordonnées de M'_θ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\cos\theta} \\ y = 3\tan\theta \end{cases}, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

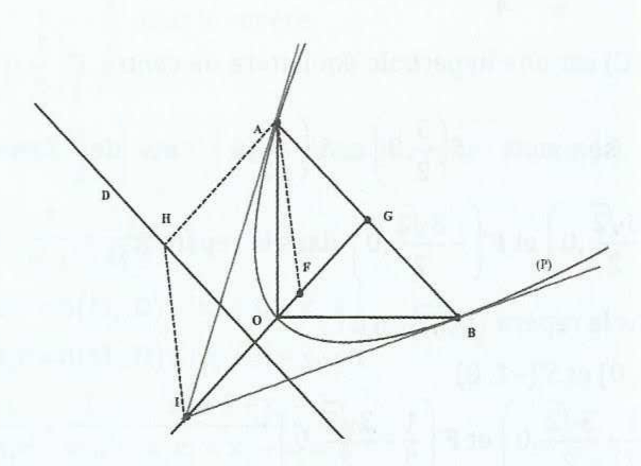
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow M'_\theta \in (H)$

Or $(O, \vec{i})$ est un axe de symétrie de (H)

$\Rightarrow M''_\theta \in (H)$

18 SE PERFECTIONNER



1. la directrice D de $\mathcal{P}$ est la perpendiculaire à l'axe (OF) passant par $S_O(F)$
2. Le triangle GAF est rectangle en G :

$AF = \sqrt{GA^2 + GF^2}$, avec GA = GO = 2p

$GF = GO - OF = 2p - \frac{1}{2}p = \frac{3}{2}p$

$\Rightarrow AF = \sqrt{4p^2 + \frac{9}{4}p^2} = \frac{5}{2}p$

$d(A, D) = GO + OF = 2p + \frac{1}{2}p = \frac{5}{2}p = AF$

$\Rightarrow A \in \mathcal{P}$.

Or $B = S_{(OF)}(A)$ et (OF) est un axe de $\mathcal{P} \Rightarrow B \in \mathcal{P}$

3. $M(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = d(M, D)$

Avec $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $D : x = -\frac{p}{2}$

$\Leftrightarrow y^2 = 2px$

4. a) A (2p, 2p) ; B (2p, -2p)

Soit (T) la tangente à P en A et (T') celle de P en B

(T) : $2py = p(x + 2p) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + p$

(T') : $-2py = p(x + 2p) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - p$

$I(x, y) \in (T) \cap (T') \Leftrightarrow I(-2p, 0)$.

$I \in (O, \vec{i}) = (OF)$

b) I (-2p, 0) ; G (2p, 0) $\Rightarrow O = I * G$

c) A (2p, 2p) ; $H\left(-\frac{p}{2}, 2p\right)$; I (-2p, 0) ; $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

On montre que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{FI} \Rightarrow$ AHIF est un parallélogramme

De plus on a AH = AF $\Rightarrow$ AHIF est un losange

5. OMN soit rectangle en O

(MN) : $x = ay + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

a) $M \in (MN) \cap$ ▯

$\Rightarrow \begin{cases} x = ay + b \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow y^2 - 2pay - 2pb = 0$

De même pour N

b) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2$

Avec $y_1y_2 = -2pb$; $x_1x_2 = \dfrac{1}{4p^2}(y_1y_2)^2 = b^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = b(b - 2p)$

Or $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Rightarrow b = 2p$ car $b \neq 0$.

G (2p, 0) et (MN) : $x = ay + b$ avec $b = 2p \Rightarrow G \in (MN)$

c) N est un point de la perpendiculaire à (OM) en O et aussi un point de (MG)

D'où la construction.



19

SE PERFECTIONNER

(H) : $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$.

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

$\Rightarrow$ (H)est une hyperbole de centre Ω (1, 0)

De sommets S (3,0) et S ' (-1, 0)

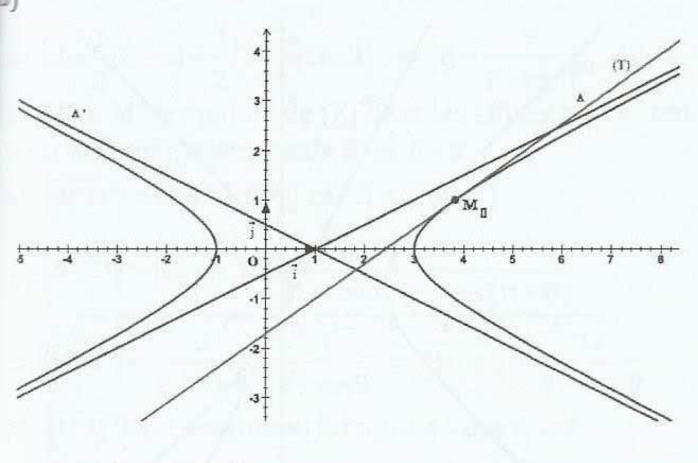
De foyers F $(1 + \sqrt{5}, 0)$ et F ' $(1 - \sqrt{5}, 0)$

D'asymptotes Δ : $y = \dfrac{1}{2}(x-1)$ et Δ' : $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)$

De directrices D : $x = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ et D ' : $x = 1 - \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

D'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b)



2. a) $M_0(1 + 2\sqrt{2}, 1)$ est un point de (H).

b) Soit (T) la tangente à ▯ en M_0.

(T): $\dfrac{2\sqrt{2}X}{4} - Y = 1$ avec $X = x - 1$ et $Y = y$

$\Rightarrow (T): x\sqrt{2} - 2y - 2 - \sqrt{2} = 0$

3. $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$(E_\theta) : (\cos^2\theta)z^2 - 2(\cos^2\theta + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$

a) $\Delta' = (\cos^2\theta + 2\cos\theta)^2 - (5 + 4\cos\theta)\cos^2\theta$

$\Rightarrow (i\sin\theta\cos\theta)^2$

$z' = 1 + \dfrac{2}{\cos\theta} + i\tan\theta$

$z'' = 1 + \dfrac{2}{\cos\theta} - i\tan\theta$

b) Les coordonnées de M ' vérifient le système :

$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{\cos\theta} \; ; \; \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ y = \tan\theta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$

Avec $x > 1$ et $y \in$ IR

$\Rightarrow$ M ' varie sur une branche de l'hyperbole (H)

Or M '' est symétrique de M ' par rapport à l'axe des abscisses

Qui est un axe de l'hyperbole

$\Rightarrow$ M '' varie aussi sur la même branche de l'hyperbole (H)



20

SE PERFECTIONNER

1. Soit (H) une hyperbole de foyers F, de directrice D et d'excentricité e

$H_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P / \dfrac{MF}{MH} = e, \text{où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.

f est une similitude directe de rapport k.

Soit M ∈ (H)et M ' = f(M).

Posons F ' = f(F) ; H ' = f(H) ; D ' = f(D)

On a : $\dfrac{M'F'}{M'H'} = \dfrac{MF}{MH} = e$, avec $H' = p_{D'}^{\perp}(M')$

$\Rightarrow$ M ' ∈ (H)' l'hyperbole de foyer F ', de directrice D ' et de même excentricité e.

2. (C) : $xy - 2x - 3y - 1 = 0$; $z' = \dfrac{1}{2}(1 - i)z - 2 + 2i$.

a) $z' = az + b = \dfrac{1}{2}(1-i)z - 2 + 2i$.

Avec $a = \dfrac{1}{2}(1-i) \in \mathbb{C}^*$ et $b = -2 + 2i \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ f est une similitude directe de rapport $k = |a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'angle $\theta \equiv \arg\left[\dfrac{1}{2}(1-i)\right][2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

De centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}=4i\right)$

b) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$z'=\frac{1}{2}(1-i)z-2+2i \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-2 \\ y'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=x'-y'+4 \\ y=x'+y' \end{cases}$

c) $(C') = f(C)$, avec $(C) : xy - 2x - 3y - 1 = 0$

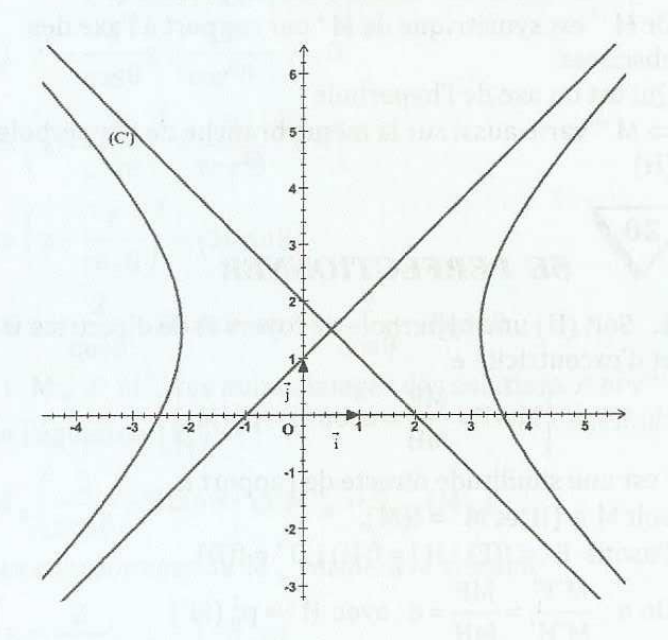
$\Rightarrow x'^2-y'^2-x'+3y'-9=0$

d) $(C') : x^2-y^2-x+3y-9=0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{7}-\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{7}=1$

$\Rightarrow$ (C') est une hyperbole de centre $\Omega'\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

De sommets $S_1\left(\frac{1}{2}+\sqrt{7},\frac{3}{2}\right)$ et $S_1\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7},\frac{3}{2}\right)$



e) $(C') = f(C) \Leftrightarrow (C) = f^{-1}(C')$ où f^{-1} est la similitude directe de centre $\Omega(4i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ (C) est une hyperbole de centre $f^{-1}(\Omega')$ et d'excentricité $e = \sqrt{2}$ (hyperbole équilatère)

21 SUR LE CHEMIN DU BAC

1. $z^2-\left(2u-i\bar{u}\right)z-2iu\cdot\bar{u}=0$

On montre que 2u et $-i\bar{u}$ sont les solutions de cette équation

2. A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives 2i, u, z' et z''.

(H) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.

a. Posons $u = x + iy \Rightarrow A(0, 2)$; $M'(2x, 2y)$; $M''(-y, -x$

$\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix}2x\\2y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix}-y\\-x-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

b. $(H) : x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}=1$

$\Rightarrow$ (H) est une hyperbole équilatère de centre $\Omega\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

De sommets $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2}\right)$ et $S'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2}\right)$

De foyers $F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1,\frac{1}{2}\right)$ et $F'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}-1,\frac{1}{2}\right)$

D'asymptotes $\Delta : y = x+\frac{3}{2}$ et $\Delta' : y = -x-\frac{1}{2}$

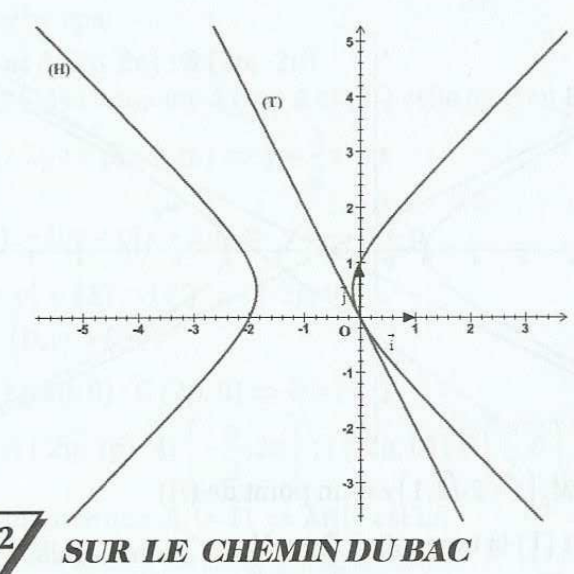
c. $O \in (H)$.

$O\left(1,-\frac{1}{2}\right)_{(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})}$

$(T) : \frac{X}{\frac{3}{4}}-\frac{\frac{-1}{2}Y}{\frac{3}{4}}=1$, avec $X = x + 1$ et $Y = y - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (T) : x+\frac{1}{2}y=0$

d.



22 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit $(E) : 3(x+1)^2+4y^2=12$.

1. a) $3(x+1)^2+4y^2=12 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

On pose X = x + 1 et Y = y

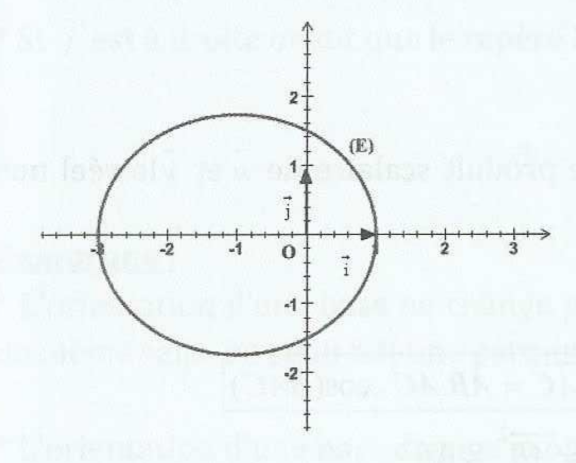
$\Rightarrow$ (E) : $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{3}=1$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Où Ω (-1, 0)

$\Rightarrow$ (E) est une ellipse.

b) Les foyers de (E) sont F (1, 0) et F ′ (-1, 0) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$\Rightarrow$ F (0, 0) = O et F ′ (-2, 0).



2. a) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, avec $3(x+1)^2+4y^2=12$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+3-\dfrac{3}{4}(x+1)^2} \Rightarrow |z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}(x^2-6x+9)}$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}(x-3)^2}=\dfrac{1}{2}|x-3|$, or $-3\le x\le 1 \Rightarrow |z|=\dfrac{1}{2}(3-x)$

b) Si $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$ alors $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$

$\Rightarrow |z|=\dfrac{1}{2}(3-x)=\dfrac{1}{2}(3-|z|\cos\theta) \Rightarrow |z|=\dfrac{3}{2+\cos\theta}$

3. M′ et M″ les points de (E) dont les affixes z′ et z″ ont pour arguments respectifs θ et $\theta+\pi$.

a) $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ = OM ′ + OM″ car O $\in$ [M′M″]

$\Rightarrow \|\overrightarrow{M'M''}\|=|z'|+|z''|=\dfrac{3}{2+\cos\theta}+\dfrac{3}{2+\cos(\pi+\theta)}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{M'M''}\|=\dfrac{3}{2+\cos\theta}+\dfrac{3}{2-\cos\theta} \Rightarrow \|\overrightarrow{M'M''}\|=\dfrac{12}{4-\cos^2\theta}$

b) $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ est maximum lorsque $4-\cos^2\theta$ est minimum

$\Leftrightarrow \cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \theta=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\|\overrightarrow{M'M''}\|$ est minimum lorsque $4-\cos^2\theta$ est maximum

$\Leftrightarrow \cos^2\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

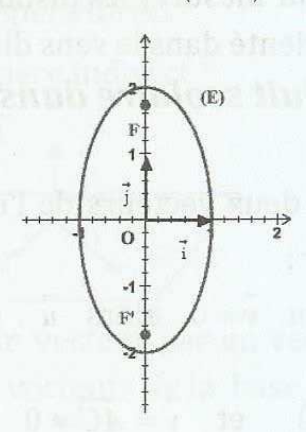
(E) : $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

M $(\cos\theta, 2\sin\theta)$ où $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

1. a) Les sommets de (E) sont $S_1(1,0)$; $S_2(-1,0)$; $S_3(0,2)$ et $S_4(0,-2)$

Les foyers de (E) sont F $(0,\sqrt{3})$ et F ′ $(0,-\sqrt{3})$

b)



c) $\cos^2\theta+\dfrac{(2\sin\theta)^2}{4}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\Rightarrow$ M $(\cos\theta, 2\sin\theta)\in$ (E)

2. Soit (T) la tangente à (E) en M.

(T): $x\cos\theta+\dfrac{2y\sin\theta}{4}=1$

$\Rightarrow$ (T) : $2x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$.

3. $\{P\}=(T)\cap(0,\vec{i})$ et $\{Q\}=(T)\cap(0,\vec{j})$

a) P $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},0\right)$ et Q $\left(0,\dfrac{2}{\sin\theta}\right)$

A = aire (OPQ) = $\dfrac{OP\times OQ}{2}$

$\Rightarrow A=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}\times\dfrac{2}{\sin\theta}}{2}=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta} \Rightarrow A=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$.

b) A est minimale $\Leftrightarrow \sin 2\theta$ est maximale avec $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \sin 2\theta=1 \Leftrightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}$

Dans ce cas on a :

$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$; $P(\sqrt{2},0)$ et $Q(0,2\sqrt{2})$

On vérifie que M = P ∗ Q.

Géométrie dans l'espace

I) Résumé du cours

Dans tout ce chapitre, E désigne l'ensemble des points de l'espace et W l'ensemble des vecteur de l'espace.

(Les unités pour mesurer les distances et les angles sont supposées choisies)

L'espace est orienté dans le sens direct

A) Produit scalaire dans l'espace :

- ***Définition*** :

Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace on appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

* Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$.

* Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\,.\cos(B\hat{A}C)}$

Remarque: Pour tous points A et B de E, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2$ = AB²

- ***Propriétés du produit scalaire dans W :***

Soients $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de W et α un réel. On a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ le produit scalaire est commutatif.
- $(\alpha\,\vec{u})\,.\,\vec{v}=\vec{u}\,.\,(\alpha\,\vec{v})=\alpha(\vec{u}\,.\,\vec{v})$
- $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w})$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de W On a : $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0}$
- Attention le produit scalaire n'est pas associatif.

Conséquences :

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

$|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwartz) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (Inégalité triangulaire)

- ***Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée :***

a) **Théorème :** Soient dans W muni d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$une d base orthonormée

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors On a : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

b) **Conséquences :** * $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$ * $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ * I = A * B $\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

B) Produit vectoriel :

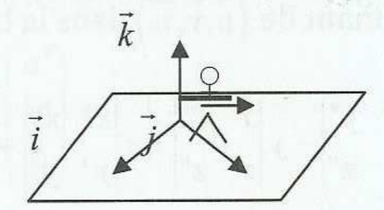
Orientation de l'espace:

Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace

Un observateur à les pieds en O, regarde vers le vecteur $\vec{i}$ et son corps dans le sens de $\vec{k}$

* Si $\vec{j}$ est à gauche on dit que le repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère direct

* Si $\vec{j}$ est à droite on dit que le repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère indirect



Remarque :

* L'orientation d'une base ne change pas si on remplace un vecteur par un vecteur colinéaire de même sens ou si on fait une permutation circulaire des vecteurs de la base .

* L'orientation d'une base change si on remplace un vecteur par un vecteur colinéaire de sens contraire ou si on permute deux vecteurs.

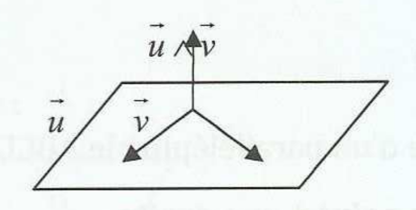
1) Définition du produit vectoriel :

L'espace est orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de W ,A,B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini par :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
  - ✦ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - ✦ $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de W
  - ✦ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin B\hat{A}C$



2) Propriétés Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de W

1) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ (anticommutativité)

3) Pour tout réel $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

4) Pour tout réel α on a : $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

5) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Attention : le produit vectorielle n'est pas associatif $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$

3) Expression analytique du produit vectoriel :

Expression du produit vectoriel : Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormé directe de l'espace

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ on a $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-zy'\\-(xz'-zx')\\xy'-yx'\end{pmatrix}$

Déterminant de trois vecteurs :

Soit B $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base B, et note $\det_B(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel

$$=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$ = x(y'z''−z'y'') − y (x'z''−z'x'') + z (x' y''−y'x'')

Théorème : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie $d\acute{e}t(u,v,w)=0$

4) Produit mixte :

Théorème $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base orthonormée directe Pour tout vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = (\vec{v}\wedge\vec{w}).\vec{u} = (\vec{w}\wedge\vec{u}).\vec{v} = \text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

5) Aires et Volumes :

a) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

b) L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

c) 3) Le Volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}|$ (Une autre formule $V=\frac{1}{3}Bh$)

d) Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à $|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}|$

6) Distance d'un point à une droite

Soit D(B,$\vec{u}$) une droite de l'espace d(A,D) = $\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

A × $\vec{u}$

D B

C) Droites et plans de l'espace :

1) Droites de l'espace. Soit $D\left(A,\vec{u}\right)$ avec $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

a) Une équation paramétrique de D est : $D:\begin{cases}x=x_0+\alpha a\\y=y_0+\alpha b\\z=z_0+\alpha c\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

b) Une équation cartésienne de D s'écrit sous la forme : $D:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$

2) Plans de l'espace :

a) Soit $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ avec $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

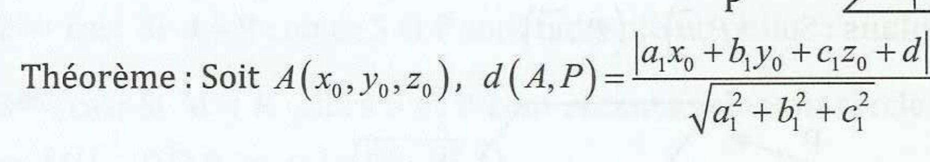
Une équation paramétrique de P est $\begin{cases}x=x_0+\alpha a+\beta a'\\y=y_0+\alpha b+\beta b'\\z=z_0+\alpha c+\beta c'\end{cases}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

b) Une équation cartésienne d'un plan s'écrit sous la forme :

$P:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ avec $\left(a_1,b_1,c_1\right)\neq(0,0,0)$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

P



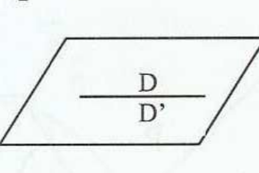
Théorème : Soit $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $d\left(A,P\right)=\dfrac{\left|a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$

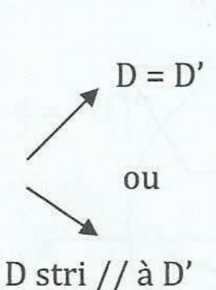
3) Position relative de deux droites de l'espace :

Soient $\left(D,\vec{u}\right)\left(D',\vec{v}\right)$.

D = D'

D = D'

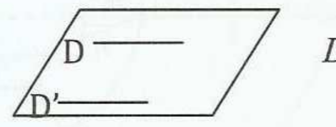




* Si $\vec{u}$ col à $\vec{v}$ alors

ou

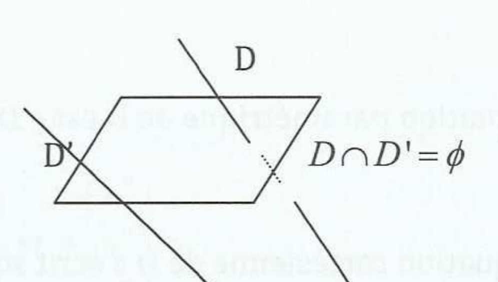
D stri // à D'



$D\cap D'=\phi$

D et D' sont sécantes

$D \cap D' = \{I\}$

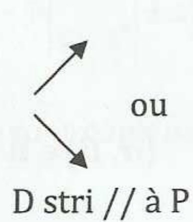


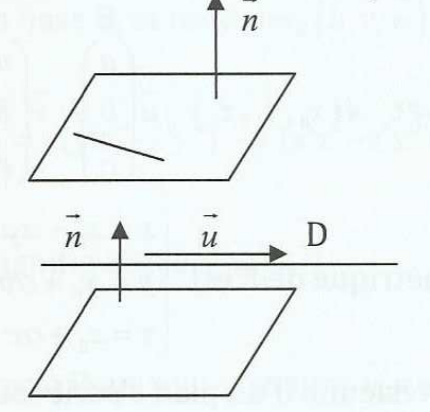
* Si $\vec{u}$ non col à $\vec{v}$ alors ou

D et D' ne sont pas coplanaires

4) Position relative d'une droite et d'un plan :

Soit $(D, \vec{u})$ et P de vecteur normal $\vec{n}$.

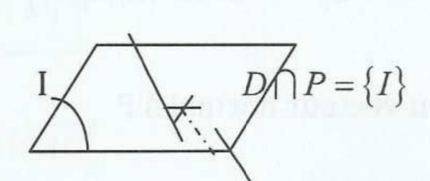




$D \subset P$

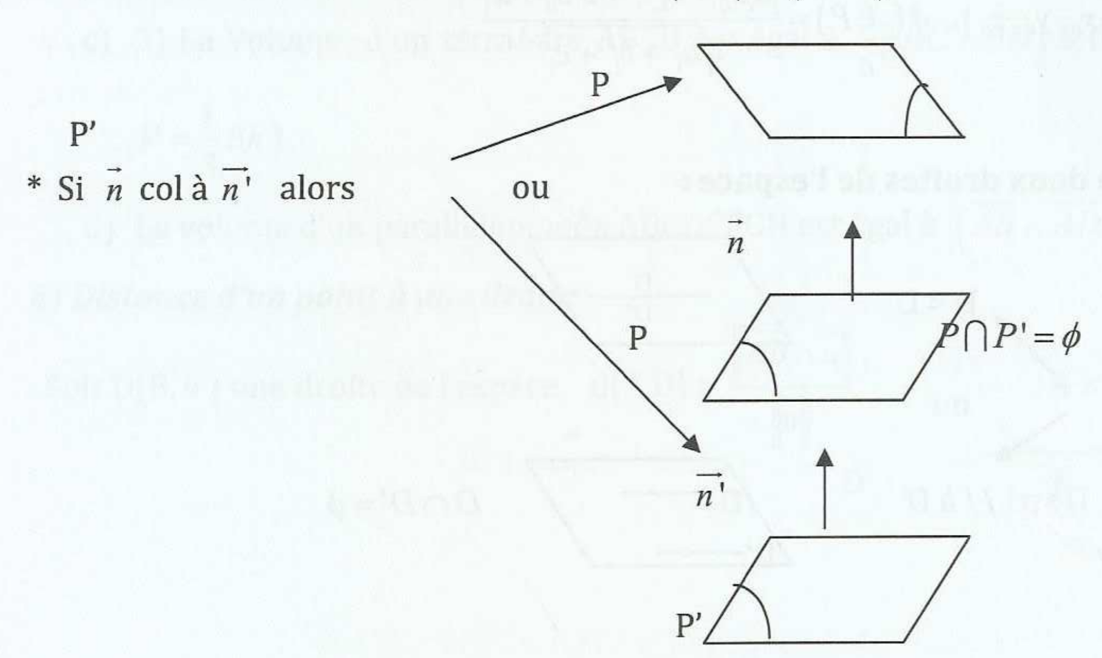
* Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ alors ou

D stri // à P



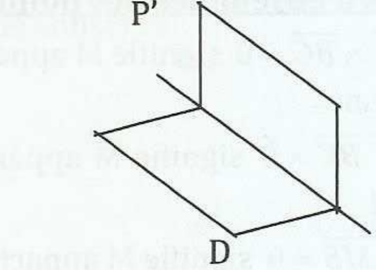
* Si $\vec{u} \not\perp \vec{n}$ alors D et P sont sécantes :

5) Position relative de deux plans : Soit $(P, \vec{n})$, $(P', \vec{n'})$



* Si $\vec{n}$ col à $\vec{n'}$ alors ou

* Si $\vec{n}$ non colinéaire à $\vec{n'}$ alors P et P' sont sécantes selon une droite D.



Théorème : $P \perp P'$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n'}$.

D) La sphère :

a) $S_{(I,R)} = \{M \in \mathscr{E} \ \ telque \ : IM = R\}$ $\quad S_{[AB]} = \{M \in \mathscr{E} \ \ telque \ \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$

b) Théorème 1: Soit la sphère S de centre I (a, b, c) et de rayon R

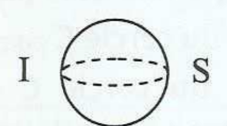
Une équation cartésienne de S est : $S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Théorème2 : Soit l'ensemble $E = \{M(x, y, z) \ \ telque \ : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0\}$.

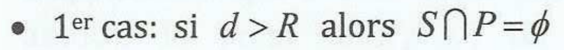
On pose : $h = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$.

- Si $h > 0$ alors $E = S_{(I,R)}$ avec $I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$, $R = \sqrt{h}$.
- Si h = 0 alors $E = \{I\}$
- Si $h < 0$ alors $E = \phi$

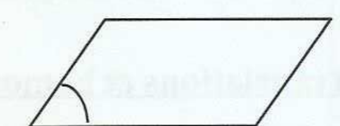
c) Position relative d'une sphère et d'un plan.

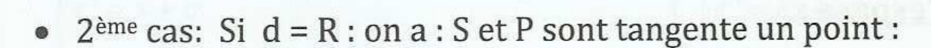


Soit la sphère $S_{(I,R)}$ et P un plan. On pose $d = d(I, P)$.



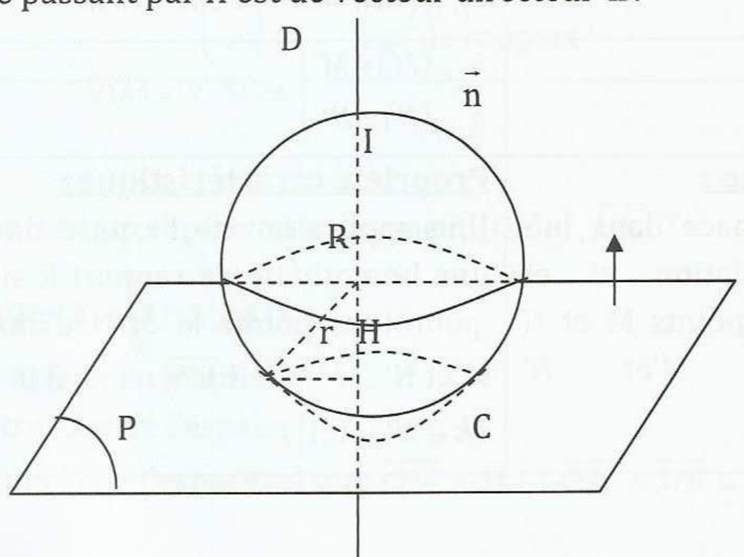
- 1er cas: si $d > R$ alors $S \cap P = \phi$





- 2ème cas: Si d = R : on a : S et P sont tangente un point :
- 3ème cas: Si d < R alors S et P sont sécante selon un cercle C. de centre H et de rayon r avec $\{H\} = D \cap P$ et $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

avec D est la droite passant par H est de vecteur directeur $\vec{n}$.



Exemples d'ensembles des points :

1) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ signifie M appartient à la droite passant par A et tel que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur

2) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ signifie M appartient au plan passant par A et tel que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal

3) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ signifie M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$.

Notion utiles :

1) Droite et plan perpendiculaires :

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

2) Plans perpendiculaires :

Deux plans de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

3) Plan médiateur d'un segment :

Soient A et B deux points distincts de E.

- Le plan médiateur du segment [AB] est l'ensemble des points M de E tel que MA =MB.
- Le plan médiateur du segment [AB] est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu I de [AB].

4) Axe d'un cercle :

Soient A, B et C trois points non alignés de E.

- L'axe du cercle $C_{(ABC)}$ est l'ensemble des points M de E tels que : MA = MB = MC .
- L'axe du cercle $C_{(ABC)}$ de la droite passant par le centre O du cercle $C_{(ABC)}$ et perpendiculaire au plan (ABC).

Translations et homothéties de l'espace :

$\vec{u}$ vecteur donné, I un point donné et **k un réel non nul .**

Translation	***Homothétie***
$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'}$	$h_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$
$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(M) = M' \\ t_{\vec{u}}(N) = N' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$	$\left.\begin{array}{l} h_{(I,k)}(M) = M' \\ h_{(I,k)}(N) = N' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
Propriété caractéristique : Une application de l'espace dans lui-même est une translation si et seulement si ,pour tous points M et N d'images respectives M'et N' ,$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$	**Propriété caractéristique :** Une application de l'espace dans lui-même est une homothétie de rapport k si et seulement si ,pour tous points M et N d'images respectives M'et N' ,$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ $(k \in IR \setminus \{0,1\})$

<table>
<tr><td>Toute translation conserve:
- distance
- le produit scalaire
- milieu
- parallélisme
- l'orthogonalité
- Le contact</td><td>Toute homothétie conserve:
- milieu
- parallélisme
- l'orthogonalité
- Le contact</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'image d'une droite par une translation ou par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'image d'un plan par une translation ou par une homothétie est un plan qui lui parallèle.</td></tr>
<tr><td>L'image d'une sphère de centre W par une translation $t_{\vec{u}}$ est une sphère de centre W'=$t_{\vec{u}}$ (W) et de même rayon.</td><td>L'image d'une sphère de centre Wet de rayon R par une homothétie de rapport k est une sphère de centre W'=h(W) et de rayon $|k|R$</td></tr>
<tr><td>Expression analytique de $t_{\vec{u}}$:
$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, M(x,y,z), M'(x',y',z')$
$t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$</td><td>Expression analytique de $h_{(I,K)}$:
Avec $I(x_1,y_1,z_1)$
$h_{(I,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}x'-x_1=k(x-x_1)\\y'-y_1=k(y-y_1)\\z'-z_1=k(z-z_1)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>L'application qui à tout point M(x,y,z) associé le point M'(x',y',z') tel que
$\begin{cases}x'=x+\alpha\\y'=y+\beta\\z'=z+\gamma\end{cases}$
est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$</td><td>L'application qui à tout point M(x,y,z) associé le point M'(x',y',z') tel que
$\begin{cases}x'=kx+\alpha\\y'=ky+\beta\\z'=kz+\gamma\end{cases}$ avec $k\neq 0$ et $k\neq 1$
est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k},\frac{\beta}{1-k},\frac{\gamma}{1-k}\right)$
et de rapport k</td></tr>
</table>

II) Exercices

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé R $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



1 QCM ; VRAI OU FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) Soit OABC un tétraèdre de l'espace

L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}\wedge\overrightarrow{MC}$ est une droite

2) $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires on a :

a) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v}) = -2\vec{u}\wedge\vec{v}$

b) $(\vec{v}, -\vec{u}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe

c) si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{w}\wedge\vec{u} = \vec{v}$



2 APPLIQUER

On donne les points A(3,1,-2) B(-2, -3, -1) et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ $\vec{v} = 4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

On considère les droites D(A, $\vec{u}$) D'(B, $\vec{v}$)

1) Déterminer une représentation paramétrique pour D et D'.

2) Etudier la position relative de D et D'.

3) Soit le point A(1, -1, 3), écrire une équation cartésienne du plan P passant par A et parallèle à D et D'.

4) Soit le plan Q d'équation : x – y + z + 2 = 0 .Montrer que les plans P et Q sont sécantes selon une droite dont on déterminera une équation cartésienne.



3 APPLIQUER

A tout réel m on associe l'ensemble P_m : m x + (2m –1)y + (m + 1)z – 2m + 1 = 0

1) Montrer que pour tout m ∈ IR, P_m est un plan.

2) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ dont on déterminera une équation paramétrique.



4 APPLIQUER

Soit le plan $P_m : mx+(2m-1)y+(m+1)z-2m+1=0$ est la droite $D : \begin{cases} x = 3+2\alpha \\ y = 1+3\alpha \\ 3 = -2+5\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Etudier suivant les valeurs du réel m, la position relative de D et P_m.



5 APPLIQUER

On considère l'ensemble S des points M (x, y, z) tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ et le plan P_m : 2 x + y + 2z + m = 0 (m ∈ IR)

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

2) Soit le point A(0, -1, $\sqrt{8}$)

Vérifier que A ∈ S et déterminer une équation cartésienne du plan Q tangente à S en A.

3) Discuter suivant m l'intersection de S et P_m.

4) Vérifier que P_8 coupe S selon un cercle C dont on déterminera le centre H et le rayon r.

5) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le plan P_m coupe S selon un cercle de rayon $\sqrt{2}$.

6 APPLIQUER

On considère les points A(2,0, - 1) , B(0,0, - 1) ; l'ensemble S des points M (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ et le plan P : $x + z - 1 = 0$.

1) a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que A et B sont diamétralement opposés sur S
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangente à S en A.

2) Vérifier que P coupe S selon un cercle C dont on déterminera le centre H et le rayon r.

3) On considère le point $M(1+\cos^2\alpha,\ \sqrt{2}\ \cos\alpha\sin\alpha\ ,\ -\cos^2\alpha)\quad(\alpha\in IR)$
   a) Monter que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ que peut- on déduire ?
   b) Montrer que $M \in C$.
   c) Déterminer les réels α pour que OM soit maximale.



7 APPLIQUER

Soients A (-2, 1, -3) et B (0, 3, -5)

1) Monter que l'ensemble $S = \{M \in \xi$ tel que $\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{BM} = 1\}$ est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

2) Soit P le plan d'équation $x - y - z + 1 = 0$. Montrer que P et S se coupent suivant un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

3) A tout réel m on associe l'ensemble S_m d'équation cartésienne :
   $x^2 + y^2 + z^2 + (2+m)\,x - (4+m)\,y + (8-m)\,z + 17 + m = 0$.
   a) Montrer que pour tout $m \in IR$, S_m est une sphère dont on déterminera le centre I_m et le rayon R_m.
   b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.
   c) Montrer que les sphères S_m passent par un cercle fixe que l'on déterminera.

8 S'ENTRAINER

$R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + \frac{9}{2} = 0$

Soit le plan P_1 d'équation cartésienne : $x + y - z = 0$

1) a) Montrer que S est une sphère dont ont précisera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que $S \cap P_1$ est un cercle C dont on précisera le rayon r et les coordonnées de son centre H.

2) On considère les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$
   a) Montrer que le repère R' $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de P_1 .

b) Soit M un point de P_1 de coordonnées (x, y, z) relativement au repère R. En désignant par (X, Y) les coordonnés du point M dans le repère R'. Calculer X et Y en fonction de x et y.

c) Déterminer alors une équation cartésienne du cercle C selon le repère R'.

9 S'ENTRAINER

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

On donne les points $A(-1,-1,4)$, B(2,02), C(1,-4,-1) et J (2,0,5) et soit P le plan (ABC)

On considère l'ensemble S : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+12=0$

1) Montrer qu'une équation du plan P est x-y+z - 4 = 0

2) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

3) Soit le point $N(m+1,0,2m+4)$ et $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

Soit D_m la droite passant par N et tel que $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

a) Montrer que la distance $d(H,D_m)=\dfrac{\sqrt{14m^2+8m+5}}{\sqrt{6}}$

b) Déterminer les valeurs de m pour les quels la droite D_m est tangente à la sphère S.

4) a) Déterminer la valeur de m pour la quelle les points A,B,C et N soient coplanaires.

b) Existe-t-il m pour que le volume du tétraèdre ABCN soit égal à 11 ?



10 S'ENTRAINER

ABCDEFGH un cube de coté 1

L'espace ξ est orienté par le repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

$I=E*F$ K : centre du carré ADHE

1) a) Vérifier que : $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

b) En déduire l'aire du triangle IGA

c) Calculer le volume du tétraèdre ABIG

d) En déduire la distance du point B au plan AIG .

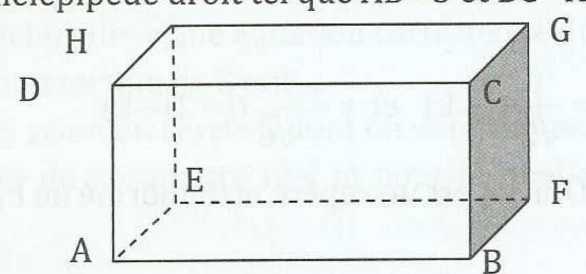
2) a) Déterminer une représentation paramétrique de (EC).

b) Déterminer les points de (EC) qui sont équidistant à (FB) et (HG)



11 S'ENTRAINER

ABCDEFGH est un parallélépipède droit tel que AB= 3 et BC= AE =2



Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$ et tel que h(B) =A

1) Déterminer le centre I de h et placer I.
2) La droite (IC) coupe (AD) en C' montrer que h(C) =C'
3) Soit E'=h(E) , H'=h(H)

Déterminer le volume de la pyramide IBCHE et en déduire le volume de la pyramide IAC'E'H'



S'ENTRAINER

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans :

P : 2x – y +z+ 2 = 0 , Q : x – y + 2z + 1 = 0 et le point I(2, , 7,2)

Soit h l'homothétie de l'espace de centre I et de rapport 4

1) Démontrer que P et Q sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur intersection D.
2) Déterminer l'expression analytique de h
3) Soit D' =h(D) Déterminer une équation paramétrique de D'.
4) On se propose de déterminer une équation paramétrique de D' en utilisant une autre méthode
   a) Montrer que h(Q) =Q
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P' =h(P)
   c) Retrouver une équation paramétrique de D'



S'ENTRAINER

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f qui à tout point M(x,y,z) associé le point M'(x',y',z') tel que $\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 1 \\ z' = 2z + 3 \end{cases}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Soit S la sphère de centre A(1,1,1) et de rayon R =3 soit S' =f(S)
   a) Déterminer le volume de S'
   b) Déterminer une équation cartésienne de S'

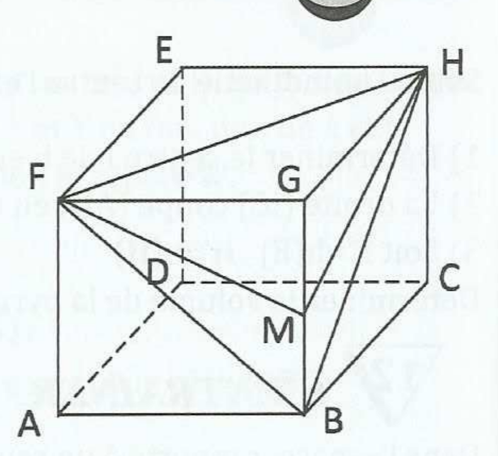


S'ENTRAINER

On considère les plans $P: 2x - y + \frac{1}{2}z + 3 = 0$ et $Q: 4x - 2y + z + 3 = 0$.

Déterminer une translation qui transforme P en Q.





On considère un cube ABCDEFGH d'arrête a

On considère le repère R $\left(A,\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$

1) Quelle est la nature du repère R.

2) Soit M le milieu de [CG] Calculer en fonction de a le volume de tétraèdre FC HM

3) Soit h l'homothétie de centre H et de rapport $k=-2$,

F' = h(F) et C'= h(C) Le plan P passant par F' et parallèle à (FGC) coupe (GH) en G'

a) Montrer que G'=h(G) et en déduire M' =h(M)

b) En déduire le volume de tétraèdre HF'C'M' en fonction de a

4) Dans toute la suite de l'exercice on considère a = 1

Soit la sphère S circonscrite au tétraèdre FCGH

a) Montrer qu'une équation cartésienne de S est $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

b) Déterminer l'expression analytique de l'application h^{-1} réciproque de h.

c) En déduire une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre F'C'G'H.



L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(0,1,1)$, $B(1,3,3)$ et $C(-3,-2,1)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure en radian de $\widehat{BAC}$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis donner une équation cartésienne du plan P = (ABC).

c) Déterminer le volume v du tétraèdre OABC.

2) Soit t l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}$

a) Montrer que t est une translation de vecteur $\vec{u}=-\vec{j}+\vec{k}$.

b) Donner les expressions analytiques de t. En déduire les coordonnées du point $A'=t(A)$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de E tel que : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont-on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que $S'=t(S)$ coupe P = (ABC) suivant un cercle (C) dont-on précisera le centre H et le rayon r.



Soit ABCDEFGH un cube d'arête AB = 1 et $I=A*D$.

On muni l'espace du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).

b) Calculer le volume v du tétraèdre BIGE, en déduire le volume v' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\frac{2}{3}$.

2) Soit (S) la sphère de centre E et de rayon 1 et $(S') = t_{\overrightarrow{AC}}(S)$.

a) Montrer que (S) est tangente au plan (BIG) au point $O(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

b) Montrer que (S') coupe (BIG) suivant un cercle (C') dont-on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que (OB) est tangente à (C') en O.

3) Soit Δ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE}$.

Vérifier que G appartient à Δ et que Δ est une droite parallèle à (OB).

18 *S'ENTRAINER*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,3,2)$ $B(1,-1,-2)$ et $C(2,4,1)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

19 *SUR LE CHEMIN DU BAC (Bac 2007.2008 session Principale)*

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3).

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2) a) Soit P le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).

b) Soit K le point définie par : $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J.

Calculer le volume du tétraèdre EIJK.



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-dessous OABC est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA}=5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=10\vec{w}$ et I est le point de coordonnées $(3,3,3)$.

1) Vérifier que plan (ABC) a pour équation $2x+2y+z-10=0$.

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.

a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?

b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
On désigne par S', la sphère image de S par h.

a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

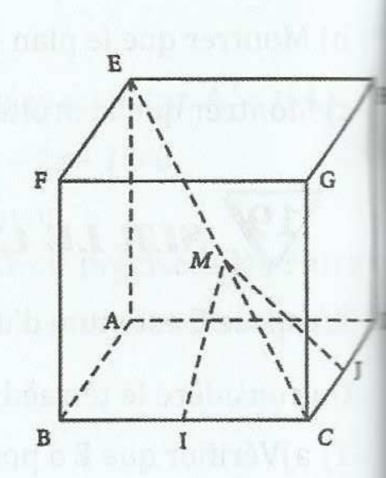
4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.



21 SUR LE CHEMIN DU BAC

La figure ci-dessus représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.

Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.



Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t;1-t;t)$.

2) a) Déterminer une équation cartésienne de plan médiateur du segment $[IJ]$.

b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

c) Exprimer IM^2 en fonction de t.

3) Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.

On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) En déduire que la mesure θ est maximal lorsque la longueur IM est minimale.

c) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.



QCM ; VRAI OU FAUX

1) Vrai En effet :

$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}\wedge\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MO}\wedge\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MO}\wedge2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge4\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

(Avec G est la barycentre des points pondérés : $(A,1),\ (B,1),\ (C,1)$

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MG}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaire

$\Leftrightarrow M\in(OG)$

2) a) Vrai en effet :

$(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{u}-(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{v}$

$=(\vec{u}\wedge\vec{u})+(\vec{v}\wedge\vec{u})-(\vec{u}\wedge\vec{v})-(\vec{v}\wedge\vec{v})$

$=\vec{0}-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{0}$

$=-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{v}$

$=-2(\vec{u}\wedge\vec{v})$

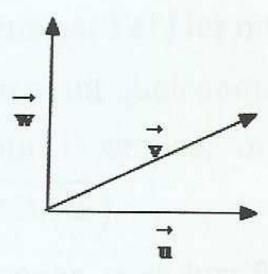
$=-2\vec{u}\wedge\vec{v}$ vrai

b) Vrai en effet

On a $(\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base direct Alors $(\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ est indirect

Alors $(\vec{v},\ -\vec{u},\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ est direct

c) Faux : contre exemple



$\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$

On $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ et $\vec{u}$ n'est pas orthogonale à $\vec{v}\Rightarrow\ \vec{u}\neq\vec{v}\wedge\vec{w}$



APPLIQUER

1) On a : $D:\begin{cases}x=3+2\alpha\\ y=1+3\alpha\\ 3=-2+5\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ et

$D'\begin{cases}x=-2+4t\\ y=-3+3t\\ 3=-1+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'

$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix}=6-12=-6\neq0$ alors $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$ alors D et D' sont $\begin{cases}\textit{sécantes}\\ \textit{ou}\\ \textit{non coplanaires}\end{cases}$

* Cherchons $D\cap D'$? On a : $\begin{cases}3+2\alpha=-2+4t\\ 1+3\alpha=-3+3t\\ -2+5\alpha=-1+t\end{cases}$

On choisit (1) et (2) pour déterminer t et α et on vérifié dans (3)

$\begin{cases}3\times\ 2\alpha-4t=-5\\ 2\times\ 3\alpha-3t=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha-12t=-15\\ 6\alpha-6t=-8\end{cases}$

$(1)-(2)\Rightarrow-6t=-7\Rightarrow t=\frac{7}{6}$

$(1)\Rightarrow\alpha-2t=-\frac{5}{2}\Rightarrow\alpha-\frac{7}{3}=-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\alpha=\frac{7}{3}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{6}$

Vérifiant dans (3) on a :

$-2+5\left(-\frac{1}{6}\right)\neq-1+\frac{7}{6}$ car $-\frac{17}{6}\neq\frac{1}{6}$

D'où $D\cap D'=\emptyset$

Conclusion : D et D' ne sont pas coplanaires

3) On a : $D // P$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \in P$ et $D' // P$ alors $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \in P$ D'où $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de P.

On a $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ $\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 3\\5 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 4\\5 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\18\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}-12\\18\\-6\end{pmatrix}$ alors $-\frac{1}{6}\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

On a : P : ax + by + cz + d = 0

d'où P : 2x - 3y + z + d = 0

On a : A(1, -1, 3) ∈ P ⟺ 2 + 3 + 3 + d = 0

⟺ d = -8 D'où : **P : 2x - 3y + z - 8 = 0**

4) Q : x - y + z + 2 = 0 et P : 2x - 3y + z + d = 0

$\Rightarrow \vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normale à P.

$\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{vmatrix} = (-3)-(-2) = -1 \neq 0$ alors $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires.

D'où : P et Q sont sécants selon la droite $\Delta' : \begin{cases}2x-3y+z-8=0\\x-y+z+2=0\end{cases}$



APPLIQUER

$P_m = \{M(x,y,z)\}$ tels que $mx+(2m-1)y+(m+1)z-2m+1=0$.

1) Si $\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\2m-1=0\\m+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\m=\frac{1}{2}\\m=-1\end{cases}$ impossible

D'où pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a (a, b, c) ≠ (0, 0, 0) d'où P_m est un plan $\forall m \in \mathbb{R}$.

2) Si M(x, y, z) est un point fixe pour P_m

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ M(x,y,z) \in P_m$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ mx+(2m-1)y+(m-1)z-2m+1=0$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ mx+2my-y+mz+z-2m+1=0$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(x+2y+z-2)-y+z+1=0$

$\forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+z-2=0\\-y+z+1=0\end{cases}$

C'est l'équation cartésienne d'une droite Δ.

* On pose : y = α .

$(2) \Rightarrow -\alpha+z+1=0 \Rightarrow z=\alpha-1$

$(1) \Rightarrow x+2\alpha+\alpha-1-2=0 \Rightarrow x=3-3\alpha$

d'où $\Delta : \begin{cases}x=3-3\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha-1\end{cases}$;$\alpha \in \mathbb{R}$

4 APPLIQUER

$P_m : mx+(2m-1)y+(m+1)z-2m+1=0$

$D : \begin{cases}x=3+2\alpha\\y=1+3\alpha\\3=-2+5\alpha\end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{N_m}\begin{pmatrix}m\\2m-1\\m+1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_m et $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

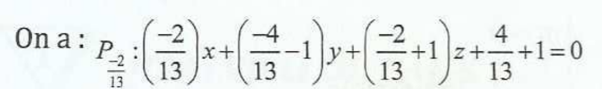
$\vec{U}.\overrightarrow{N_m} = 2m+3(2m-1)+5(m+1) = 13m+2$ D'où

$\vec{u} \perp \overrightarrow{N_m} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{N_m}=0 \Leftrightarrow 13m+2 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{13}$

* Si $m \neq \frac{-2}{13}$

alors $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{N_m}$ alors P_m et D sont sécants.

* Si $m = \frac{-2}{13}$ alors $\vec{u} \perp \overrightarrow{N_{\frac{-2}{13}}}$ alors $D // P_{\frac{-2}{13}}$


On a : $P_{\frac{-2}{13}}:\left(\frac{-2}{13}\right)x+\left(\frac{-4}{13}-1\right)y+\left(\frac{-2}{13}+1\right)z+\frac{4}{13}+1=0$

$\Leftrightarrow -2x-17y+11z+17=0$

On a : $I(3,1,-2)\in D$

et $(-2)\times(3)-17(1)+11\times(-2)+17\neq 0$

alors $I\notin P_{\frac{-2}{13}}$.

On conclut que : D et strictement parallèle à $P_{\frac{-2}{13}}$

5 APPLIQUER

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ et $P_m : 2x + y + 2z + m = 0$ ($m \in IR$)

6) $S:(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=4+9+3=16>0$

S est la sphère de centre $I(2,-3,0)$ et de rayon 4.

7) Soit le point $A(0,-1,\sqrt{8})$

On a :

$0^2+(-1)^2+\sqrt{8}^2-4\times(0)+6(-1)-3=0\Rightarrow A\in S$*

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-\sqrt{8}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

$\Rightarrow Q:2x-2y-\sqrt{8}z+d=0$

$A(0,-1,\sqrt{8})\in Q\Leftrightarrow O+2-8+d=0\Leftrightarrow d=6$

D'où $Q:2x-2y-\sqrt{8}z+6=0$

$\Rightarrow Q:x-y-\sqrt{2}z+3=0$

8) $d(I,P_m)=\dfrac{|4-3+0+m|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{|m+1|}{3}$

$d_m^2-R^2=\dfrac{(m-1)^2}{9}-16=\dfrac{(m-11)(m+13)}{9}$

m	$-\infty$		-13		11		$+\infty$
$d_m^2-R^2$		+	0	−	0	+	
$S\cap P_m$		$\varnothing$	1point	cercle	1point	$\varnothing$	

9) $8\in]-13,11[$ alors P_8 coupe S selon un cercle $\mathscr{C}_{(H,r)}$

* $d_8=3\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d_8^2}$

$=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\Rightarrow r=\sqrt{7}$

$\{H\}=D\cap P_8$ avec D est la droite passant par I et perpendiculaire à P_8

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D alors D :

$\begin{cases}x=2+2\alpha\\y=-3+\alpha\\z=2\alpha\end{cases},\alpha\in\mathbb{R}$

$H\in D\quad\Leftrightarrow H(2+2\alpha,-3+\alpha,2\alpha)\alpha\in\mathbb{R}$

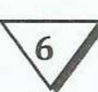
$H\in P_8\Leftrightarrow 2(2+2\alpha)+(-3+\alpha)+2(2\alpha)+8=0$

$\Leftrightarrow\alpha=-1\Leftrightarrow H(0,-4,-2)$

10) Si P_m coupe S selon un cercle de rayon $r=\sqrt{2}$

$\begin{cases}-13<m<11\\R^2=d_m^2+(\sqrt{2})^2\end{cases}\Leftrightarrow 16=\dfrac{(m+1)^2}{9}+2$

$\Leftrightarrow(m+1)^2=9\times14\Leftrightarrow m=3\sqrt{14}-1$ ou $m=-3\sqrt{14}-1$

 APPLIQUER

A (2,0, - 1) , B(0,0, - 1)

$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ et $P: x + z - 1 = 0$.

4) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

$a=-2, b=0, c=2$ et $d=1$

on a : $h=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-d=1+0+1-1=1>0$

D'où S est la sphère de centre I(1,0,- 1) et de rayon $R=\sqrt{h}=1$

b) Il suffit de montrer que $A\in S$ et I = A*B

* On a $2^2+0^2+(-1)^2-2\times2+2\times(-1)+1=4+1-4-2+1=0$ d'où $A\in S$

*On a $\dfrac{x_A+x_B}{2}=1=x_I$,

$\dfrac{y_A+y_B}{2}=0=y_I$ et $\dfrac{z_A+z_B}{2}=-1=z_I$

d' où I = A*B

Conclusion : A et B sont diamétralement opposés sur S

c) Q passe par A et $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est une vecteur normal

d'où Q : x + d = 0

Or $A(2,0,-1)\in Q\Leftrightarrow 2+d=0\Leftrightarrow d=-2$

Conclusion Q : x = 2

5) $d(I,P)=\frac{|1+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<R$ D'où P coupe S selon le cercle C de centre H et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2(I,P)}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$*\{H\}=P\cap D$ où D est la droite passant par I et perpendiculaire à P

On a $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D d'où

$D:\begin{cases}x=1+\alpha\\y=0\\z=-1+\alpha\end{cases}\quad \alpha\in\mathbb{R}$

On a : $H\in D\Leftrightarrow H(1+\alpha,0,-1+\alpha)\quad \alpha\in\mathbb{R}$ On a :

$H\in P\Leftrightarrow(1+\alpha)+(-1+\alpha)-1=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$

D'où $\boxed{H(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2})}$

6) $M(1+\cos^2\alpha,\ \sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha,\ -\cos^2\alpha)$ $(\alpha\in IR)$

a) On a

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-\cos^2\alpha\\-\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha\\-1+\cos^2\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-1-\cos^2\alpha\\-\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha\\-1+\cos^2\alpha\end{pmatrix}$

D'où

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(1-\cos^2\alpha)(-1-\cos^2\alpha)+(-\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha)$

$(-\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha)+(-1+\cos^2\alpha)(-1+\cos^2\alpha)$

$=-1-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1$

$=2\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$

$=2\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)-2\cos^2\alpha=0$

D'où $M\in S$

b) On a $C=P\cap S$ et $M\in S$ d'où pour montrer que $M\in C$ il suffit de montrer que $M\in P$ On a $(1+\cos^2\alpha)+(-\cos^2\alpha)+1=0$ alors $M\in P$

Conclusion $M\in C$.

c) Pour tout $x\in IR$ on a :

$OM^2=\left(1+\cos^2\alpha\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha\right)^2-\left(-\cos^2\alpha\right)^2$

$=1+2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha$

$=1+2\cos^2\alpha+2\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

$=1+2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{1}$

$=1+4\cos^2\alpha$

OM est maximale si $\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow$ d'où $\cos\alpha=1$ ou $\cos\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

4)

7 APPLIQUER

1) $S=\{M\in\zeta$ tel que $\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{BM}=1\}$, A (-2, 1, -3) et B (0, 3, -5).

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-3\\z+5\end{pmatrix}$

On pose $M(x,y,z)$, $M\in S\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{BM}=1$

$\Leftrightarrow x(x+2)+(y-1)(y-3)+(z+3)(z+5)=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y+8z+17=0$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=4$

d'où S est la sphère de centre $I(-1,2,-4)$ et de rayon $R=2$

2) $d(I,P)=\frac{|-1-2+4+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}<R$

D'où P coupe S selon un cercle C de centre H et de rayon r avec :

$*\ r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

$\{H\}=D\cap P$ où D passe par I tel que

$n_p\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

$D\begin{cases}x=-1+\alpha\\y=2-\alpha\quad(\alpha\in IR)\\z=-4-\alpha\end{cases}$

$H\in D\Leftrightarrow H(-1+\alpha,2-\alpha,-4-\alpha)$

$H\in P\Leftrightarrow(-1+\alpha)-(2-\alpha)-(-4-\alpha)+1$

$=0\Leftrightarrow3\alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{2}{3}$

D'où $H\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3},-\frac{10}{3}\right)$

3) $S_m: x^2+y^2+z^2+(2+m)x-(4+m)y+(8-m)z+17+m=0.$

d) $a=2+m,\ b=-(4+m),\ c=8-m,\ d=17+m$

$h=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d=\frac{3}{4}m^2-2m+4>0$

$\forall m\in IR$

(car $\Delta'=-2<0$ et $a=\frac{3}{4}>0$).

D'où $\forall m \in IR$, S_m est la sphère de centre $I_m\left(-1-\frac{1}{2}m,\ 2+\frac{1}{2}m,\ -4+\frac{1}{2}m\right)$ et de rayon $R_m = \sqrt{\frac{3}{4}m^2 - 2m + 4}$.

e) $E=\left\{I_m\left(-1-\frac{1}{2}m,\ 2+\frac{1}{2}m,\ -4+\frac{1}{2}m\right), m\in IR\right\}$

On pose :

$$I_m(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-\frac{1}{2}m \\ y = 2+\frac{1}{2}m, \quad m \in IR \\ z = -4+\frac{1}{2}m \end{cases}$$

C'est l'équation paramétrique d'une droite $\Delta \Rightarrow E=\Delta$

f) $M(x,y,z) \in S_m ; \forall_m \in IR$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+(2+m)x-(4+m)y+(8-m)z+17+m=0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2+2x-4y+8z+17)+m(x-y-z+1)=0$

; $\forall m \in IR$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y+8z+17=0 & (S) \\ x-y-z+1=0 & (P) \end{cases}$$

d'après 2) S coupe P selon le cercle C de centre $H\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3},-\frac{10}{3}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{8}{3}}$ Conclusion :

Les sphères S_m passent par le cercle fixe C.

8 S'ENTRAINER

1) $S: x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\frac{9}{2}=0$

a) $S:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4+1+1-\frac{9}{2}=\frac{12}{2}-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}>0$

$\Rightarrow$ S est la sphère de centre I(2, 1, 1) et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) $d(I,P_1)=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}<\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \left(d^2=\frac{4}{3}, h^2=\frac{3}{2}\right)$

D' ou P_1 coupe S selon un cercle C de centre H et de rayon r

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\{H\}=D'\cap P$

Où D' est la droite passant par I et tel que $n_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'.

On a: $D'\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$

On a : $H\in D \Leftrightarrow H(2+\alpha,1+\alpha,1-\alpha), \alpha \in IR$

On a : $H\in P \Leftrightarrow (2+\alpha)+(1+\alpha)-(1-\alpha)=0$

$\Leftrightarrow 3\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{3}$

D'où: $H\left(2-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3},1+\frac{2}{3}\right)$ conclusion $H\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

2) $R'(O,\vec{u},\vec{v})$

a) On a : $O\in P_1$

* $\vec{u}.\vec{n_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n_1}$ alors $\vec{u}\in P_1$

* $\vec{v}.\vec{n_1}=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}=0 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{n_1}$ alors $\vec{v}\in P_1$

* $\|\vec{U}\|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$

* $\|\vec{V}\|=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1+4+1}=1$;

* $\vec{U}.\vec{V}=\frac{1}{\sqrt{12}}-0-\frac{1}{\sqrt{12}}=0$ alors $\vec{U}\perp\vec{V}$

D'où $R'(O,\vec{U},\vec{V})$ est un repère orthonormé du plan P_1

b) $M(x,y,z)_R$ et $M(X,Y)_{R'}$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=X\vec{U}+Y\vec{V}$

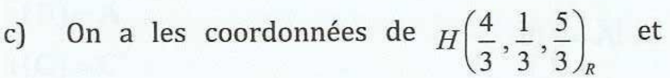
$\Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}+j\vec{k}=\frac{X}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{k})+\frac{Y}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})$

$\Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}+j\vec{k}=(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}})\vec{i}-2\frac{Y}{\sqrt{6}}\vec{j}+(\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{6}})\vec{k}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}} \\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}}Y \\ z=\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

or $x+y=z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}=x \\ -2\frac{Y}{\sqrt{6}}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x\sqrt{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y=-y\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

c) On a les coordonnées de $H\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)_R$ et $r=\frac{1}{\sqrt{6}}$ d'où les coordonnées de H dans R' sont $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

D'où l'équation de C dans R' est $\left(X-3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{1}{6}$



9 S'ENTRAINER

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

On donne les points $A(-1,-1,4)$, $B(2,0,2)$, $C(1,-4,-1)$ et $J(2,0,5)$ et soit P le plan (ABC)

1) On a : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}-11\\11\\-11\end{pmatrix}$ alors $P:-11x+11y-11z+d=0$

$B(2,0,2)\in P\Leftrightarrow -22+0-22+d=0\Leftrightarrow d=44$

$\Leftrightarrow P:-11x+11y-11z+44=0$

$\Leftrightarrow P:x-y+z-4=0$

2) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+12=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-8z+12=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+12=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6$

D'où S est une sphère de centre I (1,1,4) et de rayon $R=\sqrt{6}$

3) $N(m+1,0,2m-4)$

D_m est la droite passant par N et tel que $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

a) $d(H,D_m)=\frac{\left\|\overrightarrow{HN}\wedge\vec{U}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|}$

$=\frac{\sqrt{(-1-2m)^2+(3m)^2+(m+2)^2}}{\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{14m^2+8m+5}}{\sqrt{6}}$

b) D_m est tangente à la sphère S si $d(H,D_m)=R$ si $\frac{\sqrt{14m^2+8m+5}}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$ si

$14m^2+8m+5=36\Rightarrow 14m^2+8m-31=0$

$\Delta'=b'^2-ac=16+14\times31=450\Rightarrow m=\frac{-4-15\sqrt{2}}{14},m=\frac{-4+15\sqrt{2}}{14}$

4) a) A , B C et N sont coplanaires si $N\in P$ Si $(m+1)-0+(2m+4)-4=0$ Si $m=-\frac{1}{3}$

b) V (ABCN) = 11 ?

on a

$V(ABCN)=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AN}\right|$ $\quad\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-11\\11\\-11\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}m+2\\1\\2m\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{6}\left|(-11)(m+2)+11-11\times2m\right|=\frac{1}{6}\left|-11m-22+11-22m\right|=\frac{1}{6}\left|-11-33m\right|=\frac{11}{6}\left|1+3m\right|$

On a : $V(ABCN)=11$ alors $\frac{11}{6}|1+3m|=11$ alors $|1+3m|=6$ Alors $1+3m=6$ ou $1+3m=-6$

$\Rightarrow m=\frac{5}{3}$ ou $m=-\frac{7}{3}$

10 S'ENTRAINER

1) a) $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$?

$B(1,0,0)$, $K\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $G(1,1,1)$, $A(1,0,0)$, $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

$*\ \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $*\ \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$, $*\ \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{IF}\wedge\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BK}$

b) $\text{Aire}(IGA)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right\|==\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

c) $V(IBGA)=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IB}\right|$

On a $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} = -1 \Rightarrow V(IBGA) = \frac{1}{6}$

d) Soit $h = d(B, (IAG))$

On a $V(IBGA) = \frac{1}{3}Aire(IAG).h$

$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times h \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{6}}$

2) a) $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

d'où $(EC): \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

b) $M\in(EC) \Leftrightarrow M(\alpha,\ \alpha,\ 1-\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}$

si $d(M, (FB)) = d(M, (HG)) \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{BM}\wedge\overrightarrow{BF}\|}{\|\overrightarrow{BF}\|} = \frac{\|\overrightarrow{HM}\wedge\overrightarrow{HG}\|}{\|\overrightarrow{HG}\|}$

- $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}\alpha-1\\\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HM}\wedge\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}\alpha\\1-\alpha\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha-1\\-\alpha\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HM}\wedge\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}$

D'où

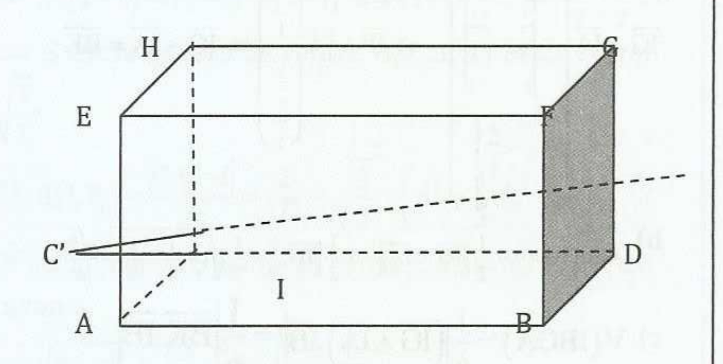
$d(M, (FB)) = d(M, (HG)) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+0}}{1} = \frac{\sqrt{0+\alpha^2+(1-\alpha)^2}}{1}$

Vrai $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

D'où tous les points de (EC) sont équidistants de (FB) et (HG).



11 S'ENTRAINER



$h = h\left(I, \frac{1}{4}\right)$

1) $h(B) = A$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ I est le barycentre des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Dans le plan (ABC) on a $C\in(BC)\cap(IC)$

$\Rightarrow h(C)\in h((BC))\cap h((IC))$

- $h((BC))$ est la droite parallèle à (BC) et passant par $h(B) = A$

$\Rightarrow h((BC)) = (AD)$

- $h((IC)) = (IC)$ car I est le centre h

D'où $h(C)\in(AD)\cap(IC) \Rightarrow h(C)\in\{C'\} \Rightarrow h(C) = C'$

$V(IBCHE)$?

Soit le repère orthonormé direct

$R\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}, \right)$

$V(IBCHE) = V(IBCH) + V(IECH)$

$V(IBCHE) = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{IH}\right| + \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IE}\wedge\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{IH}\right|$

$I(-1, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(3, 2, 0)$, $H(0, 2, 2)$, $E(0, 0, 2)$

On a : $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IC}).\ \overrightarrow{IH} = 16$

$\overrightarrow{IE} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IC} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{IE}\wedge\overrightarrow{IC})\begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IC}).\ \overrightarrow{IH} = -4+16+4 = 16$

D'où $V(IBCHE) = \frac{16}{6}+\frac{16}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

- $h(I) = I$

$h(B)=A$

$h(C)=C'$

$h(H)=H'$

$h(E)=E'$

$$V(IAC'H'E')=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IC'}).\overrightarrow{IH'}\right|+\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IE'}\wedge\overrightarrow{IC'}).\overrightarrow{IH'}\right|$$

$$V(IAC'H'E')=\frac{1}{6}\left|(k\overrightarrow{IB}\wedge k\overrightarrow{IC}).k\overrightarrow{IH}\right|+\frac{1}{6}\left|(k\overrightarrow{IE}\wedge k\overrightarrow{IC}).k\overrightarrow{IH}\right|$$

$$V(IAC'H'E')=\left|k^3\right|\left(\left|(\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{IH}\right|+\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IE}\wedge\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{IH}\right|\right)$$

$$V(IAC'H'E')=\left|k^3\right|V(IBCHE)=\frac{1}{4^3}.\frac{16}{3}=\frac{1}{12}$$

2ème méthode :

$V(IBCHE)=\frac{1}{3}\text{Aire}(BCEH).h$ avec $h=d(I,(BCEH))$



S'ENTRAINER

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vendeur normal à P.

$\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

On a $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$ alors $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires alors P et Q sont sécants selon une droite D.

$$D:\begin{cases}2x-y+z+2=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$$

On pose $Z=\alpha$ $(\alpha\in IR)$ alors

$$\begin{cases}2x-y+\alpha+2=0\\x-y+2\alpha+1=0\end{cases}$$

$L_1-L_2 \Rightarrow x=\alpha-1$

$L_1 \Rightarrow y=2x+\alpha+2=2\alpha-2+\alpha+2=3\alpha$

Alors D : $\begin{cases}x=-1+\alpha\\y=3\alpha\\z=\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

2) L'expression analytique de h est :

$$\begin{cases}x'-2=4(x-2)\\y'-7=4(y-7)\\z'-2=4(z-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=4x-6\\y'=4y-21\\z'=4z-6\end{cases}$$

3) $D'=h(D)$ soit $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ tel que $h(M)=M'$

$M'\in D' \Leftrightarrow M\in D \Leftrightarrow$

$x=-1+\alpha$

$y=3\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$z=\alpha$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x'+6}{4}=-1+\alpha\\\frac{y'+21}{4}=3\alpha\\\frac{z'+6}{4}=\alpha\end{cases},\alpha\in IR$$

$$\Leftrightarrow D':\begin{cases}x'=4\alpha-10\\y'=12\alpha-21\\z'=4\alpha-6\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

2ème méthode :

• On a $D'=h(D)\Rightarrow D'//D$

On a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.

• On a $A(-1,0,0)\in D$ soit $A'=h(D)$

$\Rightarrow A'(-10,-21,-6)$ est un point de D' d'où

$$D':\begin{cases}x=-10+\alpha\\y=-21+3\alpha\\z=-6+\alpha\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

4) a) on a $2-7+2\times2+1=0 \Rightarrow I\in\mathbb{Q}$

alors $h(Q)=Q_3$

b) on a $P'=h(P) \Rightarrow P'\parallel P$

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P alors $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à P'.

d'où $P':2x-y+z+d=0$

• on a :

$B(0,2,0)\in P$ soit $B'=h(B)\Rightarrow B'(-6,-13,-6)$

on a

$B'\in P' \Rightarrow -12+13-6+d=0 \Rightarrow d=5$

D'où $\boxed{P':2x-y+z+5=0}$



2ème méthode :

Soit $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ tel que $h(M)=M'$

On a

$$M'\in P' \Leftrightarrow M\in P \Leftrightarrow 2x-y+z+2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\,\frac{x'+6}{4}-\frac{y'+21}{4}+\frac{z'+6}{4}+2=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x'+6)-(y'+21)+(z'+6)+8=0$$

$$\Leftrightarrow 2x'-y'+z'+5=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P':2x'-y'+z'+5=0}$$

c)

On a $D=P\cap Q \Rightarrow h(D)=h(P)\cap h(Q)$

$\Rightarrow D'=P'\cap Q$

$$\Rightarrow D':\begin{cases}2x-y+z+5=0\\ x-y+2z+1=0\end{cases}$$

On pose $z=\alpha$ où $\alpha\in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-5-\alpha\\ x-y=-1-2\alpha\end{cases}$$

$L_1-L_2 \Rightarrow \boxed{x=-4+\alpha}$

$L_2 \Rightarrow y=x+1+2\alpha=(-4+\alpha)+1+2\alpha=3\alpha-3$

D'où D' : $\begin{cases}x=-4+\alpha\\ y=-3+3\alpha\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}\\ z=\alpha\end{cases}$

13 S'ENTRAINER

1) L'expression analytique de f est de la forme

$$\begin{cases}x'=kx+a\\ y'=ky+b \qquad \text{avec } k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\\ z'=kz+c\end{cases}$$

Alors f est l'homothétie de rapport $k=2$ et de centre le point invariant $I(2,1,-3)$

2) a) On a S' de centre $A'=h(A)$ et de rayon $R'=|k|R=6$

D'où le volume de S' est

$$V'=\frac{4}{3}\pi\;R'^3=\frac{4}{3}\pi\times 6^3=288\pi$$

b) on a $A'=h(A)\Rightarrow A'(0,1,5)$ est le centre de S

d'où $S':x^2+(y-1)^2+(z-5)^2=36$

15 S'ENTRAINER

$P:2x-y+\frac{1}{2}z+3=0$ et $Q:4x-2y+z+3=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1/2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\vec{n}'\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q

On a $\vec{n}'=2\vec{n}$ alors $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont colinéaires alors P//Q

A(-1,1,0) est un point de P et A'(0,1,-1) est un point de Q

La translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme P en Q.

En effet l'image de P par $t_{\overrightarrow{AA'}}$ est le plan parallèle à Q et passant par $t_{\overrightarrow{AA'}}(A)=A'$



15 S'ENTRAINER

1) R est un repère orthonormé direct

2) F (a , 0 , a) , C(a , a , 0) , H(0 , a , a) , M(a , a , $\frac{a}{2}$)

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{FC}\wedge\overrightarrow{FH}\right)\overrightarrow{FM}\right|=\frac{1}{6}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FM}\right)\right|$$

On a $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}o\\a\\-a\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-a\\a\\o\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}0\\a\\-\frac{a}{2}\end{pmatrix}$

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FM}\right)=\begin{vmatrix}0&-a&0\\a&a&a\\-a&0&-\frac{a}{2}\end{vmatrix}$$

$$=o-a\begin{vmatrix}-a&0\\0&-\frac{a}{2}\end{vmatrix}+(-a)\begin{vmatrix}-a&0\\a&a\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{a^3}{2}+a^3=\frac{a^3}{2}$$

D'où $V=\frac{1}{6}\frac{a^3}{2}=\frac{1}{12}a^3$

3) $h=h_{(H,-2)}$ $\quad h(F)=F'$ $\quad h(C)=C'$

a) On a

$G\in(GH)\cap(FGC)$ alors $h(G)\in h((GH))\cap h((FGC))$

* $h((GH))=(GH)$

* $h((FGC))$ est le plan passant par $h(F)=F'$ est parallèle à (FGC) alors $h((FGC))$=P

D'où

$$h(G)\in(GH)\cap P\Rightarrow h(G)\in\{G'\}\Rightarrow h(G)=G'$$

On a M $=G*C$ alors $h(M)=h(G)*h(C)$

alors $M'=G'*C'$

(car h conserve le milieu d'un segment)

b) Volume

$$(HF'C'M')=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{FC'}\wedge\overrightarrow{F'H}\right).\overrightarrow{F'M}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(k\overrightarrow{FC}\wedge k\overrightarrow{FH}\right).\left(k\overrightarrow{FM}\right)\right|$$

$$=|k|^3\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{FC}\wedge\overrightarrow{FH}\right)\cdot\overrightarrow{FM}\right|$$

$$=8V=\frac{2}{3}a^3$$

4) $a=1\Rightarrow F(1,0,1);C(1,1,0);G(1,1,1);H(0,1,1)$

a) $S:x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

On a S est une sphère ou un point ou l'ensemble vide

On a : $1^2+0^2+1^2-1-0=0=0\Rightarrow A\in S$

$1^2+1^2+0^2-1-1-0=0\Rightarrow B\in S$

$1^2+1^2+1^2-1-1-1=0\Rightarrow G\in S$

$0^2+1^2+1^2-0-1-1=0\Rightarrow H\in S$

D'où S est la sphère circonscrite au tétraèdre FCGH

b) $h^{-1}=h_{\left(H,-\frac{1}{2}\right)}$, $H(0,1,1)$

Soit

$M(x',y')z'))$ et $M(x,y,z)$ on a $h^{-1}(M')=M$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(M')=M\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{HM'}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}x'\\ y=-\frac{1}{2}y'+\frac{3}{2}\\ z=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}\end{cases}$$

Soit $S'=h(S)$

On a : S est circonscrite à FCGH, alors S' est circonscrite à $F'C'G'H'$ image de FCGH par h

On a $M'(x',y',z')\in S'\Leftrightarrow M(x,y,z)\in S$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{x'}{2}\right)^2+\left(\frac{3-y'}{2}\right)^2+\left(\frac{3-z'}{2}\right)^2-\left(-\frac{x'}{2}\right)-\left(\frac{3-y'}{2}\right)-\left(\frac{3-z'}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x'^2+(3-y')^2+(3-z')^2+2x'-2(3-y')-2(3-z')=0$$

$$\Leftrightarrow x'^2+y'^2+z'^2+2x'-4y'-4z'+6=0$$

16 S'ENTRAINER

A(0,1,1) , B(1,3,3) et C(−3,−2,1)

1) a)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$AB.AC=-3-6+0=-9$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos\left(B\hat{A}C\right)\Rightarrow\cos\left(B\hat{A}C\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-9}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

alors $B\hat{A}C=\frac{3\pi}{4}$ rad

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale de P $\Rightarrow P:6x-6y+3z+d=0$

Or $A(0,1,1)\in P\Rightarrow-6+3+d=0\Rightarrow d=3$

$\Rightarrow P:2x-2y+z+1=0$

c) $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{6}|0+6-3|=\frac{1}{2}$

2) a)

$\forall M\in\xi,\ t(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AM}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AB}$

D'où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AB}$

b) On a $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ alors

$\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $t(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x\\ y'=y-1\\ z'=z+1\end{cases}$

On a : $A(0,1,1)$ alors $A'(0,1-1,1+1)$ alors $A'(0,0,2)$

3) a) $S: x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$

$S: x^2+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1-7=0$

$S: x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

donc S est la sphère de centre $A(0,1,1)$ et rayon 3

b) S de centre A et de rayon 3 alors S' de centre A' et de rayon 3

$P: 2x-2y+z+1=0$

$$d(A',P)=\frac{|2\times0-2\times0+1\times2+1|}{3}=1<R'$$

donc S' coupe P suivant un cercle ζ

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

$*\{H\}=(AH)\cap P$

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(A'H)$

$$(A'H): \begin{cases} x=2\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=\alpha+2 \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$$

$H\in(A'H) \Leftrightarrow H(2\alpha; -2\alpha; \alpha+2), \alpha\in\mathbb{R}$

$H\in P \Leftrightarrow 4\alpha+4\alpha+\alpha+3=0 \Leftrightarrow 9\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{3}$

Donc $H\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$



17 S'ENTRAINER

1)a) On a $B(1,0,0)$, $I\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

$G(1,1,1)$

On a $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BIG)

$\Rightarrow (BIG): \frac{1}{2}x+y-z+d=0$

$B\in(BIG) \Leftrightarrow \frac{1}{2}+0-0+d=0 \Leftrightarrow d=-\frac{1}{2}$

D'où $(BIG): \frac{1}{2}x+y-z-\frac{1}{2}=0$

$\boxed{(BIG): x+2y-2z-1=0}$

2) $S=S_{(E,1)}$, $S'=t_{\overrightarrow{AC}}(S)$ $E(0,0,1)$

a) $d(E,(BIG))=\dfrac{|0+0-2-1|}{\sqrt{1+4+4}}=1=R$

Alors S est tangente au plan (BIG)

Soit O le point de contact de (BIG) et S

on a $\{O\}=\Delta\cap(BIG)$ avec Δ est la droite passant par E et perpendiculaire à (BIG) on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(BIG) \Rightarrow \vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.

$$\text{On a } \Delta: \begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$$

On a $O\in\Delta \Leftrightarrow O(\alpha,2\alpha,1-2\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}$

On a $O\in(BIG) \Leftrightarrow \alpha+2(2\alpha)-2(1-2\alpha)-1=0$

$\Leftrightarrow 9\alpha-3=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}$

D'où $O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

2ème méthode :

On vérifié que le point $O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ appartient à S et à (BIG)

c) On a S' de centre E'

On a : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(E)=G$ alors S' de centre G et de rayon 1.

On a $G\in(BIG)$ alors S' coupe (BIG) selon le grand cercle $\zeta'(G,1)$.

c) Il suffit de montrer que $O\in\zeta'$ et $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OG}$

* On a $O\in(BIG)$

On a : $GO=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1 \Rightarrow O\in S'$

Alors $O \in (BIG) \cap S'$

Alors $O \in \zeta'$

* On a $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OG}$

D'où (OB) est tangente à ζ'

3) Pour vérifier que $G \in \Delta$ il suffit de montrer que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE}$

On a $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow G \in \Delta$

* On a

$\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} \wedge \left(-\overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{GO}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont colinéaires

Alors M appartient à la droite Δ passant par G parallèle à (OB).

18 S'ENTRAINER

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

on a $\frac{0}{1} \neq \frac{-4}{1}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors A, B et C ne sont pas alignés.

b) on a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\ -4\\ 4\end{pmatrix}$ est un vert en normal à ABC alors $(ABC): 8x - 4y + 4z + c = 0$

$A(1,3,2) \in (ABC)$ alors $8 - 12 + 8 + c = 0$ alors $c = -4$

Alors $(ABC): 8x - 4y + 4z - 4 = 0$

Alors $\boxed{(ABC): 2x - y + z - 1 = 0}$

2) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$

a) $S: (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14$

D'où S est la sphère de centre $I(3,0,1)$ et $R = \sqrt{14}$

b) $d(I,(ABC)) = \frac{|6 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R$

alors (ABC) coupe S selon un cercle Γ

- Soit r le rayon de Γ on a $r = \sqrt{R^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{14 - 6} = \sqrt{8}$
- On a :

$1^2 + 3^2 + 2^2 - 6\times1 - 2\times2 - 4 = 1 + 3 + 4 - 6 - 4 - 4 = 0$ alors

$A \in S$ alors $A \in S \cap (ABC)$ alors $A \in \Gamma$

On a :

$1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 - 6\times1 - 2(-2) - 4 = 1 + 1 + 4 - 6 + 4 - 4 = 0$

alors

$B \in S$ alors $B \in S \cap (ABC)$ alors $B \in \Gamma$

- On a :

$AB = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Conclusion : $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ et $AB = 2r$ alors $[AB]$ est un diamètre Γ.

2ème méthode : On détermine H le centre de Γ et on montre que $A \in \Gamma$ et $H = A * B$

c) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 + (-4) + (4) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ alors $(AB) \perp (AC)$

Conclusion : Dans le plan (ABC)

$[AB]$ est un diamètre de Γ et $(AC)\perp(AB)$ alors (AC) est tangente à Γ en A

3) $h=h(C,3)$ $\quad S'=h(S)$

$\overrightarrow{CJ}=3\overrightarrow{CI}$ or $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}x_J-2\\ y_J-4\\ z_J-1\end{pmatrix}$ et $3\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}3\\ -12\\ 0\end{pmatrix}$

Alors

$x_J=5,\quad y_J=-8$ et $z_J=1 \Rightarrow J(5,-8,1)$

b) On a (ABC) coupe S selon un cercle Γ

Alors $h((ABC))$ coupe $h(S)$ selon le cercle $\Gamma'=h(\Gamma)$

or $h((ABC))=(ABC)$ car (ABC) passe par le centre de h

D'où (ABC) coupe S' selon le cercle $\Gamma'=h(\Gamma)$

c) On a (AC) est tangente à Γ en A

Alors $h((AC))$ est tangente à $h(\Gamma)$ en $h(A)$

Alors (AC) est tangente à Γ' en $E=h(A)$

On a

$\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{CA}$ or $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-2\\ y_E-4\\ z_E-1\end{pmatrix}$ et $3\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$

Alors

$x_E=-1,\ y_E=1$ et $z_E=4 \Rightarrow E(-1,1,4)$

19 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) A(1,0,2) ,B(0,0,1) et C(0,-1,3)

a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

On pose E(x,y,z) alors $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x-1\\ y\\ z-2\end{pmatrix}$

D'où x – 1 = - 1 ,y =2 , z – 2 = 1 d'où x =0 ,y =2 et z = 3 d'où E(0,2,3)

b) $V(ABCE)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}\right|=\frac{AE^2}{6}=1$

2) a) P : x – 2y – z+5 =0

a) Soit R' le rayon de S' alors $R'=|k|R=3\times\sqrt{14}=3\sqrt{14}$

- On a : $J=h(C,3)$ (I)

Alors

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

On a $\vec{n}=-\overrightarrow{AE}$ alors $\vec{n}$ colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ alors P est parallèle à (ABC)

b) On a $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{j}+3\vec{k}$ alors K(0,1,3)

3) a) Soit k le rapport de h on h(C) =E alors $\overrightarrow{EK}=k\,\overrightarrow{EC}$

D'autre part On a :

$2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KE}+(\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ d'où $k=\frac{1}{3}$

b)

- On a l'image de plan (ABC) par h est un plan qui lui est parallèle et passant par h(C)=K

Alors h((ABC)) = P

- On a $A\in(EA)\cap(ABC)\Rightarrow h(A)\in h((EA))\cap h((ABC$

$\Rightarrow h(A)\in(EA)\cap P\Rightarrow h(A)\in\{I\}\Rightarrow h(A)=I$

- $B\in(EB)\cap(ABC)\Rightarrow h(B)\in h((EB))\cap h((ABC))$

$\Rightarrow h(B)\in(EB)\cap P\Rightarrow h(B)\in\{J\}\Rightarrow h(B)=J$

On a Volume $(EIJK)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IE}\right|$

$=\frac{1}{6}\left|(k\overrightarrow{AB}\wedge k\overrightarrow{AC}).(k\overrightarrow{AE})\right|$

$=|k|^3\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE}\right| \quad =\frac{1}{27}V=\frac{1}{27}$

20 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) $A(5,0,0),\ B(0,5,0),\ C(0,0,10)$

Soit Q le plan d'équation $2x+2y+z-10=0$

- On a : $2\times5+2\times0+0-10=0\ \Rightarrow A\in\mathbb{Q}$
- On a : $2\times0+2\times5+0-10=0\Rightarrow B\in\mathbb{Q}$
- On a : $2\times0+2\times0+10-10=0\ \Rightarrow\ C\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} = (ABC) \Rightarrow (ABC): 2x + 2y + z - 10 = 0$

2) a) $d(I,(ABC)) = \dfrac{|6+6+3-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{5}{3} < 3$

alors S et (ABC) sont sécants selon un cercle ζ

b) $(OAB): z = 0$, $(OAC): y = 0$ et $(OBC): x = 0$

on a $d(I, (OAB)) = d(I, (OAC))$

$= d(I,(OBC)) = 3$

alors S est tangente aux plans

(OAB), (OAC) et (OBC)

3) $h = h_{(O,k)}$ $\quad h(S) = S'$

a) $h(OAB) = (OAB)$, $h((OAC))$

$= (OAC)$ et $h((OBC)) = (OBC)$

Car O est le centre de h

On a S est tangente aux plans

(OAB), (OAC) et (OBC)

Comme h conserve le contact alors $h(S)$ est tangente aux plans

$h((OAB))$, $h((OAC))$ et $h((OBC))$

$\Rightarrow S'$ est tangente aux plans

(OAB), (OAC) et (OBC)

b) Soit I' le centre de S' et R' son rayon

- On a

$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = 3\overrightarrow{OI}$ d'ou $I'(3k,3k,3k)$

On a $R' = |k|R = 3|k|$

S' est tangente au plan

$(ABC) \Leftrightarrow d(I',(ABC)) = R'$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6k+6k+3k-10|}{3} = 3|k|$

$\Leftrightarrow |15k - 10| = |9k|$

$\Leftrightarrow 15k - 10 = 9k$ ou $15k - 10 = -9k$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{5}{3}$ ou $k = \dfrac{5}{12}$

4) On a si $k = \dfrac{5}{3}$ ou $k = \dfrac{5}{12}$

La sphère S' est tangente aux quatre faces du tétraèdre OABC

Cherchons pour quelle valeur de k la sphère S' est tangente intérieurement aux quatre faces de tétraèdre OABC

Soit J le point d'intersection de (OI) et (ABC)

On a : $(OI): \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 3\alpha \quad ,\alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3\alpha \end{cases}$

$J \in (OI) \Leftrightarrow J(3\alpha, 3\alpha, 3\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$

$J \in (ABC) \Leftrightarrow 2(3\alpha) + 2(3\alpha) + 3\alpha - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 15\alpha - 10 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{3}$

D'où $J(2,2,2)$

- Si $k = \dfrac{5}{3}$ alors $I'(5,5,5) \Rightarrow I' \notin [OJ]$

Alors la sphère S' n'est pas intérieure au tétraèdre OABC

- Si $k = \dfrac{5}{12}$ alors $I'\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right) \Rightarrow I' \in [OJ]$

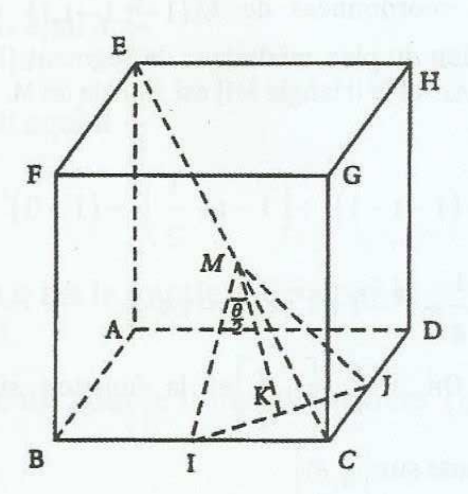
Alors la sphère S' est à intérieure au tétraèdre OABC

Conclusion :

La sphère S' de centre $S'\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right)$ et de rayon

$R' = \dfrac{5}{4}$ est tangente intérieurement au quatre faces de tétraèdre OABC.

21 *SUR LE CHEMIN DU BAC*



1) a) $C(1;1;0); E(0;0;1); I\left(1;\dfrac{1}{2};0\right); J\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$.

b) $M(x,y,z) \in [CE] \Leftrightarrow$ Il existe $t \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$

$\Leftrightarrow$ Il existe $t \in [0,1]$ tel que $\begin{cases} x-1=-t \\ y-1=-t \\ z-0=t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Il existe $t \in [0,1]$ tel que $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Il existe $t \in [0,1]$ tel que $M(1-t,1-t,t)$

2) a) Soit P le plan médiateur de $[IJ]$

Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan médiateur de P

$\Leftrightarrow MI = MJ$ ou $MI^2 = MJ^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2$

$= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + \frac{1}{4} - y + z^2$

$= x^2 + \frac{1}{4} - x + y^2 + 1 - 2y + z^2$

$\Leftrightarrow -x + y = 0$

$\Leftrightarrow y = x$

D'où P : y =x

b) Les coordonnées de $M(1-t,1-t,t)$ vérifient l'équation du plan médiateur de segment [IJ] donc MI = MJ et le triangle MIJ est isocèle en M.

c) On a

$IM^2 = (1-t-1)^2 + \left(1-t-\frac{1}{2}\right)^2 + (t-0)^2$

$= t^2 + \frac{1}{4} + t^2 - t + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$

3) a) On a $\frac{\theta}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Donc la mesure de $\frac{\theta}{2}$ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximale.

Donc la mesure θ est maximale lorsque $\sin\frac{\theta}{2}$ est maximale.

b) Dans le triangle IMJ, soit K le milieu de $[IJ]$. le triangle étant isocèle en M la droite (MK) est médiane et donc aussi hauteur. Le triangle IMK est donc rectangle en K d'où $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{IK}{MI}$.

On a IK est constante alors $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal quand le dénominateur IM est minimal.

c) On a d'après 3/a et 3/b) , θ est maximal quand le dénominateur IM est minimal.

On a d'après 2) C) , $IM^2 = f(t)$

On a

$f(t) = 3\left(t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{12}\right) = 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right]$

$= 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{18}\right].$

La forme canonique du trinôme montre que le minimum de la fonction est obtenu pour $t = \frac{1}{6}$ et que ce minimum est égal à $f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$.

pour $t = \frac{1}{6}$ on a $M\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$

Conclusion : Le maximum de l'angle $\widehat{IMJ}$ est obtenu pour le point $M_0\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$.

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

I) Résumé du cours

A) Diviseurs et multiples d'entiers

1) *Définition* :

Soit a un entier et d un entier non nul.

On dit que d est un diviseur de a ou que a est divisible par d, s'il existe un entier q tel que $a = dq$

***Conséquence* :**

Soit d un entier non nul et a un entier.

- Si d divise a alors $-d$ divise a
- Les multiples de d sont les éléments de l'ensemble $d\mathbb{Z} = \{dq, q \in \mathbb{Z}\}$

2) *Propriétés* :

Soit a et b deux entiers non nuls et c un entier.

- Si a divise b et b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c
- Si a divise b et a divise c, alors a divise $\alpha b + \beta c$ pour tous entiers α et β

B) Division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

1) *Définition :*

Soit a et b deux entiers avec b non nul.

On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante

- Si $b > 0$ alors q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$
- si $b < 0$ alors q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$

***Définition* :**

Soit a et b deux entiers avec b non nul

On appelle reste de a par b l'entier r tel que $r = a - bq$, où q est le quotient de a par b

2) *Théorème* :

Pour tout entier a et pour tout entier b non nul, il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \le r < |b|$

3) *Conséquence* :

Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble $\{0, 1, 2....., |b| - 1\}$

C) Congruence modulo n :

1) *Définition et notation* :

Soit **n un entier naturel non nul** et a et b deux entiers.

On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n) si $a-b$ est un multiple de n. On note alors $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$

2) *Théorème et définition* :

Soit n un entier naturel non nul

Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartenant à $\{0,....,n-1\}$ tel que $a \equiv r(\operatorname{mod} n)$.

On dit que r est le reste modulo n de a.

Conséquence :

Soit n un entier naturel non nul.

Deux entiers sont congrus modulo n, si et seulement si, ils ont le même reste modulo n.

3) *Propriétés* :

Soit a,b et c trois entiers et n un entier naturel non nul.

- $a \equiv a(\operatorname{mod} n)$
- Si $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$ alors $b \equiv a(\operatorname{mod} n)$
- Si $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$ alors $b \equiv c(\operatorname{mod} n)$, alors $a \equiv c(\operatorname{mod} n)$

Propriétés :

Soit a, b, c et d quatre entiers et n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$ et si $c \equiv d(\operatorname{mod} n)$, alors $a+c \equiv b+d(\operatorname{mod} n)$ et $a \times c \equiv b \times d(\operatorname{mod} n)$
- Si $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$ alors $ka \equiv kb(\operatorname{mod} n)$ pour tout entier k.
- Si $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$ et $m \in IN^*$ alors $a^m \equiv b^m(\operatorname{mod} n)$

D) Petit théorème de Fermat

1) *Théorème :*

Soit **p un nombre premier** et a un entier naturel, alors p divise $a^p - a$

C'est-à-dire si p un nombre premier et a un entier naturel alors $a^p \equiv a[p]$

2) *Conséquence :*

p un nombre premier
a un entier naturel tel que a et p soient premiers entre eux } alors p divise $a^{p-1} - 1$

C'est-à-dire :

p un nombre premier
a un entier naturel tel que a et p soient premiers entre eux } alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

II) Exercices



1 QCM ; VRAI OU FAUX

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x(\text{mod}\,2)$.

b) Si $x \equiv 2(\text{mod}\,14)$ alors $x \equiv 1(\text{mod}\,7)$.

c) Si $4x \equiv 10y(\text{mod}\,5)$ alors $x \equiv 0(\text{mod}\,5)$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4(\text{mod}\,5) \\ y \equiv 5(\text{mod}\,8) \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$



2 QCM ; VRAI OU FAUX

Les parties 1) 2) et 3) de cet exercice sont indépendantes.

1) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant la réponse.

a) L'entier $2243^{325} + 1179^{154}$ est divisible par 7

b) Soit a , b et c trois entiers et n entier naturel non nul. Si $ca \equiv cb\,(\text{mod}\,n)$ alors $a \equiv b\,(\text{mod}\,n)$

c) Soit x un entier on a : $x^2 + 4x + 3 \equiv 0(\text{mod}\,7) \Leftrightarrow x \equiv 6(\text{mod}\,7)$ *ou* $x \equiv 4(\text{mod}\,7)$

d) Soit a et b deux entiers tels que : 2a +3b=1 alors a^2 et 4a+3b sont premiers entre eux.

2) En raisonnant modulo 4 montrer que pour tout n ∈ IN l'équation : $x^2 + 9 = 3^{2n+1}$ n'admet pas des solutions dans IN.

3) Démontrer le théorème de cours suivant : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier : Si a $a \wedge b = 1$, $n \equiv 0(\text{mod}\,a)$ et $n \equiv 0(\text{mod}\,b)$ alors $n \equiv 0(\text{mod}\,ab)$



3 APPLIQUER

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a: $N_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13



4 APPLIQUER

Montrer en utilisant les formules de congruence que pour tout entier naturel n non nul $N_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.





1) Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste modulo 13 de de 5^p.

2) En déduire le reste de la division euclidienne $N = 31^{1000} + 5^{502} + 18^{211}$ par 13.



1) Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de 2^k modulo 7.

2) En déduire le reste de la division Euclidienne de 247^{349} par 7



1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste modulo 13 de 3^n.

2) En déduire les entiers naturels n tel que : $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisible par 13.



1) Déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que: $7^p \equiv 1(\bmod 10)$.

2) Trouver le chiffre des unités de $N = 27^{2011^{2012}}$.



1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 5 de 2^n et 3^n.

2) En déduire pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $A = 2582^n + 5568^n$ est divisible par 5



1) Soit $x \in \mathbb{Z}$, montrer que $x^3 \equiv 1(\bmod 9) \Leftrightarrow x \equiv 1(\bmod 3)$

2) En déduire le reste de la division Euclidienne de 245193691242752^{385} par 9



Résoudre dans $\mathbb{Z}$

1) a) $2x \equiv 4[6]$ b) $2x \equiv 5[7]$ c) $2x \equiv 3[7]$ d) $x^2 \equiv -6[7]$

2) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[7]$ 3) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[6]$



12 APPLIQUER

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy \equiv 1[6]$ (En pourra raisonner sur le restes modulo 6 de x et y)

13 S'ENTRAINER

Soit la suite u d'entiers naturels définie par : $u_0 = 14$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 5u_n - 6$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

On peut conjecturer que pour les deux derniers chiffres de U_n .

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$

3) a) En déduire que pour tout p de IN $u_{2p} \equiv 2(\text{mod} 4)$ et $u_{2p+1} \equiv 0(\text{mod} 4)$

b) Montrer par récurrence que pour tout n de IN , $2u_n \equiv 28(\text{mod} 100)$

4) Déterminer les deux derniers chiffres de u_n suivant les valeurs de n

5) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $2U_n = 5^{n+2} + 3$

b) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.



14 S'ENTRAINER

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer le chiffre des unités de 2547^{2547}

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 6x \equiv 2011[7]$

3) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 5 de 2^n et 3^n.

b) En déduire pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $A = 2582^n + 5568^n$ est divisible par 5

15 S'ENTRAINER

1) x et y sont deux entiers relatifs et z un entier naturel non nul

Montrer que si $x \equiv y[z] \Rightarrow x^n \equiv y^n[z]$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

2) Soit n un entier naturel non nul qui n'est multiple de 3 ni multiple de 7

a) montrer que $n^2 \equiv 1[3]$ et $n^6 \equiv 1[7]$ en déduire que $n^{37} \equiv n[3]$ et $n^{37} \equiv n[7]$

b) Démontrer que $\dfrac{10}{21}n^{37} + \dfrac{11}{21}n$ est un entier naturel.



S'ENTRAINER

x et y sont deux entiers relatifs

1) Montrer que $x^2 \equiv 0[8]$ ou $x^2 \equiv 1[8]$ ou $x^2 \equiv 4[8]$.

2) soit z un entier relatif montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 8z^2 + 6$ n'admet pas des couples (x,y) d'entiers relatifs solution.



SE PERFECTIONNER

On se propose d'étudier des couples (a,b) d'entiers strictement positifs, tel que : $a^2 = b^3$

Soit (a,b) un tel couple et d=PGCD(a,b). On note u *et* v les entiers tels que $a = du$ et b=dv .

1) Montrer que $u^2 = dv^3$.

2) En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.

3) Soit (a,b) un couple d'entiers strictement positifs. Montrer que :

$a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4) Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier , alors $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$.



SE PERFECTIONNER

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1) Montrer que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2) On se propose de déterminer des couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a) Déterminer a lorsque $a = b$.

b) Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c) Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3) a) Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x\,;x)$ et $(y\,;y + x)$ sont aussi des solutions.

b) Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4) On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.



SE PERFECTIONNER

a est un entier naturel et $N = a^5 - a$ Montrer que N est divisible par 30.



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) a) Soit n un entier naturel. Déterminer en fonction de n le reste modulo 7 de 2^n et 3^n.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 3^n$ est divisible par 7.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre :

$A = (30)^{2007} + (353)^{2007} + (225)^{2007}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 7$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7 - 11 \times 2^n$

b) En déduire suivant les valeurs de n les restes de la division par 7 du terme général u_n de cette suite.

c) Quel est le reste de la division par 7 de u_{2009}.



QCM ; VRAI OU FAUX

a) vraie b) Faux c) vraie d) Faux

En effet :

1)Un entier et son cube sont de même parité : pour tout entier p

Si $n=2p$ alors $n^3=8p=2(4p)=2p'$

Et si $n=2p+1$

alors $n^3=8p^3+12p^2+6p+1=2p''+1$

2) Contre exemple : $16\equiv 2[14]$ et $16\not\equiv 1[7]$

3) Si $4x\equiv 10y[5]$

alors $4x=10y+5k=5(2y+k)$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $4\wedge 5=1$ donc par le théorème de Gauss, 5 divise x alors $x\equiv 0[5]$.

4) Contre exemple : pour $x=14=4+2\times 5$ et $y=13=5+8$

On a : $8x-5y=4112-65=47$



QCM ; VRAI OU FAUX

1)a) Vrai

*On a : $2243\equiv 3[7]\Rightarrow 2243^{325}\equiv 3^{325}[7]$

On a :

$3^3\equiv -1[7]\Rightarrow (3^3)^{108}\equiv(-1)^{108}[7]\Rightarrow 3^{324}\equiv 1[7]$

$\Rightarrow 3^{325}\equiv 3[7]$

alors $2243^{325}\equiv 3[7]$

*On a : $1179\equiv 3[7]\Rightarrow 1179^{154}\equiv 3^{154}[7]$

Or $3^3\equiv -1[7]\Rightarrow (3^3)^{51}\equiv(-1)^{51}[7]\Rightarrow 3^{153}\equiv -1[7]$

$\Rightarrow 3^{154}\equiv -3[7]$

alors $1179^{154}\equiv -3[7]$

Conclusion : D'où $2243^{325}+1179^{154}\equiv 0[7]$ alors $2243^{325}+1179^{154}$ est divisible par 7

b) Faux

Contre exemple $3\times 4\equiv 3\times 6[6]$ mais $4\equiv 6[6]$ est faux

c) $x^2+4x+3\equiv 0[7]\Leftrightarrow (x+1)(x+3)\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow (x+1)\equiv 0(7)$ ou $x+3\equiv 0[7]$

(car 7 est premier alors d'après la lemme de Gauss 7 divise $x+1$ ou 7 divise $x+3$)

$\Leftrightarrow x\equiv -1(7)$ ou $x\equiv -3[7]$

$\Leftrightarrow x\equiv 6(7)$ ou $x\equiv 4[7]$

Conclusion :

$x^2+4x+3\equiv 0(\text{mod }7)\Leftrightarrow x\equiv 6(\text{mod }7)$ *ou* $x\equiv 4(\text{mod }7)$

d) On a 2a +3b=1

$\Rightarrow(2a+3b)^2=1\Rightarrow 4a^2+12ab+9b^2=1\Rightarrow \underbrace{4}_{\in\mathbb{Z}}a^2+3b\underbrace{(4a+3b)}_{\in\mathbb{Z}}=1$

D'après le théorème de Bézout a^2 et $4a+3b$ sont premiers entre eux.

2)

Reste module 4 de x	0	1	2	3
Reste module 4 de x^2	0	1	0	1
Reste modulo 4 de x^2+9	1	2	1	2

D'où pour tout $x\in\mathbb{Z}$ on a :

$x^2+9\equiv 1[4]$ ou $x^2+9\equiv 2[9]$

D'autre part : on a

$3^2\equiv 1[4]\Rightarrow (3^2)^n\equiv 1[4]\Rightarrow 3^{2n}\equiv 1[4]\Rightarrow 3^{2n+1}\equiv 3[4]$

D'où $x^2+9\equiv 3^{2n+1}$ est impossible.

3)* $n\equiv 0[a]\Rightarrow n=ka, k\in\mathbb{Z}$

* $n\equiv 0[b]\Rightarrow n=k'b, k'\in\mathbb{Z}$

Alors $ka=k'b$

Alors a divise $k'b$ or $a\wedge b=1$ alors d'après la lemme de Gauss a divise k'

Alors $k'=ak'', k''\in\mathbb{Z}$

D'où n= $k'b=ak''b=k''ab\Rightarrow n\equiv 0[ab]$

D'où si ($a\wedge b=1$, $n\equiv 0(\text{mod }a)$ et $n\equiv 0(\text{mod }b)$)

alors $n\equiv 0(\text{mod }ab)$



APPLIQUER

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $N_n=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13

1) Pour n= 1 on a :

$31^{4\times1+1}+18^{4\times1-1}=31^5+18^3=28634983=13\times 2202691$

alors N_1 est divisible par 13

2) Soit $p\in IN^*$, Supposons que N_P est divisible par 13 montrons que N_{P+1} est divisible par 13

On a : $N_{p+1}=31^{4p+5}+18^{4p+3}=31^{4p+1}\times 31^4+18^{4p+3}$

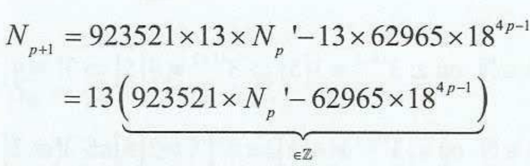
$=\left(N_p-18^{4p-1}\right)\times 31^4+18^{4p+3}$

$=923521N_p-923521\times 18^{4p-1}+18^{4p+3}$

$=923521N_p-\left(923521-18^4\right)18^{4p-1}$

$=923521N_p-13\times 62965\times 18^{4p-1}$

On a N_P est divisible par 13alors il existe $N_P'\in\mathbb{Z}$ tel que $N_P=13N_P'$



$$N_{p+1} = 923521\times 13\times N_p{}' - 13\times 62965\times 18^{4p-1}$$
$$= 13\underbrace{\left(923521\times N_p{}' - 62965\times 18^{4p-1}\right)}_{\in\mathbb{Z}}$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence N_n est divisible par 13



4 APPLIQUER

Soit $n \in IN^*$

On a : $31 \equiv 5[13] \Rightarrow 31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13]$

On a : $18 \equiv 5[13] \Rightarrow 18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}[13]$

Alors $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5^{4n+1} + 5^{4n-1}[13]$

$\equiv (5^2+1)5^{4n-1}[13]$

$\equiv 13\times 2\times 5^{4n-1}[13] \equiv 0[13]$

Alors $N_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13

5 APPLIQUER

1) On a $5^4 \equiv 1[13]$

Pour $p = 4k$ on a :

$5^4 \equiv 1[13] \Rightarrow (5^4)^k \equiv 1^k[13] \Rightarrow 5^{4k} \equiv 1[13] \Rightarrow 5^p \equiv 1[13]$

Pour $p = 4k+1$ on a :

$5^{4k} \equiv 1[13] \Rightarrow 5^{4k+1} \equiv 5[13] \Rightarrow 5^p \equiv 5[13]$

Pour $p = 4k+2$

on a : $5^{4k+1} \equiv 5[13] \Rightarrow 5^{4k+2} \equiv 25[13]$

$\Rightarrow 5^{4k+2} \equiv 12[13] \Rightarrow 5^p \equiv 12[13]$

pour $p = 4k+3$ on a :

$5^{4k+2} \equiv 12[13] \Rightarrow 5^{4k+3} \equiv 60[13] \Rightarrow 5^p \equiv 8[13]$

2) $N = 31^{1000} + 5^{502} + 18^{211}$

* On a : $31 \equiv 5[13] \Rightarrow 31^{1000} \equiv 5^{1000}[13]$

* On a : $18 \equiv 5[13] \Rightarrow 18^{211} \equiv 5^{211}[13]$

Alors $N \equiv 31^{1000} + 5^{502} + 18^{211} \equiv 5^{1000} + 5^{502} + 5^{211}[13]$

On a 1000= 4×250 alors $1000 \equiv 0[4]$ alors $5^{1000} \equiv 1[13]$

On a 502= $4\times 125+2$ alors $502 \equiv 2[4]$ alors $5^{502} \equiv 12[13]$

On a 211= $4\times 52+3$ alors $211 \equiv 3[4]$ alors $5^{211} \equiv 8[13]$

Alors $N \equiv 5^{1000} + 5^{502} + 5^{211} \equiv 1+12+8 \equiv 8[13]$

Alors le reste de la division Euclidienne de N par 13 est 8.

6 APPLIQUER

1) $2^0 \equiv 1[7]$, $2^1 \equiv 2[7]$, $2^2 \equiv 4[7]$, $\boxed{2^3 \equiv 1[7]}$

*Si $n = 3k$, on a $2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1^k[7] \Rightarrow 2^n \equiv 1[7]$

*Si $n = 3k+1$, on a

$2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k+1} \equiv 1\times 2[7] \Rightarrow 2^n \equiv 2[7]$

* Si $n = 3k+2$, on a

$2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k+2} \equiv 1\times 2^2[7] \Rightarrow 2^n \equiv 4[7]$

2) On a : $247 \equiv 2[7] \Rightarrow 247^{349} \equiv 2^{349}[7]$

Or $349 \equiv 1[3]$ alors d'après 1) $2^{349} \equiv 2[7]$ d'où $247^{349} \equiv 2[7]$ d'ou r =2

7 APPLIQUER

1) $3^0 \equiv 1[13]$; $3^1 \equiv 3[13]$; $3^2 \equiv 9[13]$; $3^3 \equiv 1[13]$

Soit $k \in IN$

Si $n = 3k$, on a $3^3 \equiv 1[13] \Rightarrow 3^{3k} \equiv 1[13] \Rightarrow 3^n \equiv 1[13]$

Si $n = 3k+1$, on a

$3^{3k} \equiv 1[13] \Rightarrow 3^{3k}\times 3 \equiv 1\times 3[13]$

$\Rightarrow 3^{3k+1} \equiv 3[13] \Rightarrow 3^n \equiv 3[13]$

Si $n = 3k+2$, on a

$3^{3k} \equiv 1[13] \Rightarrow 3^{3k}\times 3^2 \equiv 1\times 9[13]$

$\Rightarrow 3^{3k+2} \equiv 9[13] \Rightarrow 3^n \equiv 9[13]$

2) Soit $n \in IN$

* **1er cas :** Si $n \equiv 0[3]$ on a d'après 1) $3^n \equiv 1[13]$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 1[13] \Rightarrow 3^{3n} \equiv 1[13]$

D'où $3^n + 3^{2n} + 3^{3n} \equiv 3[13] \Rightarrow 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ n'est pas divisible par 13

* **2ème cas :** Si $n \equiv 1[3]$ on a d'après 1) $3^n \equiv 3[13]$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 9[13] \Rightarrow 3^{3n} \equiv 27[13]$

$\Rightarrow 3^n + 3^{2n} + 3^{3n} \equiv 39[13]$

$\Rightarrow 3^n + 3^{2n} + 3^{3n} \equiv 0[13] \Rightarrow 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ est pas divisible par 13

* **3ème cas :** Si $n \equiv 2[3]$ on a d'après 1)

$3^n \equiv 9[13] \Rightarrow 3^{2n} \equiv 3[13] \Rightarrow 3^{3n} \equiv 1[13]$ alors

$\Rightarrow 3^n + 3^{2n} + 3^{3n} \equiv 13[13]$

$\Rightarrow 3^n+3^{2n}+3^{3n}\equiv 0[13]$ D'ou $3^n+3^{2n}+3^{3n}$ est divisible par 13.

Conclusion : $A_n=3^n+3^{2n}+3^{3n}$ est divisible par 13 si $n\in\{3k+1,3k+2\}$, $k\in\mathbb{N}$

8 APPLIQUER

1)

$7^0\equiv 1[10]$; $7^1\equiv 7[10]$; $7^2\equiv -1[10]$;

$7^3\equiv 3[10]$; $7^4\equiv 1[10]$ d'où p = 4

Conclusion $\boxed{7^4\equiv 1[10]}$

2) Il suffit de chercher le reste modulo 10 de N

* On a : $27\equiv 7[10]\Rightarrow 27^{2011^{2012}}$

$\equiv 7^{2011^{2012}}[10]\Rightarrow N\equiv 7^{2011^{2012}}[10]$

* On a : $2011\equiv(-1)[4]\Rightarrow 2011^{2012}\equiv(-1)^{2012}[4]$

$\Rightarrow 2011^{2012}\equiv 1[4]$

$\Rightarrow 2011^{2012}=1+4k, k\in IN$

D'où $7^{2011^{2012}}=7^{4k+1}$

On a : $7^4\equiv 1[10]\Rightarrow 7^{4k}\equiv 1^{4k}[10]$

$\Rightarrow 7^{4k}\equiv 1[10]\Rightarrow 7^{4k}\times 7\equiv 1\times 7[10]$

$\Rightarrow 7^{4k+1}\equiv 7[10]\Rightarrow N\equiv 7[10]$

Le chiffre des unités de N est 7

9 APPLIQUER

1) On a $2^1\equiv 2[5]$, $2^2\equiv 4[5]$, $2^3\equiv 3[5]$, $2^4\equiv 1[5]$

* Si $n=4k$, $k\in\mathbb{N}$

On a : $2^4\equiv 1[5]\Rightarrow 2^{4k}\equiv 1[5]\Rightarrow 2^n\equiv 1[5]$

*Si $n=4k+1$, $k\in\mathbb{N}$

On a : $2^{4k}\equiv 1[5]\Rightarrow 2^{4k+1}\equiv 2[5]\Rightarrow 2^n\equiv 2[5]$

* Si $n=4k+2$, $k\in\mathbb{N}$

On a : $2^{4k+1}\equiv 2[5]\Rightarrow 2^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 2^n\equiv 4[5]$

*Si $n=4k+3$, $k\in\mathbb{N}$

On a : $2^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 2^{4k+3}\equiv 3[5]\Rightarrow 2^n\equiv 3[5]$

On a :

$3^1\equiv 3[5]$, $3^2\equiv 4[5]$, $3^3\equiv 2[5]$, $3^4\equiv 1[5]$

*Si

$n=4k, k\in\mathbb{N}$, on a: $3^4\equiv 1[5]\Rightarrow 3^{4k}\equiv 1[5]\Rightarrow 3^n\equiv 1[5]$

*Si

$n=4k+1, k\in\mathbb{N}$ on a: $3^{4k}\equiv 1[5]\Rightarrow 3^{4k+1}\equiv 3[5]\Rightarrow 3^n\equiv 3[52]$

*Si

$n=4k+2, k\in\mathbb{N}$ on a: $3^{4k+1}\equiv 3[5]\Rightarrow 3^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 3^n\equiv 4[5]$

*Si

$n=4k+3, k\in\mathbb{N}$ on a: $3^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 3^{4k+3}\equiv 2[5]\Rightarrow 3^n\equiv 2[5]$

2) On a : $2582\equiv 2[5]\Rightarrow 2582^n\equiv 2^n[5]$

On a : $5568\equiv 3[5]\Rightarrow 5568^n\equiv 3^n[5]$

alors $A_n\equiv 2^n+3^n[5]$

le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
2^n	1	2	4	3
3^n	1	3	4	2
2^n+3^n	2	0	3	0

A_n est divisible par 5 si

$n\in\{4k+1,4k+3\}, k\in\mathbb{N}$

10 APPLIQUER

* $x\in\mathbb{Z}$, montrons que $x^3\equiv 1(\text{mod}\,9)$

$\Leftrightarrow x\equiv 1(\text{mod}\,3)$?

Soit r le reste modulo 9 de x et soit r' le reste modulo 9 de x^3

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r'	0	1	8	0	1	8	0	1	8

D'où $x^3\equiv 1(\text{mod}\,9)\Leftrightarrow x\equiv 1(\text{mod}\,9)$ ou x

$\equiv 4(\text{mod}\,9)$ ou $x\equiv 7(\text{mod}\,9)$

$\Leftrightarrow x\equiv 1(\text{mod}\,3)$

* Le reste de la division Euclidienne de 145193691242752^{385} par 9 ?

On pose b = 145193691242752 on a $b\equiv 1[3]$

d'après 1) on a alors $b^3\equiv 1[9]$

Alors $(b^3)^{128}\equiv 1^{128}[9]$

alors $b^{384}\equiv 1^{384}[9]\Rightarrow b^{384}\equiv 1[9]$

Conclusion :

On a $\left.\begin{array}{l} b^{384}\equiv 1[9] \\ b\equiv 7[9]\end{array}\right\}$ alors $b^{385}\equiv 7[9]$

Le reste de la division Euclidienne de 245193691242752^{385} par 9 est 7



11 APPLIQUER

1) a) $2x\equiv 4[6]\Leftrightarrow 2x=4+6k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 2+3k,\ k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}} = \{2+3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $2x \equiv 5[7] \Leftrightarrow 2x \equiv 5+7[7]$

$\Leftrightarrow 2x \equiv 12[7] \Leftrightarrow 2(x-6) = 7k$

On a 7 est premier et 7 divise $2(x-6)$ alors 7 divise x - 6 alors x = 6 +7k , $k \in \mathbb{Z}$

Vérification si x =6+7k, $k \in \mathbb{Z}$ alors $x \equiv 6[7] \Rightarrow 2x \equiv 12[7] \Rightarrow 2x \equiv 5[7]$

$S_{\mathbb{Z}} = \{6+7k\}$, $k \in \mathbb{Z}$

2ème méthode :

Le tableau ci dessous est complété par le reste modulo 7

x	0	1	2	3	4	5	6
2x	0	2	4	6	1	3	5

$2x \equiv 5[7] \Leftrightarrow x \equiv 6[7]$

$S_{\mathbb{Z}} = \{6+7k\}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $x^2 \equiv -6[7] \Leftrightarrow x^2 \equiv -6+7[7] \Leftrightarrow x^2$ $\equiv 1[7] \Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv [7] \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[7]$

On 7 est premier d'où (E)

$\Leftrightarrow 7/x+1$ ou $7/x-1 \Leftrightarrow x+1 = 7k$

ou $x-1 = 7k \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -1+$ 7k ou $x = 1+7k \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$S_{\mathbb{Z}} = \{-1+$ 7k , $x = 1+7k \ \ (k \in \mathbb{Z})\}$

2) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[7] \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \equiv 0[7]$

même chose que 1)d)

3) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[6]$ on remarque qu 6 n'est pas premier

Le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 6

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	9	9	4	1
-3x	0	3	0	3	0	3
x^2-3x+2	2	0	0	2	0	0

D'où $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[6] \Leftrightarrow x \equiv 1[6]$

ou $x \equiv 2[6]$ ou $x \equiv 4[6]$ ou $x \equiv 5[6]$

$S_{\mathbb{Z}} = \{1+6k,\ 2+6k, 4+6k, 5+6k,, k \in \mathbb{Z}\}$



12 APPLIQUER

$xy \equiv 1[6]$

On pourra raisonner sur le restes modulo 6 de x et y

Soit r le reste modulo 6 de x et soit r' le reste modulo 6 de y

le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 6 de r r'

r' \ r	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2

$xy \equiv 1[6] \Leftrightarrow x \equiv 1[6]$ *et* $y \equiv 1[6]$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(1+6k, 1+6k')\} \quad k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}$

13 S'ENTRAINER

La suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1) $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.

On peut conjecturer que : les deux derniers chiffres de u_{2k} sont 14 et u_{2k+1} sont 64.

2) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$

Alors $U_{n+2} - U_n = 24U_n + 36 = 4\underbrace{(U_n + 9)}_{\in IN}$

Alors $U_{n+1} \equiv U_n[4]$

3) a)*Montrons par récurrence que pour tout $p \in IN$, $U_{2p} \equiv 2[4]$

On a $U_0 = 14$ alors $U_0 \equiv 2[4]$

Soit $k \in IN$, supposons que $U_{2k} \equiv 2[4]$, montrons que $U_{2k+2} \equiv 2[4]$

On a $U_{2k+2} \equiv U_{2k}[4]$ et $U_{2k} \equiv 2[4] \Rightarrow U_{2k+2} \equiv 2[4]$

D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $p \in IN$, $U_{2p} \equiv 2[4]$

*Montrons par récurrence que pour tout $p \in IN$, $U_{2p+1} \equiv 0[4]$

On a $U_1 = 64$ alors $U_1 \equiv 0[4]$

Soit $k \in IN$, supposons que $U_{2k+1} \equiv 0[4]$, montrons que $U_{2k+3} \equiv 0[4]$

On a $U_{2k+3} \equiv U_{2k+1}[4]$ et $U_{2k+1} \equiv 0[4] \Rightarrow U_{2k+3} \equiv 0[4]$

D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $p \in IN$, $U_{2p+1} \equiv 0[4]$

b) Montrons par récurrence que pour tout n de IN , $2U_n \equiv 28[100]$

* On a $2U_0 \equiv 28 \Rightarrow 2U_0 \equiv 28[100]$

* soit $p \in IN$, Supposons que $2U_p \equiv 28[100]$,

Montrons que $2U_{p+1} \equiv 28[100]$

On a :

$2U_p \equiv 28[100] \Rightarrow 10U_p \equiv 140[100]$

$\Rightarrow 10U_p - 12 \equiv 140 - 12[100]$

$\Rightarrow 2(5U_p - 6) \equiv 128[100] \Rightarrow 2U_{p+1} \equiv 28[100]$

D'après le principe de raisonnement par récurrence que pour tout n de IN , $2U_n \equiv 28[100]$

4) La relation précédente donne $U_n = 14 + 50k, k \in IN$;

alors $U_n \equiv 14[100]$ ou $U_n \equiv 64[100]$

mais comme $U_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$ et

$U_{2k+1} \equiv 0[4]$ et que $64 \equiv 0[4]$

donc lorsque n est pair $U_n \equiv 14[100]$, lorsque n est impair $U_n \equiv 64[100]$.

Si n est pair alors les deux derniers chiffres de U_n sont 14

Si n est impair alors les deux derniers chiffres de U_n sont 64

5) a) Soit a le réel tel que $a = 5a - 6$ alors $a = \dfrac{3}{2}$

On a $\left.\begin{array}{l} U_{n+1} = 5U_n - 6 \\ a = 5a - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{n+1} - a = 5(U_n - a)$

et alors $(U_n - a)$ est une suite géométrique de raison 5

Alors $U_n - a = 5^n (U_0 - a)$

alors $U_n - \dfrac{3}{2} = 5^n \left(14 - \dfrac{3}{2}\right)$

alors $2U_n - 3 = 5^n (28 - 3)$

$\Rightarrow 2U_n - 3 = 5^{n+2} \Rightarrow 2U_n = 5^{n+2} + 3$

2ème méthode : Par récurrence.

b) On a PGCD (14,64) =2 montrons que PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2

Soit d = PGCD (u_{n+1} ; u_n)

On a d divise U_n et U_{n+1} alors d divise $5U_n - U_{n+1} = 6$

Alors $d \in \{1,2,3,6\}$

*Si d=3 alors 3 divise U_n alors 3 divise $2U_n$ alors 3 divise $5^{n+2} + 3$ impossible alors $d \neq 3$

*Si d=6 alors 6 divise U_n alors 6 divise $2U_n$ impossible car 3 ne divise pas $2U_n$ alors $d \neq 6$

* On a d'après 4) U_n et U_{n+1} sont pairs alors $d \neq 1$

Conclusion : d=2

14 S'ENTRAINER

1) On a : $2547 \equiv 7[10] \Rightarrow 2547^{2547} \equiv 7^{2547}[10]$

On a : $7^2 \equiv -1[10] \Rightarrow (7^2)^{1273} \equiv (-1)^{1273}[10]$

$\Rightarrow 7^{2546} \equiv -1[10] \Rightarrow 7^{2547} \equiv -7[10] \Rightarrow 7^{2547} \equiv 3[10]$

Alors $A \equiv 3[10]$ alors le chiffre des unités de A est 3

2) $x^2 + 6x \equiv 2011[7] \Leftrightarrow x^2 + 6x \equiv 2[7]$

car $2011 = 2 + 7 \times 287$

reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
reste modulo 7 de x^2	0	1	4	2	2	4	1
reste modulo 7 de $6x$	0	6	5	4	3	2	1
reste modulo 7 de $x^2 + 6x$	0	0	2	6	5	6	2

D'où $x^2 + 6x \equiv 2011[7] \Leftrightarrow x \equiv 2[7]$ ou $x \equiv 6[7]$

$S_{\mathbb{Z}} = \{2 + 7k, 6 + 7k\}, k \in \mathbb{Z}$

3) a)

- On a $2^1 \equiv 2[5]$, $2^2 \equiv 4[5]$, $2^3 \equiv 3[5]$, $2^4 \equiv 1[5]$

*Si $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ On a : $2^4 \equiv 1[5] \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1[5] \Rightarrow 2^n \equiv 1[5$

*Si $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$ On a :

$2^{4k} \equiv 1[5] \Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 2[5] \Rightarrow 2^n \equiv 2[5]$

* Si n $= 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$ On a :

$2^{4k+1} \equiv 2[5] \Rightarrow 2^{4k+2} \equiv 4[5] \Rightarrow 2^n \equiv 4[5]$

*Si $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ On a :

$2^{4k+2} \equiv 4[5] \Rightarrow 2^{4k+3} \equiv 3[5] \Rightarrow 2^n \equiv 3[5]$

- On a : $3^1 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$, $3^4 \equiv 1[5]$

*Si $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, on a: $3^4 \equiv 1[5] \Rightarrow 3^{4k} \equiv 1[5] \Rightarrow 3^n \equiv 1[5]$

* Si n= 4k +1 , kk $k \in IN$ on a :

$3^{3k} \equiv 1[5] \Rightarrow 3^{3k} \times 3 \equiv 1 \times 3[5]$

$\Rightarrow 3^{3k+1} \equiv 3[5] \Rightarrow 3^n \equiv 3[5]$

*Si

$n=4k+2, k\in\mathbb{N}$ on a: $3^{4k+1}\equiv 3[5]\Rightarrow 3^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 3^n\equiv 4[5]$

*Si

$n=4k+3, k\in\mathbb{N}$ on a: $3^{4k+2}\equiv 4[5]\Rightarrow 3^{4k+3}\equiv 2[5]\Rightarrow 3^n\equiv 2[5]$

b) On a : $2582\equiv 2[5]\Rightarrow 2582^n\equiv 2^n[5]$

On a : $5568\equiv 3[5]\Rightarrow 5568^n\equiv 3^n[5]$

alors $A_n\equiv 2^n+3^n[5]$

le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
2^n	1	2	4	3
3^n	1	3	4	2
2^n+3^n	2	0	3	0

A_n est divisible par 5 si $n\in\{4k+1,4k+3\}, k\in\mathbb{N}$



15 S'ENTRAINER

1) x et y sont deux entiers relatifs et z un entier naturel non nul

Montrons que si

$x\equiv y[z]\Rightarrow x^n\equiv y^n[z]$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

On a : $x\equiv y[z]\Rightarrow x-y$ est un multiple de z

On a

$x^n-y^n=\underbrace{(x-y)}_{\in z\mathbb{Z}}\underbrace{\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+.....+x^1y^{n-2}+y^{n-1}\right)}_{\in\mathbb{Z}}$

Alors x^n-y^n est un multiple de z alors $x^n\equiv y^n[z]$

2) Soit n un entier naturel non nul qui n'est multiple de 3 ni multiple de 7

c)

- On a 3 est premier et n n'est pas multiple d 3 alors 3 et n sont premiers entres eux alors d'après le théorème de Fermat $n^2\equiv 1[3]$
- On a 7 est premier et n n'est pas multiple d 7 alors 7et n sont premiers entres eux alors d'après le théorème de Fermat $n^6\equiv 1[7]$
- On a $n^2\equiv 1[3]\Rightarrow (n^2)^{18}\equiv 1^{18}[3]\Rightarrow n^{36}\equiv 1[3]\Rightarrow n^{37}\equiv n[3]$
- $n^6\equiv 1[7]\Rightarrow (n^6)^6\equiv 1^6[7]\Rightarrow n^{36}\equiv 1[7]\Rightarrow n^{37}\equiv n[7]$

d) Démontrons que $\frac{10}{21}n^{37}+\frac{11}{21}n$ est un entier naturel.

Il suffit de montrer que $10n^{37}+11n\equiv 0[21]$

Pour cela il suffit de montrer que $10n^{37}+11n\equiv 0[3]$ et $10n^{37}+11n\equiv 0[7]$

On a

$n^{37}\equiv n[3]\Rightarrow 10\times n^{37}\equiv 10n[3]\Rightarrow 10n^{37}\equiv 10n-21n[3]\Rightarrow 10n^{37}+11n\equiv 0[3]$

On a

$n^{37}\equiv n[7]\Rightarrow 10\times n^{37}\equiv 10n[7]\Rightarrow 10n^{37}\equiv 10n-21n[3]\Rightarrow 10n^{37}+11n\equiv 0[7]$

Conclusion :

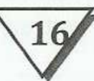
$10n^{37}+11n\equiv 0[3]$

$10n^{37}+11n\equiv 0[7]$

alors $10n^{37}+11n\equiv 0[3\times 7]\Rightarrow 10n^{37}+11n\equiv 0[21]$

$3\wedge 7=1$

Alors 21 divise $10n^{37}+11n$ alors $\frac{10}{21}n^{37}+\frac{11}{21}n$ est un entier naturel.



16 S'ENTRAINER

x et y sont deux entiers relatifs

1) Montrons que $x^2\equiv 0[8]$ ou $x^2\equiv 1[8]$ ou $x^2\equiv 4[8]$?

Le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

D'où $x^2\equiv 0[8]$ ou $x^2\equiv 1[8]$ ou $x^2\equiv 4[8]$

2) Le tableau ci-dessous est compléter par le reste modulo 8 de x^2+y^2

Reste modulo 8 de x^2 / Reste modulo 8 de y^2	0	1	4
0	**0**	**1**	**4**
1	**1**	**2**	**5**
4	**4**	**5**	**0**

D'après le tableau ci-dessus,

$x^2+y^2\equiv 0[8]$ ou $x^2+y^2\equiv 1[8]$ ou $x^2+y^2\equiv 2[8]$ ou $x^2+y^2\equiv 4[8]$ ou $x^2+y^2\equiv 5[8]$

Or $8z^2+6\equiv 6[8]$

D'où $x^2+y^2=8z^2+6$ est impossible.



17 SE PERFECTIONNER

1) Soit (a,b) un tel couple et $d=PGCD(a,b)$. Il existe deux entiers u et v premiers entre eux tels que $a=du$ et $b=dv$.

$a^2=b^3\Rightarrow (du)^2=(dv)^3\Rightarrow d^2u^2=d^3v^3$ et comme $d\neq 0, u^2=dv^3$.

2) On a : $u^2=dv^3$ alors v divise u^2, alors v divise $u\times u$; or v et u sont premiers entre eux, d'après la lemme de Gauss v divise u. D'où PGCD $(u;v)=v$

Or PGCD $(u;v)$ =1 donc $v=1$.

3) Si $a^2 = b^3$ d'après la question précédente $v = 1$ donc $\boxed{b = dv = d}$ et $\boxed{u^2 = dv^3 = d}$

On obtient $a = du = u^2 \times u = u^3$ et $b = d = u^2$ donc a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Réciproquement

Si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier d, alors $a = d^3$ et $b = d^2$ donc $a^2 = (d^3)^2 = d^6$ et $b^3 = (d^2)^3 = d^6$ donc $a^2 = b^3$.

Conclusion : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le club et le carré d'un même entier.

4) Montrons que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$.

S'il existe deux entiers a et b tel que $n = a^2 = b^3$ alors d'après la question précédente il existe un entier d tel que $a = d^3$ et $b = d^2$ donc tel que $n = d^6$.

Reste modulo 7 de d	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de d^6	0	1	1	1	1	1	1

Donc $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$.



18 SE PERFECTIONNER

1) On a

$$(a^2+ab-b^2)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2+ab-b^2 = 1 \text{ ou } a^2+ab-b^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow a\underbrace{(a+b)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{Z}}b = 1 \text{ ou } b\underbrace{(b-a)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(-a)}_{\in\mathbb{Z}} \times a = 1$$

Alors d'après le théorème de Bézout a et b sont premiers entre eux

2) a) $a = b$ alors

$(a^2+ab-b^2)^2 = 1 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a = 1$ (car $a \in \mathbb{Z}_+^*$).

b) On a : $(1^2+1\times1-1^2)^2 = 1$ alors (1,1) est une solution

On a : $(2^2+2\times3-3^2)^2 = 1$ alors (2 ; 3) est une solution

On a : $(5^2+5\times8-8^2)^2 = (25+40-64)^2 = 1$. Alors et (5 ; 8) est une solution de (E)

c) Si (a,b) est solution alors a> et b>0 donc si a < b alors $a^2 < b^2$ alors $a^2 - b^2 < 0$

3) a) Si $(x\,;y)$ est une solution :

$((y-x)^2+(y-x)x-x^2)^2 = (y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2)^2 = (y^2-xy+x^2)^2 = 1$

; alors $(y-x\,;x)$ est une solution

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b) (2 ; 3) est solution donc $(3-2\,;2) = (1\,;2)$ et $(3\,;3+2) = (3\,;5)$

(5 ; 8) est solution donc $(8-5\,;5) = (3\,;5)$ et $(8\,;5+8) = (8\,;13)$

on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4) $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

*On a : (1 ; 1) est solution alors (a_0, a_1) est solution

* Supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors d'après le 3) a) $(y\,;y+x) = (a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1}) = (a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution

D'prés le principe de raisonnement par récurrence la propriété est vraie pour tout n appartient à IN*

D'après la question 1) les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

19 SE PERFECTIONNER

a est un entier naturel et $N = a^5 - a$ Montrer que N est divisible par 30.

* 5 est premier alors d'après le théorème de Fermat $a^5 \equiv a[5]$ alors $a^5 - a \equiv 0[5]$ alors N est divisible par 5.

* $N = a^5 - a = a(a^4-1) = a(a^2-1)(a^2+1) = (a^3-a)(a^2-1)$

3 est premier alors d'après le théorème de Fermat $a^3 \equiv a[3]$ alors $a^3 - a \equiv 0[3]$ alors N est divisible par 3

* $N = a^5 - a = a(a^4-1) = a(a^2-1)(a^2+1)$

$= a(a-1)(a+1)(a^2+1) = (a^2-a)(a+1)(a^2-1)$

2 est premier alors d'après le théorème de Fermat $a^2 \equiv a[2]$

alors $a^2 - a \equiv 0[2]$ alors N est divisible par 2

Conclusion :

N est divisible par 2, 3et 5 alors N est divisible par $2\times3\times5 = 30$ alors N est divisible par 30.



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) a) Reste modulo 7 de 2^n

on a : $2^1 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]; 2^3 \equiv 1[7]$

*si $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, on a :

$2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow (2^3)^k \equiv 1^k[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7]$

$\Rightarrow 2^n \equiv 1[7]$

* si $n = 3k+1$, on a :

$2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k+1} \equiv 2^{3k+1} \equiv 2[7] \Rightarrow 2^n \equiv 2[7]$

* si n $=3k+2$, on a :

$2^{3k+1}\equiv 2[7]\Rightarrow 2^{3k+2}\equiv 4[7]\Rightarrow 2^n\equiv 4[7]$

Reste modulo 7 de 3^n

On a $3^6\equiv 1[7]$ soit $k\in\mathbb{N}$

Si $n=6k\Rightarrow 3^{6k}\equiv 1[7]\Rightarrow 3^n\equiv 1[7]$

Si $n=6k+1\Rightarrow 3^n\equiv 3[7]$

Si $n=6k+2\Rightarrow 3^n\equiv 2[7]$

Si $n=6k+3\Rightarrow 3^n\equiv 6[7]$

Si $n=6k+4\Rightarrow 3^n\equiv 4[7]$

Si $n=6k+5\Rightarrow 3^n\equiv 5[7]$

b) Soit r le reste de 2modulo 7, r' celui de 3^n modulo 7 et r'' celui de 2^n+3^n modulo 7

	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
r	1	2	4	1	2	4	$k\in\mathbb{N}$
r'	1	3	2	6	4	5	
r''	2	5	6	0	6	2	

D'où 2^n+3^n est divisible par 7 si $n=3+6k, k\in\mathbb{N}$

c) $A=(30)^{2007}+(353)^{2007}+(225)^{2007}$

On a : $30\equiv 2[7]\Rightarrow 30^{2007}\equiv 2^{2007}[7]$

$353\equiv 3[7]\Rightarrow 353^{2007}\equiv 3^{2007}[7]$

$225\equiv 1[7]\Rightarrow 225^{2007}\equiv 1[7]$

D'où $A\equiv 2^{2007}+3^{2007}+1[7]$

On a : $2007=6\times 334+3$

Alors d'après 1)b),

on a :

$2^{2007}+3^{2007}\equiv 0[7]\Rightarrow 2^{2007}+3^{2007}+1\equiv 1[7]$

$\Rightarrow A\equiv 1[7]$ donc $x=1$

2) On a :

$$\begin{cases} u_0=-4 \\ u_{n+1}=2u_n-7 \end{cases}$$

a) $7-11\times 2^0=7-11=-4=u_0$

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n=7-11\times 2^n$, montrons que $u_{n+1}=7-11\times 2^{n+1}$

On a : $u_{n+1}=2u_n-7=2\left(7-11\times 2^n\right)-7=7-11\times 2^{n+1}$

Donc d'après le principe de raisonnement par récurrence $u_n=7-11\times 2^n$

b) On a

$7-11\times 2^n\equiv -11\times 2^n[7]\Rightarrow 7-11\times 2^n\equiv 3\times 2^n[7]\Rightarrow u_n\equiv 3\times 2^n[7]$

* Si $n=3k$, on a

$2^n\equiv 1[7]\Rightarrow 3\times 2^n\equiv 3[7]\Rightarrow u_n\equiv 3[7]$

* Si $n=3k+1$, on a

$2^n\equiv 2[7]\Rightarrow 3\times 2^n\equiv 6[7]\Rightarrow u_n\equiv 6[7]$

* Si $n=3k+2$, on a

$2^n\equiv 4[7]\Rightarrow 3\times 2^n\equiv 5[7]\Rightarrow u_n\equiv 5[7]$

c) on a : $2009=3k+2$ avec $k=669$ alors d'après 2)b), on a : $u_{2009}\equiv 5[7]\Rightarrow r=5$

Identité de Bézout

I) Résumé du cours

A) PGCD de deux entiers :

1) Théorème et définition :

Si a et b sont deux entier non nuls, alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes:

1) d divise a et d divise b,

2) Si un entier k divise a et b alors il divise d.

L'entier d définie plus haut est noté $a \wedge b$ et appelé le plus grand commun diviseur de a et b.

2) Propriétés:

Soit a, b, k des entiers non nuls

1) $a \wedge b > 0$

2) $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

3) Si b divise a alors $a \wedge b = |b|$

4) Si $a = bq + r$ alors $a \wedge b = b \wedge r$

5) $a \wedge b = b \wedge a$

6) $(ka) \wedge (kb) = |k| .a \wedge b$

7) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

B) Entiers premiers :

1) Définition:

Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux , si $a \wedge b = 1$

2) Théorème :

Soit a et b deux entiers non nuls alors il existe un unique couple d'entiers (a',b') tel que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$

Lemme de Gauss:

Soit a,b et c trois entiers non nuls

Si a divise bc et $a \wedge b = 1$ alors a divise c.

3) Conséquence :

si a divise bc et a est premier alors a divise b ou a divise c.

C) PPCM de deux entiers:

1) Définition:

a et b deux entiers non nuls il existe un unique entier m strictement positif qui vérifie:

- m est un multiple de a et b.
- Tout multiple commun de a et b est un multiple de m.

L'entier m ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b on note PPCM (a, b) ou $a \vee b$.

2) <u>Conséquences</u> :

Soit a, b, k des entiers non nuls

1) $a \vee b = |a| \vee |b|$

2) $(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|$ En particulier si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee b = a \times b$

3) Si b divise a alors $a \vee b = |a|$

4) $(ka) \vee (kb) = |k| \times (a \vee b)$

5) $a \vee b = b \vee a$

6) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

3) <u>Inverse modulo b:</u>

<u>Théorème et définition :</u>

a et b deux entiers non nuls premiers entre eux tel que $b \geq 2$ alors il existe un seul entier $u \in \{0, 1, ..., b-1\}$ tel que $a \times u \equiv 1[b]$, on dit que u est l'inverse de a modulo b.

<u>Exemple</u>: $5 \times 2 \equiv 1[3]$ donc 2 est l'inverse de 5 modulo 3.

D) Identité de Bézout:

1) <u>Théorème de Bézout:</u>

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls

a et b sont premiers entres eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tel que $au + bv = 1$.

<u>Exemple :</u> n et n + 1 sont ils premiers entre eux?

$1 \times (n+1) - 1 \times n = 1$ donc n et n + 1 sont premiers entre eux.

<u>Remarque</u> : a = 3 et b = 2.

$a \wedge b = 1$

$1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$ c'est-à-dire u = 1 et v = -1

$3 \times 3 + 2 \times (-4) = 1$ c'est-à-dire u = 3 et v = - 4

Donc il n'ya pas unicité de couple (u, v).

2) <u>Corollaire Identité de Bézout:</u>

a et b deux entiers non nuls.

Si $d = PGCD(a, b)$ alors il existe des entiers u et v tels que $au + bv = d$

E) Exemples d'équations de la forme $ax + by = c$ *; a, b et c entiers*

<u>Théorème:</u>

a, b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si d divise c.

Comment résoudre l'équation diophantienne (E) de la forme $ax + by = c$?

* On cherche une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
* On écrit l'équation : $ax + by = ax_0 + by_0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

* On résoudre cette dernière. En utilisant le la lemme de Gauss.

II)Exercices



QCM ; VRAI OU FAUX

Répondre par vraie ou faux en justifiant :

1) Soit x et y entiers deux entiers tels que $10x \equiv 10y \pmod 6$ alors : $x \equiv y \pmod 3$
2) L'équation (E) : $65x - 40y = 2011$ n'a pas des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3) Soit a,b et c trois entiers non nuls
   a) $(abc) \wedge (a^2c^2) = ac(b \wedge ac)$
   b) Sil existe deux entiers u et v tel que $au + bv = 2$ alors $a \wedge b = 2$
   c) Si a et b sont premiers entre eux alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux
   d) Le système $\begin{cases} a \wedge b = 15 \\ a \vee b = 60 \end{cases}$ admet dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ trois solutions.



QCM ; VRAI OU FAUX (Bac session de juin 2010)

Répondre par «Vrai » ou « Faux ».

1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4.
2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.
3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.
4) $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod 8$.
5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.
6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$



QCM ; VRAI OU FAUX

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse

1) a= 2504 b= -214
   Le quotient de la division euclidienne de a par b est égal à -12

2) Pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)^2 \vee n = n^3 + 2n^2 + n$.

3) Pour tout entier n, $(n \equiv 1 (\text{mod} 6)$ ou $n \equiv 4 (\text{mod} 6))$ équivaut à $n \equiv 1 (\text{mod} 3)$.

4) si $\begin{cases} 8a \equiv 22 (\text{mod} 7) \\ 5a \equiv 16 (\text{mod} 11) \end{cases}$ alors $a-1$ est divisible par 77



APPLIQUER

1) Déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de 24455 par -234.
2) Déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de - 245875 par 146.
3) Déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de - 42445 par -124.



APPLIQUER

1) a)Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009 par 11

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11

2) Soit $p \in \mathbb{N}$,on considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

On note $d_n = A_n \wedge A_{n+1}$

a) Montrer que d_n divise 2^n

b) Déterminer la parité A_n de en fonction de celle de p.

c) Déterminer la parité d_n de en fonction de celle de p.

d) En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.



APPLIQUER

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par *n* + 3.

b) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2) Montrer que, pour tous entiers naturels non nuls *a*, *b* et *c* on a:PGCD(*a* ; *b*)=PGCD(*bc*–*a* ; *b*).

3) En déduire que pour tout entier naturel *n*, supérieur ou égal à 2.

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3).$$

4) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels *n* tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.



APPLIQUER

Soit $A = 3n + 1$; $B = 5n - 1$ avec n étant un entier non nul

1) Déterminer les valeurs possibles de $A \wedge B$.

2) Déterminer les entiers n tel que : $A \wedge B = 8$



8 APPLIQUER

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-11y=4$

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} u\equiv 2(\text{mod } 5) \\ u\equiv 6(\text{mod} 11) \end{cases}$



9 APPLIQUER

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} u\equiv 2(\text{mod } 5) \\ u\equiv 6(\text{mod} 11) \end{cases}$

1) Montrer que si u est une solution de (S) alors $\begin{cases} u\equiv 17(\text{mod } 5) \\ u\equiv 17(\text{mod} 11) \end{cases}$

2) En déduire les solutions de (S)



10 APPLIQUER

1) Soit a ,b et r trois entiers non nuls et q un entier tels que a = b q +r .
Montrer que $a\wedge b=b\wedge r$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $7x-3y=2$

b) Résoudre alors $(S):\begin{cases} 7x-3y=2 \\ x\wedge y=2 \end{cases}$



11 S'ENTRAINER

Soit a, b et c trois entiers non nuls

1) a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que si a est premier avec b et c alors a est premier avec bc.

b) La réciproque est-elle vraie ?

2) En déduire par récurrence que si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^n=1$; $n\in\mathbb{N}^*$

3) Montrer que $a\wedge b=1$ alors $a^n\wedge b^m=1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$

4) Montrer que : Si $a\wedge b=c$ alors $a^n\wedge b^n=c^n$



12 S'ENTRAINER

Soit p **un nombre premier** donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x;y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation : $(E):x^2+y^2=p^2$

1) On pose $p=2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution. On suppose dans la suite que p est différent de 2 et que le couple $(x;y)$ est solution de l'équation (E)

2) Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux

a) Montrer que x et y sont de parités différentes

b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p

c) En déduire que x et y sont premiers entre eux

3) On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ ou u et v sont deux entiers naturels strictement positifs

a) Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|; 2uv\right)$ est solution de l'équation (E)

b) Donner une solution de l'équation (E),lorsque $p = 13$

4) On se propose enfin de vérifier sur deux exemples , que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés

a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

13 S'ENTRAINER

1) Soit (E) l'équation : $109x - 226y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs

a) Déterminer PGCD (109 ; 226). Que peut-on en déduire pour l'équation (E) ?

b) Démontrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme : $(141 + 226k \ ; \ 68 + 109k)$ ou k est un entier relatif

c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier non nul e tels que $109d = 1 + 226e$ (On précisera les valeurs des entiers d et e)

2) Démontrer que 227 est un nombre premier

3) On note A l'ensemble des entiers naturels a inférieurs ou égaux à 226

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227

a) Vérifier que $g\left(\mathrm{f}(0)\right) = 0$

b) Démontrer : pour tout a non nul appartient à A, $a^{226} \equiv 1[227]$

c) En utilisant le résultat de la question 1) b/ en déduire que : pour tout a non nul appartient à A,

$g\left[\mathrm{f}(\mathrm{a})\right] = a$

Que peut-on dire de $\mathrm{f}\left[g(\mathrm{a})\right]$?



SE PERFECTIONNER

1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier

c) En déduire que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

2) Dans cette question x et y désignent des entiers

a) Prouver que l'équation (E') : $17x-40y=1$ admet au moins une solution.

b) Donner une solution particulière de (E') en utilisant l'algorithme d'Euclide.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E').En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(\text{mod}\,40)$.

3) Pour tout entier naturel a, démontrer que si $\begin{cases} a^{17} \equiv b(\text{mod}\,55) \\ a^{40} \equiv 1(\text{mod}\,55) \end{cases}$ alors $b^{33} \equiv a(\text{mod}\,55)$



SE PERFECTIONNER

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-7y=2$.

a) Montrer que les solutions de E sont les couples $(-1+7k,-1+5k)$, $k\in\mathbb{Z}$

b) Déterminer les solutions de (E) telles que $x\wedge y=2$

2) Résoudre l'équation : $5x-7y=2^n$ où n est entier naturel non nul

3) On considère l'équation (E') : $5x^2-7y^2=2^n$ où n est entier naturel non nul

a) Vérifier que si (x, y) solution de (E') alors $5x^2 \equiv 2^n(\text{mod}\,7)$

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste modulo7 de x							
Reste modulo7 de $5x^2$							

c) Montrer que 2^n est congru à 1 , 2 ou 4 modulo 7 pour tout entier naturel n , en déduire que l'équation (E') n'admet pas de solution.

4) On considère le système (S) d'inconnue l'entier z : $\begin{cases} z \equiv 12(\text{mod}\,5) \\ z \equiv -3(\text{mod}\,7) \end{cases}$

a) Déterminer le reste de la division Euclidienne de z par 5 et par 7

b) Déterminer la forme générale de z solution de (S) en déduire le reste de la division Euclidienne de z par 35.



SE PERFECTIONNER

Partie A:

On considère l'équation (E) $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

1) Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x\wedge y=1$ ou $x\wedge y=2$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x - 26y = 2$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E) tel que x et y soient premier entre eux.

Partie B :

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

***a* et *b* étant deux entiers naturels donnés**, on associe à tout entier n de Ω le reste r de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on associe à P l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

I) Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

Peut-on utiliser le chiffre a =13 pour coder des messages.

II) Dans cette partie de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

1) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$. Que peut-on conclure

2) On désire coder le mot « LPN ». Recopier et compléter la grille de ci-dessous :

Lettre	*L*	*P*	*N*
n			
5n+2			
r			
Lettre			

Conclure

3) On se propose de décoder la lettre E.

a) Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b) Décoder alors la lettre E.



17 SE PERFECTIONNER

Pour coder un message, on procède de la manière suivante.

A chacune des 26 lettres de l'alphabet A, B, C,... , X, Y, Z on associe un entier naturel b de l'ensemble $\{0,1,2,...,23,24,25\}$ dans le même ordre que les lettres.

Le reste r de la division de l'entier $(a = 5b + 2)$ par 26 associe la lettre correspondante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Coder le mot «AMI ».

2) On se propose de décoder la lettre E.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $5x - 26y = 2$.

b) En déduire qu'il existe un couple unique $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ solution de l'équation tel que $0 \le x \le 25$.

c) Décoder la lettre E.



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) On considère l'équation (E) : $91x + 10y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs

a) Enoncer le théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E)

b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$

c) Résoudre (E')

2) Montrer que les nombres $A_n = 3^{2^n} - 1$, ou n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8

3) On considère l'équation $(E'') : A_3 x + A_2 y = 3296$

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'')

b) Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels solution de (E'').Le déterminer



SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $253x - 357y = 17$

1) a) Justifier que 17 et 253 sont premiers entre eux.

b) Montrer que $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17z \\ 253z - 21y = 1 \end{cases}$ avec $z \in \mathbb{Z}$

2) a) Soit l'équation (E') : $253z - 21y = 1$. Utiliser la division Euclidienne de 253 par 21 pour trouver une solution particulière de (E').

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E') puis (E).

3) Une personne possède n bons d'achats de valeur 50,6 DT chacun, achète p objets qui coûtent 71,4 DT chacun , on lui rend 3,4 DT . Déterminer n et p sachant que la valeur des bons ne dépasse pas 1000 DT.



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x-7y=5$

a) Enoncer le théorème permettant de justifier l'existence d'une solution de l'équation (E)

b) Montrer que les solutions de (E) sont les couples (3+7k, 4+11k) avec $k\in\mathbb{Z}$.

2) Déterminer les entiers naturels n inférieurs à 500 dont le reste dans la division euclidienne par 11 soit 1 et dans celle de n par -7 le reste soit 6.

3) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S) : $\begin{cases}11x-7y=5\\ y^2+x\equiv 0 \pmod 7\end{cases}$

a) Montrer que $(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+7k\\ y=4+11k\\ k^2+2k+6\equiv 0 \pmod 7\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S)

4) Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on pose a = 3+7k et b=4+11k et $d=a\wedge b$

a) Déterminer les valeurs possibles de d.

b) Montrer que si $k\equiv 1 \pmod 5$ alors d =5

c) En déduire d suivant les valeurs de k.

d) Déterminer la valeur de d pour chacun des cas suivants : $k=2012^{2012}$ et $k=2013^{2013}$



SUR LE CHEMIN DU BAC (Bac session principale 2007.2008)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E):3x-8y=5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x=8k-1$ et $y=3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2)

a) Soit n, x et y trois entiers tels que : $\begin{cases}n=3x+2\\ n=8y+7\end{cases}$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système $(S)\begin{cases}n\equiv 2 \pmod 3\\ n\equiv 7 \pmod 8\end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n\equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.



SUR LE CHEMIN DU BAC (Bac session principale 2011.2012)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A le point de coordonnées (3,2)

Soit N un point de l'axe $(O,\vec{u})$ et P le point de l'axe $(O,\vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1)

a) Soit les points $E(3,0)$ et $F(0,2)$

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe $(O,\vec{u})$ par S

c) En déduire que $S(N)=P$

d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M'=S(M)

Montrer que $z'=-\frac{3}{2}iz+\frac{13}{2}i$

2)

a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P

Montrer que $3x+2y=13$

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers



SUR LE CHEMIN DU BAC (Bac session de contrôle 2011.2012)

1) on considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y=9$

a) montrer que le couple (9, -3) est solution particulière de l'équation (E)

b) résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

2) résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n\equiv 6 \pmod 7 \\ n\equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$



QCM ; VRAI OU FAUX

1) Vrai 2) Faux 3) a) Faux b) Faux
c) Vraie
En effet :

1) $10x \equiv 10y \pmod 6 \Leftrightarrow 10(x-y) = 6k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 10(x-y) = 3(2k), k \in \mathbb{Z}$

On a : $\left.\begin{matrix} 3|10(x-y) \\ 3 \wedge 10 = 1 \end{matrix}\right\}$ d'après la lemme de Gauss

$3|x-y \Rightarrow x \equiv y[3]$

2ème méthode : $10x \equiv 10y \pmod 6 \Rightarrow 10x \equiv 10y \pmod 3$

$\Rightarrow 9x + x \equiv 9y + y \pmod 3 \Rightarrow x \equiv y \pmod 3$

2) On a : $65 \wedge 40 = 5$ et 5 ne divise pas 2011 alors (E) n'admet pas des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) a, b et c trois entiers non nuls

a) $(abc) \wedge (a^2c^2) = ((ac)b) \wedge ((ac)(ac)) = |ac|(b \wedge ac)$

b) Contre exemple : on a $3 \times 1 - 1 \times 1 = 2$ et $3 \wedge (-1) = 1 \neq 2$

c)
Si a et b sont premiers entre eux alors $a \wedge b = 1$ alors d'après l'identité de Bézout il existe $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$

alors $(au+bv)^2 = 1$ alors $a^2u^2 + 2abuv + b^2v^2 = 1$

alors $a(au^2 + 2bu) + b^2v^2 = 1$

alors $a \wedge b^2 = 1$

Conclusion : Si $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b^2 = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$

On a : $a \wedge b^2 = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$

alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux

d) On a : $ab = (a \vee b)(a \wedge b) = 15 \times 60$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 15 \times 60 \\ a \wedge b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15a' \\ b = 15b' \\ a' \wedge b' = 1 \\ a'b' = 4 \\ a' \in \mathbb{N}, \ b' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 15a' \\ b = 15b' \\ (a',b') \in \{(1,4),(4,1)\} \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(15,60),(60,15)\}$$



QCM ; VRAI OU FAUX

1) Faux 2) vrai 3) Faux 4) faux
5) Vrai 6) Vrai

3 QCM ; VRAI OU FAUX

1) Faux 2) Vrai 3) Vrai 4) Vrai
En effet

1) $a)\ \frac{a}{b} \simeq -11,7$, $b < 0$ alors le quotient est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ alors $q = -11$

2) Pour tout entier naturel non nul n ,
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n(n+2) + 1$.

Alors $1 \times (n+1)^2 - n(n+2) = 1$ alors d'après le théorème de Bezout $(n+1)^2 \wedge n = 1$

D'où $(n+1)^2 \vee n = (n+1)^2 \times n = n^3 + 2n^2 + n$

3) Pour tout entier n,
$(n \equiv 1 \pmod 6$ ou $n \equiv 4 \pmod 6)$
équivaut à $n \equiv 1 \pmod 3$?

$n \equiv 1[3] \Leftrightarrow n = 1 + 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 1 + 3(2k')$ ou $n = 1 + 3(2k'+1), k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 1 + 6k'$ ou $n = 4 + 6k', k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n \equiv 1[6]$ ou $n \equiv 4[6]$

4) si $\begin{cases} 8a \equiv 22 \pmod 7 \\ 5a \equiv 16 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1[7] \\ 5a \equiv 5[11] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1[7] \\ 9 \times 5a \equiv 9 \times 5[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1[7] \\ a \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 \equiv 0[7] \\ a - 1 \equiv 0[11] \end{cases}$

Or $7 \wedge 11 = 1$ alors $a - 1 \equiv 0[7 \times 11]$

alors $a - 1 \equiv 0[77]$ alors $a - 1$ est divisible par 77

4 APPLIQUER

1) On a $\frac{24455}{-234} \simeq -104,508$

On a $b < 0$ alors q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ alors $q = -104$

On a : $r = a - bq = 119$

2) Déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de - 24584 par 146.

On a $\frac{-24584}{146} \simeq -168,383$

On a $b > 0$ alors q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$ alors $q = -169$

On a : $r = a - bq = 90$

3) Déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de - 42445 par -124.

On a $\frac{-42455}{-124} \simeq 342,298$

On a $b<0$ alors q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ alors $q=343$

On a : $r=a-bq=77$



APPLIQUER

1) a)On a : $2009=11\times182+7$ alors le reste est 7

b) On a $2^5\equiv-1[11]\Rightarrow2^{10}\equiv1[11]$ alors le reste est 1

c) On a $2^{10}\equiv1[11]\Rightarrow(2^{10})^{200}$

$\equiv1^{200}[11]\Rightarrow\boxed{2^{2000}\equiv1[11]}$

On a $2^5\equiv-1[11]\Rightarrow2^5\times2^4\equiv(-1)2^4[11]$

$\Rightarrow2^9\equiv-16[11]\Rightarrow\boxed{2^9\equiv6[11]}$

Alors $2^{2000}\times2^9\equiv1\times6[11]\Rightarrow2^{2009}\equiv6[11]$

Or d'après a) $2009\equiv7[11]$

alors $2^{2009}+2009\equiv6+7[11]$

alors $2^{2009}+2009\equiv2[11]$

2) a) On a : $A_n=2^n+p$ et $A_{n+1}=2^{n+1}+p$

On a $d_n=A_n\wedge A_{n+1}$

alors d_n divise A_n et d_n divise A_{n+1}

$\Rightarrow d_n$ divise $A_{n+1}-A_n\Rightarrow d_n$ divise 2^n

b) On a : $A_n=2^n+p$ et 2^n est pair alors A_n et p on a la même parité

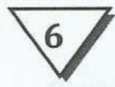
c) On a d_n divise 2^n alors $d_n\in\{1,2^1,2^2,...,2^n\}$

* si p est impair alors A_n est impair alors $d_n=1$

* si p est pair alors A_n et A_{n+1} sont pair alors $d_n\neq1$ alors $d_n\in\{2^1,2^2,...,2^n\}$

Alors d_n est pair

d) On a p =2009 est impair alors PGCD $(2^{2009}+2009, 2^{2010}+2009)=1$



APPLIQUER

1) a) $3n^3-11n+48=3n^3+81-11n-33$

$=3(n^3+27)-11(n+3)$

$=3(n+3)(n^2-3n+9)-11(n+3)$

$=(n+3)(3n^2-9n+16)$

b) On $n\in\mathbb{N}\Rightarrow3n^3-11n+48\in\mathbb{Z}$

or pour tout réel x, $3x^2-9x+16>0$ car $\Delta<0$ et $a>0$ alors $3n^3-11n+48>0$

alors $(3n^3-11n+48)\in\mathbb{N}$

2) Soit $d=a\wedge b$ et $d'=(bc-a)\wedge b$

* On a $d=a\wedge b$ alors d divise a et d divise b

alors d divise $bc-a$ et b

alors d divise $(bc-a)\wedge b$

alors d divise d'

* On a $d'=(bc-a)\wedge b$ alors d' divise $bc-a$ et b

alors d' divise $bc-a$ et bc

alors d'divise $bc-(bc-a)=a$

On a d' divise a et b alors d' divise $a\wedge b$ alors d' divise d

Conclusion : d' divise d et d divise d' alors d'=d

3) Montrons que pour tout entier naturel supérieur où égal à 2 on a :

$PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$

On pose a = 48 , b= n+3 cherchons c tel que $(n+3)c-48=3n^3-11n$

On a $3n^3-11n=3n^3-11n+48-48$

$=(n+3)\underbrace{(3n^2-9n+16)}_{c}-48$

Conclusion : pour a = 48 , b= n+3 et $3n^3-11n+48$ on obtient :

$PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$

4) a) les diviseurs de 48 sont $\{1,2,3,4,6,12,24,48\}$

b) On a $\frac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(n+3)$ divise $(3n^3-11n)$

$\Leftrightarrow PGCD(3n^3-11n,n+3)=n+3$

$\Leftrightarrow PGCD(48,n+3)=n+3\Leftrightarrow n+3$ divise 48 Alors $n+3\in\{1,2,3,4,6,12,24,48\}\Rightarrow n\in\{0,1,3,9,21,45\}$



APPLIQUER

Soit $A=3n+1$; $B=5n-1$ avec n étant un entier non nul

1/ On a : d = $A\wedge B$.

Alors $\begin{cases} \text{d divise A} \\ \text{d divise B} \end{cases} \Rightarrow$ d divise $5A-3B$

Or $5A-3B=5(3n+1)-3(5n-1)=8$ d'où d divise 8 d'où $d\in\{1,2,4,8\}$

2/ On a : $d\in\{1,2,4,8\}$ alors $d=8 \Leftrightarrow 8|A$ et $8|B$

On a $8|A$ et $8|B$

$\Rightarrow 8|2B-3A \Rightarrow 8|2(5n-1)-3(3n+1)$,

$\Rightarrow 8|n-5 \Rightarrow n=5+8k$

$k\in\mathbb{N}$

Pour $n=5+8k$, $k\in\mathbb{N}$ on a

* $A=3n+1=3(5+8k)+1=8\underbrace{(2+3k)}_{\in\mathbb{Z}}$ alors $8|A$

* $B=5n-1=5(5+8k)-1=8\underbrace{(3+5k)}_{\in\mathbb{Z}}$ alors $8|B$

Conclusion : $A\wedge B=8$ équivaut $n=5+8k$, $k\in\mathbb{N}$

8 APPLIQUER

1) On a : $5\times3-11\times1=4$

D'où $5x-11y=4 \Leftrightarrow 5x-11y=5\times3-11\times1$

$\Leftrightarrow 5(x-3)=11(y-1)$

On a : 11 divise $5(x-3)$ et $11\wedge5=1$ alors d'après lemme de Gauss

11 divise $(x-3)$ d'où il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-3=11k$, d'où $x=11k+3$

Pour $x=11k+3, k\in\mathbb{Z}$ on a : $5\times11k=11(y-1)$

alors $y=1+5k, k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(11k+3,5k+1)$ ou $k\in\mathbb{Z}\}$

2) On a $\begin{cases} u\equiv2(\text{mod } 5) \\ u\equiv6(\text{mod}11) \end{cases}$

Alors Il existe $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

tel que $\begin{cases} u-2=5x \\ u-6=11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2+5x \\ u=6+11y \end{cases}$

Ainsi $5x+2=11y+6$

D'où $\Leftrightarrow 5x-11y=4$

D'après 1) $x=3+11k$

$y=1+5k$ ou $k\in\mathbb{Z}$

D'où $u=5(3+11k)+2=17+55k$, $k\in\mathbb{Z}$

On a $u=17+55k$, $k\in\mathbb{Z}$ vérifié le système $\begin{cases} u\equiv2(\text{mod } 5) \\ u\equiv6(\text{mod}11) \end{cases}$

Conclusion : $S=\{17+55k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$

9 APPLIQUER

1) $\begin{cases} u\equiv15+2(\text{mod } 5) \\ u\equiv11+6(\text{mod}11) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u\equiv17(\text{mod } 5) \\ u\equiv17(\text{mod}11) \end{cases}$

2) On a $\begin{cases} u\equiv2(\text{mod } 5) \\ u\equiv6(\text{mod}11) \end{cases}$

alors $\begin{cases} u\equiv15+2(\text{mod } 5) \\ u\equiv11+6(\text{mod}11) \end{cases}$

alors $\begin{cases} u\equiv17(\text{mod } 5) \\ u\equiv17(\text{mod}11) \end{cases}$

alors $\begin{cases} u-17\equiv0(\text{mod } 5) \\ u-17\equiv0(\text{mod}11) \end{cases}$

Comme $5\wedge11=1$ alors $u-17\equiv0(\text{mod } 55)$ alors $u\equiv17(\text{mod } 55)$

Vérification :

Si $u\equiv17(\text{mod } 55)$

Alors $u\equiv17(\text{mod } 5)$ et $u\equiv17(\text{mod } 11)$

alors $u\equiv2(\text{mod } 5)$ et $u\equiv6(\text{mod } 11)$

D'où est solution de (S)

Conclusion : $S=\{17+55k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$

10 APPLIQUER

1) $a=bq+r$

Soit $d=a\wedge b$ et $d'=b\wedge r$

* On a: d/a et d/b alors d/a – bq alors d/r D'où

$\begin{cases} d\,/\,r \\ d\,/\,b \end{cases}$ alors $d\,/\,b\wedge r$

alors d/d'

* On a: d'/b et d'/r alors d'/bq + r alors d'/ b D'où

$\left.\begin{matrix} d'/a \\ d'/b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d'/a\wedge b \\ d\,/\,d \end{cases}$

Conclusion: $\begin{cases} d'/\,d \\ d\,/\,d' \\ d>0;\ \ d'>0 \end{cases} \Rightarrow d=d'$

2)

a) $7x-3y=2$ équivaut $7x-3y=7\times2-3\times4$ équivaut $7(x-2)=3(y-4)$

On $3/7(x-2)$ et $3\wedge7=1$ alors d'après le lemme de Gauss on a: $3/x-2$

$\Rightarrow x-2=3k\ (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=2+3k\ (k\in\mathbb{Z})$

Pour $x=2+3k$ on obtient $7\times3k=3(y-4)$

$y=7k+4$

Vérification : On a $7(2+3k)-3(7k+4)=2$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+3k,4+7k),k\in\mathbb{Z}\}$

b) $(S):\begin{cases}7x-3y=2\\x\wedge y=2\end{cases}$

équivaut $\begin{cases}x=2+3k\\y=4+7k\\(2+3k)\wedge(4+7k)=2\ ;\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Or on a $(2+3k)\wedge(4+7k)=(2+3k)\wedge k$

(car $\underbrace{4+7k}_{a}=\underset{q}{2}\underbrace{(2+3k)}_{b}+\underset{r}{k}$)

$=k\wedge2$

(car $\underbrace{2+3k}_{a}=\underset{q}{3}\underset{b}{k}+\underset{r}{2}$)

D'où (S) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+3k\\y=4+7k\\k\wedge2=2\ ;\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+3k\\y=4+7k\\k=2k'\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+6k'\\y=4+14k'\end{cases},\ k'\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(4+6k',4+14k'),k'\in\mathbb{Z}\}$

11 S'ENTRAINER

a) Montrons qu'il existe deux entiers α et β tel que $\alpha a+\beta(bc)=1$?

* On a: $a\wedge b=1\Leftrightarrow$ il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=1$

* On a: $a\wedge c=1\Leftrightarrow$ il existe $(u',v')\in\mathbb{Z}^2$ tq $au'+cv'=1$

D'où $(au+bv)(au'+cv')=1$

Alors $a^2uu'+aucv'+abvu'+bcvv'=1$

Alors $a\left(\underbrace{auu'+cuv'+bvu'}_{\in\mathbb{Z}}\right)+bc\left(\underbrace{vv'}_{\in\mathbb{Z}}\right)=1$

b) La réciproque est vraie en effet si a est premier avec bc alors d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers α et β tel que $\alpha a+\beta(bc)=1$

D'où on obtient que $\underset{\in\mathbb{Z}}{\alpha}a+\underbrace{(\beta b)}_{\in\mathbb{Z}}c=1$ et $\underset{\in\mathbb{Z}}{\alpha}a+\underbrace{(\beta c)}_{\in\mathbb{Z}}b=1$

D'où d'après le théorème de Bézout $a\wedge b=1$ et $a\wedge c=1$

1) Montons par récurrence que pour tout $n\geq1$ « Si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^n=1$; »

• Pour n = 1 on $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^1=1$ vraie

• Soit $n\geq1$: supposons que: $a\wedge b^n=1$ montrons que $a\wedge b^{n+1}=1$? On a $a\wedge b^n=1$ et $a\wedge b=1$

D'après 1) a) $a\wedge\left(b\times b^n\right)=1$ alors $a\wedge b^{n+1}=1$

Conclusion: D'après le principe de raisonnement par récurrence Si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^n=1$

3) Montrons que si $a\wedge b=1$ alors $a^n\wedge b^m=1,n\in\mathbb{N}^*,m\in\mathbb{N}^*$

On d'après 2),

$a\wedge b\Rightarrow a\wedge b^m=1\Rightarrow b^m\wedge a=1\Rightarrow b^m\wedge a^n=1$

4) Montrons que si $a\wedge b=c$ alors $a^n\wedge b^n=c^n$?

On a : $a\wedge b=c$ équivaut il existe un unique couple $(a',b')\in\mathbb{Z}^2$ tel que: $\begin{cases}a=ca'\\b=cb'\\a'\wedge b'=1\end{cases}$

D'où

$a^n\wedge b^n=c^n(a')^n\wedge c^n(b')^n=c^n\left(\underbrace{(a')^n\wedge(b')^n}_{1}\right)=c^n$

12 S'ENTRAINER

$(E):x^2+y^2=p^2$; $x\in\mathbb{N}^*$; $y\in\mathbb{N}^*$; p un nombre premier

1)

$\begin{cases}x^2+y^2=4\\x\in\mathbb{N}^*\\y\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ alors $\begin{cases}x^2<4\\y^2<4\\x\in\mathbb{N}^*\\y\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

alors $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Impossible car :

$1^2 + 1^2 = 2 \neq 4$

2)

a) *On a p est un nombre premier $\neq 2$ alors p est impair $\Rightarrow p \equiv 1(\text{mod } 2) \Rightarrow p^2 \equiv 1(\text{mod } 2)$ (1)

* Si x et y sont pairs alors $x \equiv 0[2]$ et $y \equiv 0[2]$ alors

$x^2 \equiv 0[2]$ et $y^2 \equiv 0[2] \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0[2]$ (2)

D'après (1) et (2) l'égalité $x^2 + y^2 = p^2$ est impossible.

* x et y sont impairs alors $x \equiv 1[2]$ et $y \equiv 1[2]$

alors $x^2 \equiv 1[2]$ et $y^2 \equiv 1[2]$

alors $x^2 + y^2 \equiv 2[2] \equiv 0[2]$ (3)

D'après (1) et (3) $x^2 + y^2 = p^2$ impossible.

Conclusion : (x, y) s'il existe sont de parités différentes

b) Si x et y sont divisibles par p alors il existe $k \in \mathbb{N}^*, k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = pk'$ et $y = pk'$

On a $x^2 + y^2 = p^2$

$\Rightarrow (pk)^2 + (pk')^2 = p^2 \Rightarrow p^2(k + k') = p^2$

Alors $k + k' = 1$ impossible car $k + k' \geq 1 + 1 \geq 2$.

c) Soit $d = x \wedge y$

$$\left.\begin{array}{l} d / x \Rightarrow d / x^2 \\ d / y \Rightarrow d / y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d / x^2 + y^2 \Rightarrow d / p^2$$

alors $d \in \{p, p^2, 1\}$

Or d'après 2) b) on x et y ne sont pas divisibles par p

$\Rightarrow d \neq p$ et $d \neq p^2 \Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow$ x et y sont premiers entre eux.

3) $p = u^2 + v^2$

a) $(|u^2 - v^2|, 2uv)$ solution de E?

on a:

$|u^2 - v^2|^2 - (2uv)^2 = (u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = p^2$

D'où le couple $(|u^2 - v^2|, 2uv)$ est une solution.

b) On a : $13 = 2^2 + 3^2$

alors $(|2^2 - 3^2|, 2 \times 2 \times 3) = (5, 12)$ est une solution

4) a) 3 et 7 ne sont pas des carrés parfaits.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x \in \mathbb{N}^* \\ y \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ alors $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ 0 < y < 3 \end{cases}$

les couples (x, y) possibles sont (1, 1) (2, 2) (1, 2) (1, 2)

on vérifie:

$1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow$ (1,1) n'est pas une solution

$2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow$ (2,2) n'est pas une solution

$2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow$ (2,1) n'est pas une solution

$1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow$ (1,2) n'est pas une solution

Alors l'équation $x^2 + y^2 = 9$ n'admet des solutions

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ x \in \mathbb{N}^* \\ y \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ alors $\begin{cases} 0 < x < 7 \\ 1 < y < 7 \end{cases}$

Le tableau ci-dessous est complété par $x^2 + y^2$

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	1	5	10	17	26	37
2	5	8	13	20	29	40
3	10	13	18	25	34	45
4	17	20	25	32	41	50
5	26	29	34	41	50	51
6	97	40	45	50	51	72

Alors l'équation $x^2 + y^2 = 49$ n'admet des solutions

13 S'ENTRAINER

1) $(E): 109x - 226y = 1$.

a) PGCD (109, 226)

La calculatrice affiche que l'écriture irréductible de $\frac{226}{109}$ est $\frac{226}{109}$.

alors 226 et 109 sont premiers entre eux.

On a: $109 \wedge 226 = 1$ alors d'après le théorème de Bézout l'équation (E) admet des solutions.

b) Il faut résoudre l'équation

On a (141,68) est une solution de (E)

$(E) \Leftrightarrow 109x - 226y = 1$

$\Leftrightarrow 109x - 226y = 109 \times 141 - 226 \times 68$

$\Leftrightarrow 109(x - 141) = 226(y - 68)$

On a 226 divise $109(x - 141)$ et 226 et 109 sont premiers entre eux

Alors 226 divise $x - 141$ alors x = 141 +226k $(k \in \mathbb{Z})$

Pour x = 141 +226k $(k \in \mathbb{Z})$ on obtient $109 \times 226k = 226(y - 68)$

alors y = 68 +109k

Vérification : $109(141+226k)-226(68+109k)$
$=109\times141-226\times68=1$

Conclusion : $S=\{(141+226k;68+109k)\},k\in\mathbb{Z}$

c) On a: $\forall k\in\mathbb{Z}$

Si d et e existent alors $\begin{cases}109d=1+226e\\ d\in\mathbb{N}^*\\ e\in\mathbb{N}^*\\ d\le 226\end{cases}$

alors $\begin{cases}109d-226e=1\\ d\in\mathbb{N}^*\\ e\in\mathbb{N}^*\\ d\le 226\end{cases}$

Alors $\begin{cases}d=141+226k\\ e=68+109k\\ d\in\mathbb{N}^*,d\le 226\\ e\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

d'où $\begin{cases}d=141 \quad (k=0)\\ e=68\end{cases}$

D'où $109\times141=1+226\times68$

2) 227 est il premier?

On a: $\sqrt{227}=15,06$

Les nombre premier inférieur ou égale à $\sqrt{227}$ sont $\{2,3,5,7,11,13\}$.

Aucun des ces nombres ne divise 227

D'où 227 est premier.

3) $A=\{0,1,2,......,226\}$

a) $f:A\to A$
$a\to r$

où $\begin{cases}a^{109}\equiv r[227]\\ r=\text{le reste modulo 227 de } a^{109}\end{cases}$

$g:A\to A$
$a\to r'$

où $\begin{cases}a^{141}\equiv r'[227]\\ r'=\text{le reste modulo 227 de } a^{141}\end{cases}$

* on a: $0^{109}\equiv0[227]$ alors $f(0)=0$.

* on a: $0^{141}\equiv0[227]$ alors $g(0)=0$.

D'où $g(f(0))=g(0)=0$

b) $a\in A\setminus\{0\}$; $a^{226}\equiv r[227]$?

Soit $a\in\{1,......,226\}$ alors $227\wedge a=1$ donc 227 ne divise pas par a.

De plus 227 est premier.

alors d'après le théorème de Fermat on a: $a^{226}\equiv1[227]$.

c) On pose : $\begin{cases}f(a)=r\\ g(r)=r'\end{cases}$ montrons que $r'=a$

On a: $a^{109}\equiv r[227]$ alors $(a^{109})^{141}\equiv r^{141}[227]$

alors $\boxed{a^{109\times141}\equiv r'[227]}$

D'autre part : $a^{226}\equiv1[227]$

Alors $a^{226\times68}\equiv1[227]\Rightarrow a^{226\times68}\times a\equiv a[227]\Rightarrow$

$\boxed{a^{226\times68+1}\equiv a[227]}$

Or $\boxed{109\times141=1+226\times68}$

Alors $\Rightarrow a\equiv r'[227]$

Or $a\in\{1,..........,226\}$

et $r'\in\{1,..............,226\}$

Alors $r'=a$ D'où $g[f(a)]=a$

De même on montre que $f[g(a)]=a$



14 SE PERFECTIONNER

4) a) On a 11 est premier et 11 ne divise pas 6 alors d'après le Théorème de Fermat

$6^{10}\equiv1[11]\Rightarrow r=1$

b) On a 5 est premier et 5 ne divise pas 6 alors d'après le Théorème de Format $6^4\equiv1[5]\Rightarrow r=1$

c) On a $6^{10}\equiv1[11]\Rightarrow(6^{10})^4\equiv1^4[11]\Rightarrow6^{40}\equiv1[11]$

On a $6^4\equiv1[5]\Rightarrow(6^4)^{10}\equiv1^{10}[5]\Rightarrow6^{40}\equiv1[5]$

On a

$\left.\begin{matrix}6^{40}-1\equiv0[11]\\ 6^{40}-1\equiv0[5]\\ 11\wedge5=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow6^{40}-1\equiv0[55]\Rightarrow6^{40}\equiv1[55]$

5) a) On a : $17\wedge-40=1$ alors d'après le Théorème de Bézout, l'équation (E') admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) On pose $a=40,b=17$

$40=17\times2+6\to a=2b+6\to6=a-2b$

$17=6\times2+5\to b=(a-2b)\times2+5\to 5=-2a+5b$

$6=5\times1+1\to a-2b=(-2a+5b)+1\Rightarrow 1=3a-7b$

D'où $1=3\times40-7\times17\Rightarrow 17(-7)-40(-3)=1$

Alors $(-7,-3)$ est même solution particulière de (E')

c) * $(E')\Leftrightarrow 17x-40y=17(-7)-40\times(-3)$

$\Leftrightarrow 17(x+7)=40(y+3)$

on a : $\left.\begin{matrix}40|17(x+7)\\40\wedge7=1\end{matrix}\right\}$ alors d'après la lemme de Gauss, on a

$40|x+7\Rightarrow x+7=40k,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-7+40k,k\in\mathbb{Z}$

Si $x=-7+40k,k\in\mathbb{Z}$ on a

$17\times40k=40(y+3)$ alors $y=-3+17k,k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-7+40k,-3+17k)\}k\in\mathbb{Z}$

* Si $17x_0\equiv1[40]\Rightarrow 17x_o=1+40y,y\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 17x_o-40y=1,y\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x_o=-7+40k$ et $y=-3+17k,k\in\mathbb{Z}$

Si $0\le x_o\le40$ alors $x_o=33\Rightarrow k=1\Rightarrow y=14$

On a : $17\times33=1+40\times14$, d'où x_o existe et il est unique

6) Si $\begin{cases}a^{17}\equiv b[55]\\a^{40}\equiv1[55]\end{cases}$

* On a :

$a^{17}\equiv b[55]\Rightarrow\left(a^{17}\right)^{33}\equiv b^{33}[55]\Rightarrow$

$\boxed{a^{17\times33}\equiv b^{33}[55]}$

* On a :

$a^{40}\equiv1[55]\Rightarrow\left(a^{40}\right)^{14}\equiv1^{14}[55]\Rightarrow a^{40\times14}\equiv1[55]$

$\Rightarrow a^{40\times14}\times a\equiv a[55]$

$\Rightarrow a^{40\times14+1}\equiv a[55]$

$\Rightarrow\boxed{a^{17\times33}\equiv a[55]}$

D'où $b^{33}\equiv a[55]$



15

SE PERFECTIONNER

4) a) $5x-7y=2$

$\Leftrightarrow 5x-7y=5(-1)-7(-1)\Leftrightarrow 5(x+1)=7(y+1)$

On a : $7|5(x+1)$ et $7\wedge15=1$ alors d'après la lemme de Gauss on a : $7|x+1$ alors $x+1=7k,k\in\mathbb{Z}$ alors $x=-1+7k,k\in\mathbb{Z}$

Pour $x=-1+7k,k\in\mathbb{Z}$, on a : $5\times7k=7(y+1)$

alors $y+1=5k$ alors $y=-1+5k$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-1+7k,-1+5k)\},k\in\mathbb{Z}$

b) Soit $d=x\wedge y$

*on a : $d|-1+7k$ et $d|-1+5k$

alors $d|5(-1+7k)-7(-1+5k)$ alors $d|2$

alors $\boxed{d\in\{1,2\}}$

* D'où $d=2\Leftrightarrow 2|x$ et $2|y$

on a : 2|x

$\Leftrightarrow 2|-1+5k\Leftrightarrow -1+5k=0[2]\Leftrightarrow 5k\equiv1[2]$

$\Leftrightarrow k=1[2]$

<u>Vérification :</u> Pour $k\equiv1[2]$, on a :

$5k\equiv5[2]\Rightarrow 5k-1\equiv0[2]$ alors $2|5k-1$ alors 2|y

Conclusion :

$x\wedge y=2\Leftrightarrow k=1[2]\Leftrightarrow k=1+2k',k'\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow(x,y)=(6+14k',4+10k'),k'\in\mathbb{Z}$

5) Cherchons une solution particulière de $5x-7y=2^n$

On a : $5(-1)-7(-1)=2$

alors $5\left(-2^{n-1}\right)-7\left(-2^{n-1}\right)=2^n$

alors $\left(-2^{n-1},-2^{n-1}\right)$ une solution particulière de $5x-7y=2^n$

D'où

$5x-7y=2^n\Leftrightarrow 5x-7y=5\left(-2^{n-1}\right)-7\left(-2^{n-1}\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(x+2^{n-1}\right)=7\left(y+2^{n-1}\right)$

On a : $7|5(x+2^{n-1})$ et $7\wedge5=1$ alors d'après la lemme de Gauss, on a : $7|x+2^{n-1}$

alors $x+2^{n-1}=7k,k\in\mathbb{Z}$

alors $x=-2^{n-1}+7k,k\in\mathbb{Z}$

Pour $x=-2^{n-1}+7k$, on a : $5\times7k=7\left(y+2^{n-1}\right)$

alors $y=-2^{n-1}+5k,k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-2^{n-1}+7k,-2^{n-1}+5k)\},k\in\mathbb{Z}$

6) (E') : $5x^2-7y^2=2^n$ où n est entier naturel non nul

a) Si (x, y) est une solution de (E')

b) $\Leftrightarrow 5x^2 - 7y^2 = 2^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

alors $5x^2 - 2^n = 7y^2$ avec: $y^2 \in \mathbb{Z}$

alors $5x^2 \equiv 2^n [7]$

c)

Reste modulo7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo7 de $5x^2$	0	5	6	3	3	6	5

d) On a : $2^3 \equiv 1[7]$

* Si $n = 3k$, on a :

$2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow \left(2^3\right)^k \equiv 1^k [7]$

$\Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^n \equiv 1[7]$

* Si $n = 3k+1$, on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$ alors $2^{3k+1} \equiv 2[7]$

alors $2^n \equiv 2[7]$

* Si $n = 3k+2$, on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$

alors $2^{3k} \times 2^2 \equiv 4[7]$ alors $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

Alors $3^n \equiv 4[7]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, 2^n est congru à 1 , 2 ou 4 modulo 7

$5x^2$ est congru à 0 , 3 ,5 ou 6 modulo 7

Alors $5x^2 \equiv 2^n [7]$ est impossible

Alors (E') n'admet pas de solutions

4) On considère le système (S) d'inconnue l'entier z:

$$\begin{cases} z \equiv 12 \pmod 5 \\ z \equiv -3 \pmod 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \equiv 2[5] \\ z \equiv 4[7] \end{cases}$$

a) le reste de la division Euclidienne de z par 5 est 2

le reste de la division Euclidienne de z par 7 est 4

b) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z \equiv 2[5] \\ z \equiv 4[7] \end{cases} \Leftrightarrow z = 2+5k$

et $z = 4+7k'$, $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$

alors $2+5k = 4+7k'$ alors $5k - 7k' = 2$

d'après 1/ $k = -1+7k''$ et $k' = -1+5k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$

alors

$z = 2+5k = 2+5(-1+7k'') = -3+35k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$

Vérification : Pour $z = -3+35k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$

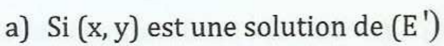
On a : $z - 12 = -15+35k'' = 5(-3+7k'')$ alors

$z \equiv 12[5]$

$z+3 \equiv 35k''$ alors $z \equiv -3[7]$

Conclusion : $z = -3+35k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$

* On a : $z \equiv -3[35] \Rightarrow z \equiv 32[35] \Rightarrow$ Le reste de la division Euclidienne de z par 35 est 32



16 SE PERFECTIONNER

Partie A:

1) $E : 5x - 26y = 2$ E

Soit $d = x \wedge y$ alors $d \mid x$ et $d \mid y$ alors $d \mid 5x - 26y$ alors $d \mid 2$ alors $d \in \{1,2\}$

2) On a $(-10,-2)$ est une solution particulière de (E)

$5x - 26y = 2$

$\Leftrightarrow 5x - 26y = 5\times(-10) - 26(-2)$

$\Leftrightarrow 5(x+10) = 26(y+2)$

On a: $26 \mid 5(x+10)$ et $26 \wedge 15 = 1$

Alors d'après la lemme de Gauss on a: $26 \mid x+10$ d'où $x+10 = 26k$ d'où $x = -10+26k$ $k \in \mathbb{Z}$

Pour $x = -10+26k, k \in \mathbb{Z}$

On a: $5 \times 26k = 26(y+2)$ alors $y+2 = 5k$ alors $y = -2+5k$, $k \in \mathbb{Z}$

Vérification: pour $x = -10+26k$

et $y = -2+5k$, $k \in \mathbb{Z}$

L'équation (E) est vraie.

Conclusion: $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-10+26k, -2+5k), k \in \mathbb{Z}\}$

3) On a d'après 1) $x \wedge y = 1$ ou $x \wedge y = 2$

Si $x \wedge y = 2$ alors $x \equiv 0[2]$ et $y \equiv 0[2]$

alors $-10+26k \equiv 0[2]$ et $-2+5k \equiv 0[2]$

vrai $\Rightarrow$ $5k \equiv 0[2]$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $k \equiv 0[2]$

Alors $k \equiv 0[2]$

Vérification : Pour $k \equiv 0[2]$, on a $26k \equiv 0[2]$ et $5h \equiv 0[2]$

$\Rightarrow 26k - 10 \equiv 0[2]$ et $5k - 2 \equiv 0[2]$

$\Rightarrow x \equiv 0[2]$ et $y \equiv 0[2]$

Conclusion: $x \wedge y = 2$ sig $k \equiv 0[2]$

D'où $x \wedge y = 1$ signifie $k \equiv 1[2]$ sig il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 1+2k'$

Signifie $x = 52k'+16$ et $y = 3+10k', k' \in \mathbb{Z}$

Partie B: Pour a = 13 et b quelconque

I.

1) * à la lettre A on associé $n = 0$

On a $13\times 0+b=b$
Soit r le reste de la division euclidienne de b par 26.
On a associe à A la lettre qui correspond à r.
* à la lettre C on associé $n=2$
On a $13\times 2+b=26+b$
Le reste de la division euclidienne de 26 + b par 26 est aussi r.
Alors A et C sont codés par la même lettre.
II.
2) Pour a = 5 , b = 2 on a :

$$\left.\begin{array}{l}5n+2\equiv r[26]\\5p+2\equiv r[26]\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}5n+2\equiv 5p+2[26]\\ \Rightarrow 5(n-p)\equiv 0[26]\\ \Rightarrow 5(n-p)=26h, h\in\mathbb{Z}\end{array}$$

On a: $26|5(n-p)$ et $26\wedge 5=1$ alors d'après la lemme de Gauss $26|n-p$ (1)

Or $\left.\begin{array}{l}0\le n\le 25\\-25\le -p\le 0\end{array}\right\}$ alors $-25\le n-p\le 25$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $n-p=0\Rightarrow n=p$
On peut utiliser les entiers a = 5 et b = 2 pour coder des messages.

Lettre	L	P	N
N	11	15	13
5n + 2	57	77	67
R	5	25	15
lettre	F	Z	P

2) LPN est codé par FZP
3) Soit $\overline{E}$ la lettre codée par E et soit n l'entier qui correspond à $\overline{E}$.
On a 4 correspond à l'entier E.
D'où $5n+2\equiv 4[26]$
D'où il existe $y\in\mathbb{Z}$ tq $5n+2=4+25y$ d'où $5n-26y=2$
On a d'après partie A)2) $n=-10+26k, k\in\mathbb{Z}$
Or $0\le n\le 25$
$\Rightarrow 0\le -10+26k\le 25\Rightarrow 10\le 26k\le 35$
$\Rightarrow \frac{10}{26}\le k\le\frac{36}{25}$
car $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=1$ d'où n = 16
Alors Q est la lettre codée par E.



SE PERFECTIONNER

A chacune des 26 lettres de l'alphabet A, B, C,... , X, Y, Z on associe un entier naturel b de l'ensemble $\{0,1,2,...,23,24,25\}$ dans le même ordre que les lettres.
Le reste r de la division de l'entier $(a=5b+2)$ par 26 associe la lettre correspondante :
1/ Coder le mot «AMI» ?

Lettre	A	M	I
b	0	12	8
5b+2	2	62	42
r	2	10	16
Lettre	C	K	q

Conclusion : le mot ami est codé par CKQ
2/ On se propose de décoder la lettre E.
d) on a $(-10,-2)$ est une solution de : $5x-26y=2$.
$5x-26y=2\Leftrightarrow 5x-26y=5(-10)-26(-2)$
$\Leftrightarrow 5(x+10)=26(y+2)$
On a : 5 et 26 sont premiers entre eux
alors 26 divise x+10 alors x+10=26 k ($k\in\mathbb{Z}$)
26 divise 5(x+10)
alors x = - 10+26 k ($k\in\mathbb{Z}$)
Pour x = - 10+26 k on a $5\times 26k=26(y+2)$
$\Leftrightarrow 5k=y+2\Leftrightarrow y=-2+5k$ ($k\in\mathbb{Z}$)
$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-10+26k,-2+5k)\}, k\in\mathbb{Z}$
e) En déduire qu'il existe un couple unique $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ solution de l'équation tel que $0\le x\le 25$.
Si (x,y) est une solution de (E) et $0\le x\le 25$ alors $0\le -10+26k\le 25$ alors $\frac{10}{26}\le k\le\frac{35}{26}$
alors $0,3\le k\le 1,3$
alors k = 1 d'où x=16 et y = 3
f)Décoder la lettre E.
On a E correspond à r = 4
Soit b l'entier qui correspond à r =4
On a :
$5b+2\equiv 4[26]$ et $b\in\{0,1,...,25\}$
$\Rightarrow 5b+2=4+26k$ et $b\in\{0,1,...,25\}$
$\Rightarrow 5b-26k=2$ et $b\in\{0,1,...,25\}$
D'après 2)b) on b = 16 alors Q est la lettre codé par E



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) $91x+10y=1(E)$
a) **Théorème :**
Soit l'équation (E) : $ax+by=c$

$(a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \mathbb{Z})$

Soit $d = a \wedge b$

(E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si d divise c.

Ou bien : Théorème de Bézout

$((a \wedge b) = 1 \Leftrightarrow$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1)$

b) On a: $91 \times 1 + 10(-9) = 1$ alors $(1,-9)$ solution particulière de (E).

alors : $91 \times 412 + 10 \times (-9) \times 412 = 412$

alors $91 \times 412 + 10 \times (-3708) = 412$

Alors $(412, -3708)$ est une solution particulière de (E').

c) On a: $91x + 10y = 412$

$\Leftrightarrow 91(x-412) + 10(y+3708) = 0$

$\Leftrightarrow 91(x-412) = 10(-y-3708)$

On a $10/91(x-412)$ et $10 \wedge 91 = 1$

Alors d'après la lemme de Gauss $10/x-412$ d'où $x = 412 + 10k, k \in \mathbb{Z}$ d'où $x = 10k + 412$

Pour $x = 10k + 412$ on obtient

$91 \times 10k = 10(-y-3708)$

$\Rightarrow y = -91k - 3708$

Vérification, on a:

$91x + 10y = 91(10k+412) + 10(-91k-3708)$

$= 91 \times 412 - 3708 = 412$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(412+10k, -3708-91k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $A_n = 3^{2n} - 1 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$

On a $3^2 = 1[8] \Rightarrow (3^2)^n = 1^n[8]$

$\Rightarrow 3^{2n} = 1[8]$

$\Rightarrow 3^{2n} - 1 = 0[8]$ alors $A_n = 0[8]$ alors A_n divisible par 8

3) a) $(E'') \Leftrightarrow A_3x + A_2y = 3296$

$\Leftrightarrow 728x + 80y = 3296$

$\Leftrightarrow 91x + 10y = 412 \Leftrightarrow (E')$

$$S_{\mathbb{Z}^2} : \{(412+10k, -3708-91k), k \in \mathbb{Z}\}$$

a) S'il existe (x,y) tel que : $\begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$

alors $\begin{cases} x = 412 + 10k \\ y = -3708 - 91k \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$x \geq 0 \Rightarrow 412 + 10k \geq 0$

$\Rightarrow 10k \geq -412 \Rightarrow k \geq -41,2$

$y \geq 0 \Rightarrow -3708 - 91k \geq 0$

$\Rightarrow -3708 \geq 91k \Rightarrow k \leq \dfrac{-3708}{91}$

$\Rightarrow k \leq -40,7$

Alors $-41,2 \leq k \leq -40,7$ or $k \in \mathbb{Z}$ alors $k = -41$

Pour $k = -41$, on a: x = 2 et y = 23

Vérification : $91 \times 2 + 10 \times 23 = 412$

D'où $(2,23)$ est l'unique couple d'entiers naturels solution de (E'').

19 SUR LE CHEMIN DU BAC

$253x - 357y = 17.$

1) a) 17 est premier et 17 ne divise pas 253 alors 17 et 253 sont premiers entre eux.

b) $(E) \Leftrightarrow 253x - 357y = 17 \Leftrightarrow 253x = 17(21y+1)$

on a 7 divise 253 x et 7 $\wedge$ 253=1 alors d'après la lemme de Gauss 17 divise x alors x=17 y où y $\in \mathbb{Z}$

D'où 253x-357 y=17 $\Rightarrow$ 253 $\times$ 17 y -357y=17

$\Rightarrow$ 253y-21y =1

D'où $(E) \Rightarrow \begin{cases} x = 17y \\ 253y - 21y = 1 \end{cases}$

Réciproquement

si $\begin{cases} x = 17y \\ 253y - 21y = 1 \end{cases}$

On a : $253y - 21y = 1 \Rightarrow 253 \times 17y - 21 \times 17y = 1 \times 17$

$\Rightarrow$ 253x-357y=17

Conclusion : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17y \\ 253y - 21y = 1 \end{cases}$

2) a)On a : $253 \times 1 - 12 \times 21 = 1$ alors $(1,12)$ est solution de (E')

On a : 253y-21y=1

$\Leftrightarrow$ 253y - 21y = 253 $\times$ 1 - 21 $\times$ 12

$\Leftrightarrow$ 253(y-1)=21(y-12)

On a 21 divise 253(y-1) et 21 $\wedge$ 253=1

Alors 21 divise y-1 alors y-1=21k, $k \in \mathbb{Z}$ alors y=1+21 k, $k \in \mathbb{Z}$

Pour $y=1+21k, k\in\mathbb{Z}$ on a $253\times 21k=21(y-12)$
équivaut $y-12=253k$
équivaut $y=12+253k$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(1+21k,12+253k)\}$, $k\in\mathbb{Z}$

• On a $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x=17z\\253z-21y=1\end{cases}$ avec $z\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=17z\\z=1+21k\\y=12+253k\end{cases}$,

$k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=17+357k\\y=12+253k\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(17+357k,12+253k)\}$, $k\in\mathbb{Z}$

3) On a : $n\times 50,6-p\times 71,4=3,4$ alors $506n-714p=34$ alors $253n-357p=17$

D'après 2)b) , il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\boxed{n=17+357k}$ et $\boxed{p=12+253k}$

Or $n\times 50,6\le 1000\Rightarrow n\le 19,76\Rightarrow n=17$ alors k =0 alors p = 12



20 SUR LE CHEMIN DU BAC

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x-7y=5$

a) **Théorème:**

$a\in\mathbb{Z}^*, b\in\mathbb{Z}^*$, $c\in\mathbb{Z}$ et $d=a\wedge b$.

L'équation $ax+by=c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si et seulement si d divise c.

b) Montrer que les solutions de (E) sont les couples (3+7k, 4+11k) avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a : $11\times 3-7\times 4=5$

$(E)\Leftrightarrow 11x-7y=5\Leftrightarrow 11x-7y=11\times 3-7\times 4$

$\Leftrightarrow 11(x-3)=7(y-4)$

On a : $7|11(x-3)$ et $7\wedge 11=1$ alors d'après la lemme de Gauss $7|x-3$ alors $x=3+7k$; $k\in\mathbb{Z}$.

Pour $x=3+7k$,

$E\Leftrightarrow 11\times 7k=7(y-4)\Leftrightarrow y=4+11k, k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(3+7k,4+11k)\}, k\in\mathbb{Z}$

2) Si n est un entier naturel inférieurs à 500 dont le reste dans la division euclidienne par 11est 1 et dans celle de n par -7 le reste est 6.

On a $n=11q+1$ et $n=-7q'+6$ $q\in\mathbb{Z}, q'\in\mathbb{Z}$

alors $11q+1=-7q'+6$

alors $11q+7q'=5$

alors d'après 1/ $q=3+7k$ et $q'=-4-11k$; $k\in\mathbb{Z}$

D'où $n=11(3+7k)+1=77k+34$ $(k\in\mathbb{N})$

car n est un entier naturel

Vérification : Pour $n=34+77k$ $(k\in\mathbb{Z})$

On a : $n=11(3+7k)+1$

et $n=-7(-4-11k)+6$

Si $0\le n\le 500\Leftrightarrow 0\le 34+77k\le 500$ et $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -34\le 77k\le 500$ $\Leftrightarrow -0,45\le k\le 6,5$ D'où $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$,

D'où $n\in\{34,111,188,265,342,419,496\}$

3) (S) : $\begin{cases}11x-7y=5\\y^2+x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}$

$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+7k\\y=4+11k\\y^2+x\equiv 0[7]\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$

On a : $y^2+x\equiv 0[7]\Leftrightarrow(4+11k)^2+3+7k\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 16+88k+121k^2+3+7k\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2+4k+2k^2+3\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2k^2+4k+5\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2k^2+4k+12\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2(k^2+2k+6)\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow k^2+2k+6\equiv 0[7]$ car $2\wedge 7=1$

b) Le tableau ci-dessous est complété par le reste modulo 7

k	0	1	2	3	4	5	6
k^2	0	1	4	2	2	4	1
$2k$	0	2	4	6	1	3	5
k^2+2k+6	6	2	0	0	2	6	5

D'où

$k^2+2k+6\equiv[7]\Leftrightarrow k\equiv 2[7]$ ou $k\equiv 3[7]$

$\Leftrightarrow k=2+7k'$ ou $k=3+7k'$, $k'\in\mathbb{Z}$

• Si $k=2+7k', k'\in\mathbb{Z}$

$x=3+7(2+7k')=17+49k'$

$y=4+11(2+7k')=26+77k'$

• Si $k=3+7k', k'\in\mathbb{Z}$,

$x=3+7(3+7k')=24+49k'$

$y=4+11(3+7k')=37+77k'$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(17+49k', 26+77k'), (24+49k', 37+77k')\}$, $k' \in \mathbb{Z}$

4) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose a = 3+7k et b=4+11k et $d = a \wedge b$

a) d= $a \wedge b$ alors $d|a$ et $d|b$

alors $d|11a - 5b$ donc d divise 5 alors d=1 ou d=5

b) • Si $k = 1[5]$ alors $7k \equiv 7[5] \Rightarrow 3+7k \equiv 10[5]$

$\Rightarrow a \equiv 0[5] \Rightarrow 5|a$

• Si $k = 1[5]$ alors $11k \equiv 11[5] \Rightarrow 11k + 4 \equiv 15[5]$

$\Rightarrow b \equiv 0[5] \Rightarrow 5|b$

D'où si $k \equiv 1[5] \Rightarrow 5|a$ et $5|b$ $\Rightarrow 5|a \wedge b$

Or $a \wedge b \in \{1,5\} \Rightarrow a \wedge b = 5$

c) * Si $d = 5 \Rightarrow 5|a$ et $5|b$

$\Rightarrow 5|3+7k$ et $5|4+11k$

$\Rightarrow 5|2(4+11k) - 3(3+7k)$

$\Rightarrow 5|k-1 \Rightarrow k \equiv 1[5]$

Or d'après 4) b) si $k \equiv 1[5] \Rightarrow a \wedge b = 5$

D'où $a \wedge b = 5 \Leftrightarrow k \equiv 1[5]$

Conclusion : on a $a \wedge b \in \{1,5\}$

Si k $\equiv 1[5]$ alors $d = 5$, Si non alors $d \equiv 1[5]$

d) * Si $k = 2012^{2012}$

on a : $2012 \equiv 2[5] \Rightarrow 2012^2 \equiv -1[5]$

$\Rightarrow 2012^{2012} \equiv 1[5] \Rightarrow k \equiv 1[5]$

D'où $d = 5$

Si $k = 2013^{2013}$

On a : $2013 \equiv 3[5] \Rightarrow 2013^2 \equiv 9[5] \Rightarrow 2013^2 \equiv -1[5]$

$\Rightarrow (2013^2)^{1006} \equiv (-1)^{1006}[5]$

$\Rightarrow 2013^{2012} \equiv 1[5]$

$\Rightarrow 2013^{2013} \equiv 3[5] \Rightarrow k \equiv 3[5]$

Alors $d = 1$

21 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) (E) : 3x – 8y = 5

On a (- 1,1) est une solution particulière de (E)

D'où 3x – 8y = 5

$\Leftrightarrow 3x - 8y = 3(-1) - 8(-1) \Leftrightarrow 3(x+1) = 8(y+1)$

On a 8 divise 3(x+1)

8 et 3 sont premiers entre eux } alors d'après le lemme de Gauss on a 8 divise x+1

lors x= - 1 + 8k avec k∈ $\mathbb{Z}$

Pour x = - 1 + 8k

on a $3(x+1) = 8(y+1)$

$\Leftrightarrow 3(-1+8k+1) = 8(y+1)$

$\Leftrightarrow y+1 = 3k$

$\Leftrightarrow y = 3k - 1$

Conclusion : $\boxed{S_{\mathbb{Z}^2} = \{(8k-1, 3k-1); k \in \mathbb{Z}\}}$

2) $\begin{cases} n = 3x+2 \\ n = 8y+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = n-2 \\ 8y = n-7 \end{cases}$

D'où 3x – 8y = (n – 2) – (n – 7) = 5 D'où (x, y) est une solution de (E).

3) On a $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2+3\alpha \\ n = 7+8\beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$

D'après 2/a on a $\alpha = 8k - 1$ et $\beta = 3k - 1$; k∈ $\mathbb{Z}$

D'où

$\begin{cases} n = 2+3\alpha \\ n = 7+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2+3(8k-1) \\ n = 7+2(3k-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1+24k \\ n = -1+24k \end{cases}$

d'où $n \equiv -1[24]$ d'où $n \equiv 23[24]$

<u>Réciproquement :</u>

* Si $n \equiv 23[24]$ alors n=23+24k ; k∈ $\mathbb{Z}$ alors n =2 +21+24k alors n = 2+3(7+8k) alors $n \equiv 2[3]$

* Si $n \equiv 23[24]$ alors n=23+24k ; k∈ $\mathbb{Z}$ alors n =7 +16+24k alors n = 7+8(2+3k) alors $n \equiv 7[3]$

Conclusion : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv 23[24]$

4) a) k∈ IN

on a $2^2 \equiv 1[3] \Rightarrow (2^2)^k \equiv 1^k[3] \Rightarrow 2^{2k} \equiv 1[3]$

on a $7^2 \equiv 1[3] \Rightarrow (7^2)^k \equiv 1^k[3] \Rightarrow 7^{2k} \equiv 1[3]$

b) On a 1991 = 2 + 3 × 663 alors $1991 \equiv 2[3]$ et 1991 = 7 + 8 × 248 alors $1991 \equiv 7[8]$

D'où $\begin{cases} 1991 \equiv 2[3] \\ 1991 \equiv 7[8] \end{cases}$ D'où 1991 est une solution de (S)

On d'après 2)b) $1991 \equiv 23[24] \Rightarrow 1991 \equiv -1[24]$

$\Rightarrow 1991^{2008} \equiv (-1)^{2008}[24]$

$\Rightarrow 1991^{2008} \equiv 1[24]$

$\Rightarrow 1991^{2008} - 1 \equiv 0[24]$

D'où $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24

2éme Méthode :

On a $\begin{cases}1991 \equiv 2[3] \\ 1991 \equiv 7[8]\end{cases}$

alors $\begin{cases}1991^{2008} \equiv 2^{2008}[3] \\ 1991^{2008} \equiv 7^{2008}[8]\end{cases}$

On a d'après 3)a)

$2^{2008} = 2^{2\times1004} \equiv 1[3]$ et $7^{2008} = 7^{2\times1004} \equiv 1[8]$

D'où $\begin{cases}1991^{2008} \equiv 1[3] \\ 1991^{2008} \equiv 1[8]\end{cases}$

Or 3 et 8 sont premiers entres eux alors $1991^{2008} \equiv 1[24]$ alors $1991^{2008} - 1 \equiv 0[24]$

alors 24 divise $1991^{2008} - 1$



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) a) $A \neq E$ et $A \neq F \Rightarrow$ il existe une similitude directe unique S telle S(A) = A et S(E) = F

Soit k le rapport de f et θ une mesure de son angle

$k = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{2}$ et $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}}\right)[2\pi]$, avec

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{AE \times AF} = 0$ et

$\sin\theta = \frac{d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right)}{AE \times AF} = -1 \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $S\left(\left(O,\vec{u}\right)\right)$ est la perpendiculaire à $\left(O,\vec{u}\right)$ passant par $S(E) = F \Rightarrow S\left(\left(O,\vec{u}\right)\right) = \left(O,\vec{v}\right)$

c) $N \in \left(O,\vec{u}\right) \cap (AN)$

$\Rightarrow S(N) \in \left(O,\vec{v}\right) \cap (d)$

Où (d) est la perpendiculaire à (AN) passant par $S(A) = A \Rightarrow (d) = (AP)$

$\Rightarrow S(N) \in \left(O,\vec{v}\right) \cap (AP) = \{P\} \Rightarrow S(N) = P$

d) M(z) et M′(z′)
S est une similitude directe
$\Rightarrow z' = az + b$

Où $a = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}i$

et $b = (1-a)\times z_A = \left(1 + \frac{3}{2}i\right)(3+2i) = \frac{13}{2}i$

2) a) N (x, 0) et P (0, y)

$S(N) = P \Leftrightarrow iy = -\frac{3}{2}ix + \frac{13}{2}i \Leftrightarrow 3x + 2y = 13$

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont entières revient à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation 3x + 2y = 13

les points E et F peuvent nous donner le couple (3, 2) comme solution particulière de cette équation

$3x + 2y = 13$ et $3 \times 3 + 2 \times 2 = 13 \Rightarrow 3(x-3) = 2(2-y) \Rightarrow 3 \mid 2(2-y)$ or $3 \wedge 2 = 1$ alors d'après le lemme de Gauss on a : $3 \mid 2 - y \Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2 - y = 3k \Rightarrow y = 2 - 3k$

Or $3(x-3) = 2(2-y) \Rightarrow x = 3 + 2k$

Inversement on vérifier que (3 + 2k, 2 − 3k) sont des solutions de l'équation ($k \in \mathbb{Z}$)

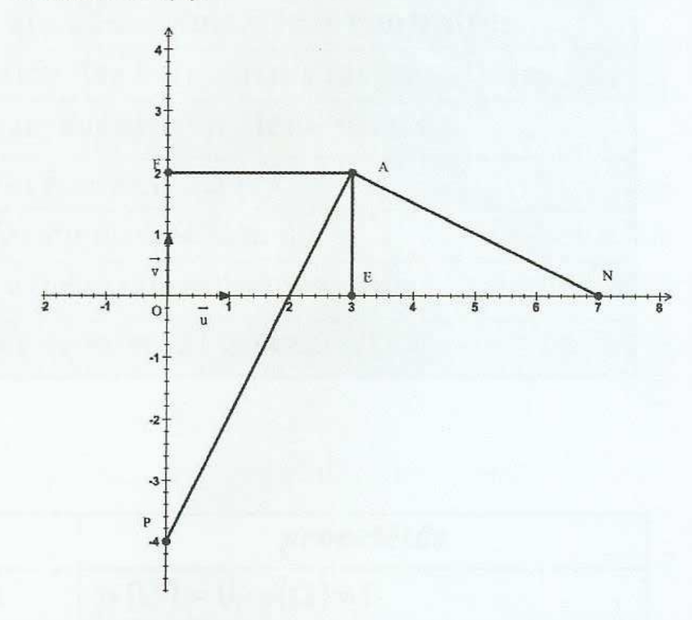
D'où N(3 + 2k, 0) et P(0, 2 − 3k) ; $k \in \mathbb{Z}$



SUR LE CHEMIN DU BAC

1) $7x + 18y = 9$, $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

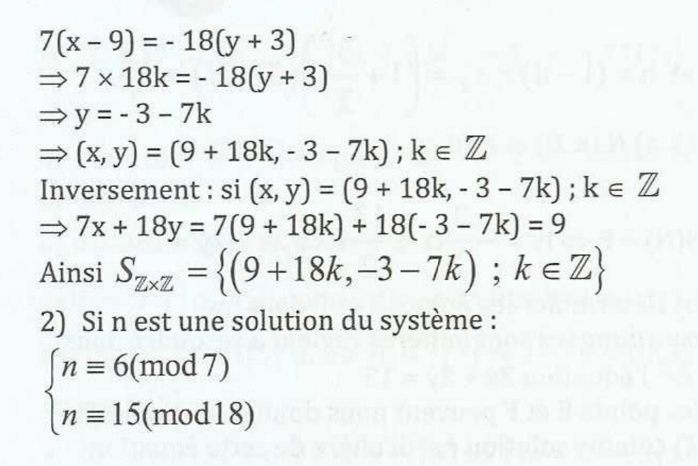
a) $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 63 - 54 = 9 \Rightarrow (9, -3)$ est une solution de (E).



b) (x, y) est une solution de (E) $\Rightarrow 7x + 18y = 9$ or $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$

$\Rightarrow 7 \times (x-9) + 18 \times (y+3) = 0 \Rightarrow 7(x-9) = -18(y+3) \Rightarrow 18 \mid 7(x-9)$ or $18 \wedge 7 = 1$

$\Rightarrow 18 \mid x - 9 \Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 9 = 18k \Rightarrow x = 9 + 18k$



7(x – 9) = - 18(y + 3)

$\Rightarrow$ 7 × 18k = - 18(y + 3)

$\Rightarrow$ y = - 3 – 7k

$\Rightarrow$ (x, y) = (9 + 18k, - 3 – 7k) ; k $\in \mathbb{Z}$

Inversement : si (x, y) = (9 + 18k, - 3 – 7k) ; k $\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ 7x + 18y = 7(9 + 18k) + 18(- 3 – 7k) = 9

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(9+18k, -3-7k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) Si n est une solution du système :

$$\begin{cases} n \equiv 6 (\text{mod } 7) \\ n \equiv 15 (\text{mod } 18) \end{cases}$$

3) $\Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 + 7x \\ n = 15 + 18y \end{cases} ;\ (x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ 7x – 18y = 9 ; (x, y) $\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ (x, y) = (9 + 18k, 3 + 7k) ; k $\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ n = 6 + 7x = 69 + 126k ; k $\in \mathbb{Z}$

Inversement : si n = 69 + 126k ; k $\in \mathbb{Z}$ alors

n – 6 = 63 + 126k = 7(9 + 18k)

$\Rightarrow$ n $\equiv$ 6 (mod 7)

n – 15 = 54 + 126k = 18(3 + 7k)

$\Rightarrow$ n $\equiv$ 15 (mod 18)

Ainsi n est une solution du système

Probabilités

I)Résumé du cours

1)définitions et propriétés

Définition :

Soit $\Omega=\{a_1, a_2, ...a_n\}$ un univers. On associe à chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre $p_i \geq 0$, appelé **« probabilité de l'événement $\{a_i\}$ »**, de telle sorte que :

$$p_1+p_2+......+p_n=1.$$

Plus généralement, la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

On a $p(\Omega)=1$ et $p(\emptyset)=0$.

Langage :

Vocabulaire ensembliste	*Langage probabiliste*
• Ensemble Ω	**Univers,** ou encore univers des « possibles » ou des « éventualités »
• $A\subset\Omega$	A est un **événement**
• $x\in A$	x est une **éventualité favorable** à A
• $A\subset\Omega$ $\quad \overline{A}\subset\Omega$	A et $\overline{A}$ sont des **événements contraires**
• $A\cap C=\emptyset$	A et C sont des événements **incompatibles**
• Singleton $\{x\}$	$\{x\}$ est un événement **élémentaire**
• $D=A\cap C$	D est l'événement « A et C »
• $F=A\cup C$	F est l'événement « A ou C »
• $\emptyset$	$p(\emptyset)=0$ événement **impossible**
• Ω	$p(\Omega)=1$ événement **certain**

Propriétés des probabilités

Parties de Ω	*événement*	*propriétés*
$\emptyset, \Omega$	Evénement **impossible, certain**	$p(\emptyset)=0,\ p(\Omega)=1$
$A\cap B=\emptyset$	A et B sont **incompatibles**	$P(A\cup B)=p(A)+p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A	$p(\overline{A})=1-p(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

On notera que, pour tout événement A, $0\leq p(A)\leq 1$.

Situations d'équiprobabilités :

Définition

Il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

2)Probabilité conditionnelle :

Définition :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω.

A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle.

▪ On appelle ***probabilité conditionnelle*** de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté $p\ (A/B)=\frac{P\ (A\cap B)}{p\ (B)}$.

▪ Le réel p(A /B) se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi probabilité de A sachant B.

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

C'est le **principe des probabilités composées**

Arbres pondérés

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est **1**.

La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Indépendance

Événements indépendants

Définition :

A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

▪ A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.

▪ A et B sont ***indépendants*** si et seulement si p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B).

Théorème :

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :

$$p(A/B) = p(A) \text{ ou } p(B/A) = p(B) \text{ ou } p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Remarque :

Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B)= p(A)p(B)$
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B= \emptyset$.

Probabilités totales

Définition :

Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier ≥ 2.

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une ***partition*** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ;\dots ; n\}$, $A_i \neq \emptyset$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;\dots n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors :

$$\mathbf{p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)}$$

$$\textbf{Ou}\quad \mathbf{p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots\dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)}.$$

3) Variables aléatoires

Pour décrire le résultat d'une expérience aléatoire associée à un univers Ω, on fait souvent correspondre un nombre à chaque élément de Ω.

Aléa numérique (Variable aléatoire). Loi de probabilité

Définition :

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.

On appelle **aléa numérique X** défini sur Ω une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X. $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

La **loi de probabilité de X** est l'application qui à tout élément x de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x ».

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Espérance mathématique

Définition

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$.

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre E(X) défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_i\, x_i)$.

Remarque :

L'espérance mathématique est la moyenne des x_i pondérées par les probabilités $p_i = p(X = x_i)$.

Dans le cas où la variable aléatoire X indique le gain algébrique réalisé dans un jeu, on dit que le jeu est :

- équitable si $E(X) = 0$
- favorable ou gagnant si $E(X) > 0$
- défavorable ou perdant si $E(X) < 0$

Propriétés :

Soient X et Y deux aléas numériques définies sur Ω et a un réel. L'espérance des variables aléatoires X + Y et a X est donnée par :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(a\,X) = a\,E(X).$$

Variance, écart type

Variance :

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$.

On appelle **variance** de X, le nombre noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 - E(X)^2.$$

Propriétés :

$V(X) \geq 0$.

$V(X + a) = V(X)$.

$V(a\,X) = a^2\, V(X)$.

L'écart type

L'écart type d'un aléa numérique X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Fonction de répartition

Définition

Soit un aléa numérique X défini sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

La fonction de répartition F de X est la fonction de IR vers [0 ; 1] qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :

$F(x) = p\,(X \leq x)$.

La fonction de répartition est constante par intervalles.

Loi Binomiale :

Définitions :

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors X $(\Omega) = \{0,1,2,.....,n\}$

et on a : $\boxed{\text{pour tout } k \in \{0,1,......,n\}, p(X=k) = C_n^{\ k} \times \left[p(S)\right]^k \times \left[p(E)\right]^{n-k}}$

$\rightarrow$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note B (n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors E (X) = $n \times p$

V (X) = $np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$

σ (X) = $\sqrt{npq}$

4) Lois de probabilités continues :

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de IR.

On s'intéresse alors à des événements du type : << La valeur de X est comprise entre les réels a et b >> Nous noterons $(a \le X \le b)$ un tel événement.

Densité :

On appelle densité de probabilité continue la fonction f positive et continue sur [a, b] telle que :

$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x et y de [a, b], on a $p(x \le X \le y) = \int_x^y f(t)dt$.

Exemples de variables aléatoires continues

Loi uniforme :

Définition :

Soit un intervalle $[a,b]$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a,b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d f(x)dx$.

Conséquences :

- $p([a,b])=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1$
- Pour tout réel x_0 de $[a,b]$ on a : $p(\{x_0\})=\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx=0$
- $p([a,b])=p(]a,b])=p([a,b[)=p(]a,b[)$.
- si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $p(\overline{[c,d]})=1-p([c,d])$.

Définition :

on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme p

si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx=\frac{d-c}{b-a}$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi uniforme :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a,b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F:IR\mapsto[0,1]$ définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<a\\ p(a\le X\le x) & si\ x\in[a,b]\\ 1 & si\ x>b\end{cases}$$

Loi exponentielle :

Définition :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel

$$p([c,+\infty[)=\lim_{x\to+\infty}\int_c^x \lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda c}$$

Propriétés :

- pour tout réel $t>0$, $p([0,t])=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda t}$.
- $p([t,+\infty[)=1-p([0,t])=e^{-\lambda t}$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,

si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$ et $p(X\ge c)=e^{-\lambda c}$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi exponentielle :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p sur de paramètre λ.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : IR \mapsto [0,1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ p(0 \le X \le x) = 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

***Exercice rédigé* :**

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$p(X > 10) = 1 - p(X \le 10) = 1 - \int_0^{10} 0{,}1 e^{-0{,}1t} dt = \frac{1}{e}.$$

b) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$p(X > 12 \ / \ x > 10) = \frac{p(X > 12)}{p(X > 10} = \frac{e^{-0{,}1\times 12}}{e^{-0{,}1\times 10}} = e^{-0{,}2} \simeq 0{,}82.$$

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$p(X > 2) = 1 - p(X \le 2) = 1 - \int_0^{2} 0{,}1 e^{-0{,}1\,t} dt = e^{-0{,}2} \simeq 0{,}82$$

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge. On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.

II)Exercices :



Pour chacune des questions suivantes, une et une seule affirmation est exacte. **Cocher la bonne réponse. Question 1** On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci – dessous : 0.3 A : B, $\overline{B}$; $\overline{A}$: B, 0.8 $\overline{B}$ Sachant que p(B) = 0.41 alors P(B|A) =	P(B|A) = 0.3.	P(B|A) = 0.9.	P(B|A) = 0.6.

Question 2 A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que $p(B \cap A) = \frac{1}{6}$ et $p(B/A) = 0.25$. Combien vaut $p(A)$?	$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$
Question 3 Une loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessous. x_i : 1, 2, 3, 4 p_i : 0,2, 0,4, 0,1, 0,3 On a alors :	$V = \frac{5}{4}$	$\mu = 2$	$\sigma = \frac{\sqrt{5}}{4}$
Question 4 Soient C et D deux évènements indépendants. On donne $p(C) = \frac{1}{3}$ et $p(D) = \frac{1}{12}$. On a alors :	$p(C \cap D) = \frac{5}{12}$	$p(C \cup D) = \frac{7}{18}$	$p(C/D) = \frac{1}{36}$
Question 5 On lance, dix fois de suite, un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. La probabilité que la face numérotée « 2 » apparaisse au moins une fois est égale à	$\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$
Question 6 La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.01. Alors :	La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(t) = e^{-0.01t}$	Pour tout réel t positif, $P(Y \le t) = 1 - e^{-0.01t}$	La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0.01 prés, égale à 0.16



Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.

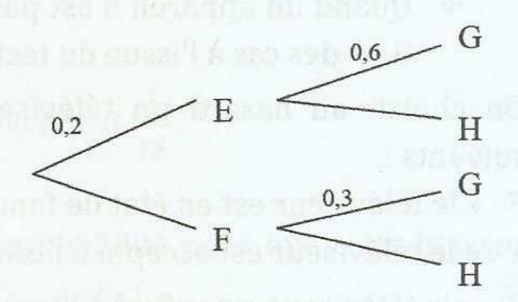
	Cadres	Employés
Hommes		25
Femmes	8	15

On interroge une personne au hasard.

Quelle est la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre ?



APPLIQUER



On considère l'arbre de probabilité ci – contre :

Quelle est la probabilité de p (F|H) ?



APPLIQUER

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1) La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 b. 0,75 c. $\frac{1}{150}$.

2) Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 b. 0,8 c. 0,4

3) La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :

a. 1,15 b. 0,4 c. 0,3

4) La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 b. 0,7 c. 0,475

5) La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\frac{4}{150}$ b. $\frac{12}{19}$ c. 0,3

6) Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^{20}$ b. $20\times0,75$ c. $0,75\times(0,25)^{20}$

5

S'ENTRAINER

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement.

On fait subir à chaque appareil un test de contrôle.

On constate que :

✦ Quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test ;

✦ Quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test.

On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise. On définit les évènements suivants :

F : « le téléviseur est en état de fonctionnement » ;

T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test » ;

$\overline{T}$: «le téléviseur est refusé à l'issue du test ».

1) Construire l'arbre pondéré qui modélise la situation de l'exercice.

2) Quelle est la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement ?

3) a) Quelle est la probabilité q'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement ?

b) Calculer la probabilité q'un téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement.

c) Calculer la probabilité q'un téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement.

4) En déduire la probabilité pour que le téléviseur soit refusé à l'issue du test.

5) Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test ?



6 S'ENTRAINER

Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client.

Cette machine distribue soit du café, soit du jus d'orange, soit du thé en suivant une programmation erronée.

Chaque boisson peut être sucrée ou non.

✦ La probabilité d'obtenir un café est $\frac{1}{2}$.

✦ La probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$.

✦ Si l'on obtient un café, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$.

✦ Si l'on obtient un jus d'orange, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.

✦ La probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$.

Soit les évènements suivants :

C : « On a obtenu un café » ; T : « On a obtenu un thé » ; J : « On a obtenu un jus d'orange » ;

S : « La boisson obtenue est sucrée ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation.

2) Calculer la probabilité d'obtenir un café sucré.

3) Démontrer que la probabilité d'obtenir un jus d'orange sucré est $\frac{1}{18}$.

4) En déduire la probabilité d'obtenir un jus d'orange.

5) Une personne obtient une boisson sucrée. Quelle est la probabilité pour que cette boisson soit un thé ?



7 SE PERFECTIONNER

Un gardien de but doit faire face lors d'une démonstration à certains nombres de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- S'il a arrêté le nième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le n + 1 ième) est 0,8.
- S'il a laisser passer le nième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A_n l'événement « le gardien arrête le nième tir ». On a donc $p(A_1) = 0,7$.

1) a) Donner pour n ≥ 1, les valeurs de $p\left(A_{n+1} \middle| A_n\right)$ et $p\left(A_{n+1} \middle| \overline{A_n}\right)$

b) Exprimer $p\left(A_{n+1} \cap A_n\right)$ et $p\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$ en fonction de $p\left(A_n\right)$

c) En déduire que pour tout n ≥ 1, $p\left(A_{n+1}\right) = 0,2 \times p\left(A_n\right) + 0,6$.

2) On pose, à présent, $p_n = p\left(A_n\right)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

c) Montrer que (p_n) admet une limite que l'on calculera.



8 SE PERFECTIONNER

Une urne contient trois boules blanches et quatre boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

I) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir exactement deux boules blanches ».

B : « Obtenir au moins une boule blanche ».

2) On considère l'aléa numérique X qui à chaque tirage simultané de trois boules associe le nombre de boules blanches tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

II) On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de l'événement suivant :

C : « Obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage ».



9 SE PERFECTIONNER

Une boite A contient quatre boules portant les nombres : -2, -2, 0, 1. Une deuxième boite B contient aussi quatre boules portant les nombres : -2, 1, 1, 0.

Toutes les boules des deux boites sont indiscernables au toucher.

1) On tire de chaque boite une boule et on note X le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.

a) Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique ainsi que sa variance.

b) Calculer la probabilité de l'événement S : « X est strictement positif ».

2) n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en conservant pour chaque épreuve les mêmes conditions. On note Y l'aléa numérique égal au nombre de fois où S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « S est réalisé au moins une fois ».

c) Déterminer n pour que la probabilité de l'événement A soit supérieure ou égale à 0,9.

3) Soit à présent l'épreuve suivante : on choisit une boite au hasard (les choix étant équiprobables) et on tire une boule ; quelle est la probabilité qu'elle porte le nombre 1.



10 SE PERFECTIONNER

1) Une urne contient deux boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne.

On note A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

Déterminer n pour que la probabilité de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

2) Dans toute la suite de l'exercice on prendra n = 4.

➢ A) Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

A_0 l'événement : «le joueur a tiré deux boules noires ».

A_1 l'événement : «le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche».

A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements A_0 et A_1.

b) Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée. Soit X le nombre de points marqués.

i) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X.

ii) Représenter la fonction de répartition de X.

➢ B) Après ce tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées, puis effectue un nouveau tirage de deux boules simultanément.

Soit B_i l'événement : « obtenir i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » (i=0, 1 ou 2).

a) Calculer $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.

b) Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.

c) En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

d) Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$.

e) En déduire $p(B_1)$.



SE PERFECTIONNER

d_1, d_2 et d_3 sont trois dés cubiques parfaits. d_1 porte les chiffres : 0, 1, 1, 1, 1, 1 ; d_2 porte les chiffres : 0, 0, 2, 2, 2, 2 et d_3 porte : 0, 0, 0, 3, 3, 3.

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules blanches indiscernables au toucher.

1) On prend au hasard un des trois dés, on le lance et on note le chiffre paru n.

On considère les évènements : A = « n est pair » et pour $i \in \{1,2,3\}$ $D_i =$ " le dé lancé est d_i ".

On suppose que $p(D_1) = p(D_2) = p(D_3) = \frac{1}{3}$.

a) Chercher $p(A/D_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$. En déduire que $p(A) = \frac{5}{9}$.

b) Chercher $p(D_1/A)$ et $p(D_1 \cap \overline{A})$.

2) On continue l'épreuve comme suit : si l'événement A est réalisé, on tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne, dans le cas contraire, on tire simultanément 2 boules de l'urne. X est l'aléa numérique qui prend comme valeur le nombre de boules rouges obtenues.

a) Chercher $p[(X=0)/A]$, $p[(X=0)/\overline{A}]$, $p[(X=2)/A]$ et $p[(X=2)/\overline{A}]$.

b) Déterminer la loi de probabilité de l'aléa numérique X.



SUR LE CHEMIN DU BAC

Une urne contient deux jetons blancs numérotés 1 ; -1 et trois jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; -1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux jetons de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

B : « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro ».

b) On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton titré et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré.

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les plans P et P' d'équations respectives : x +ay + b = 0 et x +by – a = 0.

Calculer la probabilité des événements suivants :

C : « P et P' sont parallèles ».

D : « P et P' sont perpendiculaires ».



SUR LE CHEMIN DU BAC

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans U_1 il y a deux boules rouges et huit boules blanches et dans U_2 il y a une boule rouge et deux boules blanches.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2. On considère les événements suivants :

R_1 : « La boule tirée de U_1 est rouge »

R_2 : «La boule tirée de U_2 est rouge »

A : « à la fin de l'épreuve U_2 ne contient plus de boule rouge ».

a) Calculer $p\left(R_1\right)$ et $p\left(R_2\right)$.

b) Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{5}$.

2) On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans leur urne d'origine. On considère l'aléa numérique X défini par le nombre de fois où A est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.

3) Une nouvelle épreuve consiste à tirer une boule de U_1 :

- Si elle est rouge on la garde et on tire une seconde boule de U_2.
- Si elle est blanche, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

Soit Y l'aléa numérique égal au nombre de boules rouges obtenues à l'issue de l'épreuve.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Représenter sa fonction de répartition dans un repère orthogonal du plan.



14 SUR LE CHEMIN DU BAC

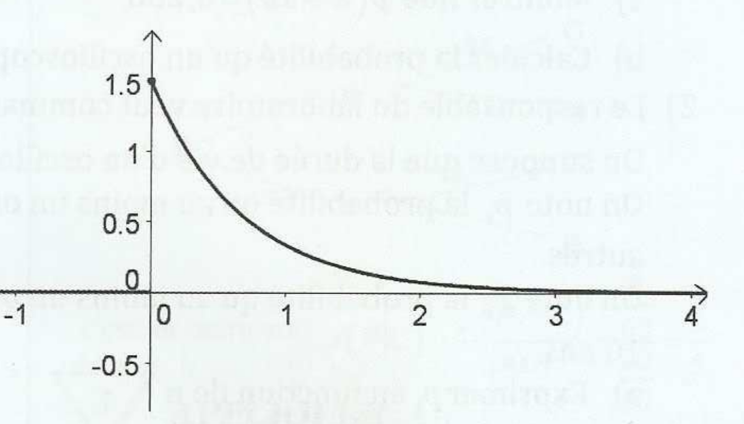
Partie A

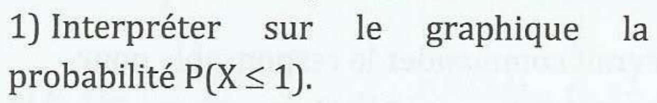
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètreλ.

On rappelle que pour tout réel positif a,

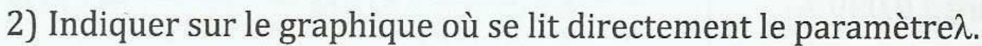
$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

La courbe donnée ci-contre représente la fonction densité de probabilité de X.

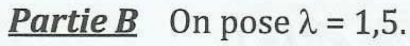




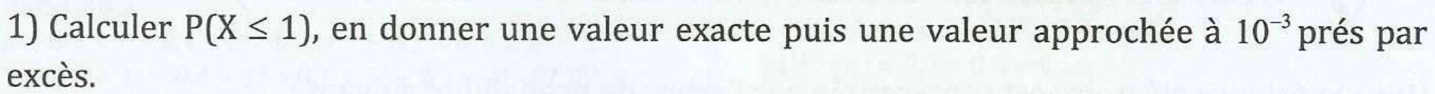
1) Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.



2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètreλ.



Partie B On pose $\lambda = 1,5$.



1) Calculer $P(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} prés par excès.

2) Calculer $P(X \geq 2)$.

3) Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leq X \leq 2) \approx 0,173$ à 10^{-3} prés.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixième de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.

On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1) On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égal à 0,915 à 10^{-3} prés.

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subit une rectification ?

2) On prélève d'une manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?



15 SUR LE CHEMIN DU BAC (*Session principale 2012*)

Un laboratoire de science physique dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'année, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par default

1)

a) Montrer que $p(X>10)=0,286$

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n\geq 2$)

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

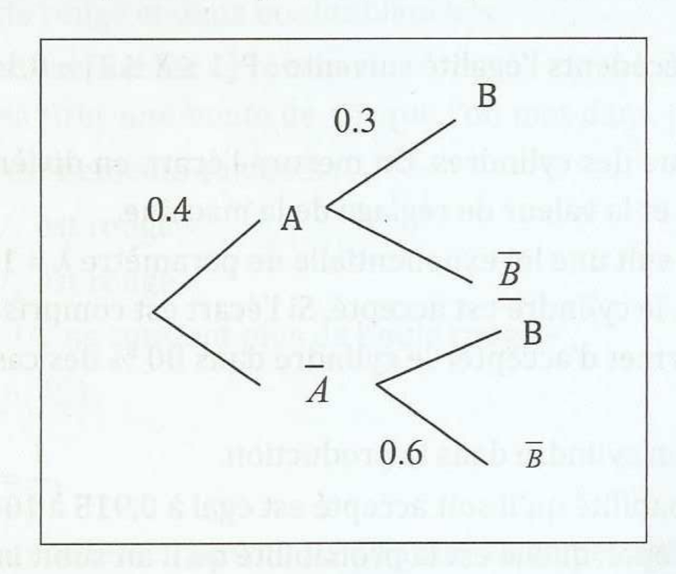
a) Exprimer p_1 en fonction de n

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?



SUR LE CHEMIN DU BAC (*Session de contrôle 2012*)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

- $p(\overline{A})=0,6$
- la probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7
- $p(B)=0,7$
- $p(A\cup B)=0,6$



1 QCM ; VRAI OU FAUX

Question 1

$P(B) = p(A) \times p(B \mid A) + p(\overline{A}) \times p(B \mid \overline{A})$

$\Rightarrow p(B \mid A) = \dfrac{p(B) - p(\overline{A}) \times p(B|\overline{A})}{p(A)}$

$\Rightarrow p(B \mid A) = \dfrac{0.41 - 0.7 \times 0.2}{0.3} = 0.9$

Question 2

$p(B \cap A) = \dfrac{1}{6}$ et $p(B/A) = 0.25$

$p(B|A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} \Rightarrow p(A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B|A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Question 3

$\mu = 0.2 \times 1 + 0.4 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.3 \times 4 = 2.5$

$V = 0.2 \times 1^2 + 0.4 \times 2^2 + 0.1 \times 3^2 + 0.3 \times 4^2 - (2.5)^2$

$\Rightarrow V = 1.25 = \dfrac{5}{4}$

Question 4

$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D)$

Avec $p(C \cap D) = p(C) \times p(D) = \dfrac{1}{36}$

$\Rightarrow p(C \cup D) = \dfrac{7}{18}$

Question 5

Soit p la probabilité que la face numérotée « 2 » n'apparaisse aucune fois

$P = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}$

Soit q la probabilité que la face numérotée « 2 » apparaisse au moins une fois

$q = 1 - p = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}$

Question 6

La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.01. Alors :

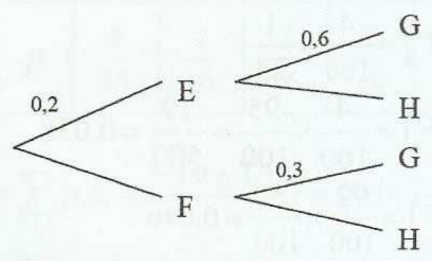
Pour tout réel t positif, $P(Y \le t) = 1 - e^{-0.01t}$

2 APPLIQUER

	Cadres	Employés	Total
Hommes	12	25	37
Femmes	8	15	23
Total	20	40	60

On interroge une personne au hasard.

La probabilité que ce soit une femme sachant que



c'est un cadre est : $p(F|C) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{8}{60}}{\frac{20}{60}} = \dfrac{2}{5}$

3 APPLIQUER

p (F|H) ?

p (E) = 0.2 $\Rightarrow$ p (F) = 0.8

p (H|E) = 0.4 ; p (H|F) = 0.7

$p(H) = p(H \cap E) + p(H \cap F)$

$= 0.4 \times 0.2 + 0.7 \times 0.8 = 0.64$

$p(H \cap F) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

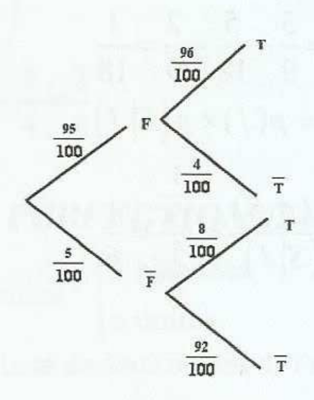
$p(F|H) = \dfrac{0.56}{0.64} = \dfrac{7}{8}$

4 APPLIQUER

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est : b. 0,75
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est : c. 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est : c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est : c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est : b. $\dfrac{12}{19}$
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est : a. $1-(0,25)^{20}$

5 S'ENTRAINER

1.



1. $p\left(\overline{F}\right)=\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{20}$

2. a) $p\left(\overline{T}\middle|\overline{F}\right)=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25}$

b) $p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)=\dfrac{4}{100}\times\dfrac{95}{100}=\dfrac{19}{500}=0.038$

c) $p\left(\overline{T}\cap F\right)=\dfrac{92}{100}\times\dfrac{5}{100}=0.046$

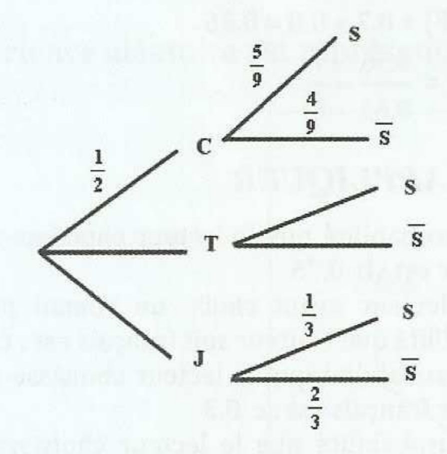
3. $p\left(\overline{T}\right)=p\left(\overline{T}\cap F\right)+p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)$
$=0.038+0.046=0.084$

4. $p\left(F\middle|\overline{T}\right)=\dfrac{p\left(\overline{T}\cap F\right)}{p\left(\overline{T}\right)}=\dfrac{0.038}{0.084}=\dfrac{19}{42}$



S'ENTRAINER

1.



$p(T\cap S)=\dfrac{2}{9}$; $p(S|C)=\dfrac{5}{9}$;

$p(S|J)=\dfrac{1}{3}$; $p(S)=\dfrac{5}{9}$

1. $p(C\cap S)=p(C)\times p(S|C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{18}$

2. $p(S)=p(C\cap S)+p(T\cap S)+p(J\cap S)$
$\Rightarrow p(J\cap S)=p(S)-p(C\cap S)-p(T\cap S)$
$\Rightarrow p(J\cap S)=\dfrac{5}{9}-\dfrac{5}{18}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{18}$

3. $p(J\cap S)=p(J)\times p(S|J)$

$\Rightarrow p(J)=\dfrac{p(J\cap S)}{p(S|J)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{6}$

4. $p(T|S)=\dfrac{p(T\cap S)}{p(S)}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{2}{5}$

7 SE PERFECTIONNER

1. $p\left(A_{n+1}\middle|A_n\right)=0.8$; $p\left(A_{n+1}\middle|\overline{A_n}\right)=0.6$

b) $p\left(A_{n+1}\cap A_n\right)=p\left(A_n\right)\times p\left(A_{n+1}\middle|A_n\right)$
$=0.8\times p\left(A_n\right)$

$p\left(A_{n+1}\cap\overline{A_n}\right)=p\left(\overline{A_n}\right)\times p\left(A_{n+1}\middle|\overline{A_n}\right)$
$=0.6\times\left(1-p\left(A_n\right)\right)$

c) $p\left(A_{n+1}\right)=p\left(A_{n+1}\cap A_n\right)+p\left(A_{n+1}\cap\overline{A_n}\right)$
$=0{,}2\times p\left(A_n\right)+0{,}6$

2. $p_n=p\left(A_n\right)$ et $u_n=p_n-0{,}75$.

a) $u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}75=0.2p_n+0.6-0.75$
$=0.2p_n-0.15=0.2\left(p_n-0.75\right)=0.2u_n$

$\Rightarrow\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,2.

b) $u_n=u_1\times q^{n-1}=\left(p_1-0.75\right)\times(0.2)^{n-1}$
$\Rightarrow u_n=-0.05\times(0.2)^{n-1}$

c) $p_n=u_n+0{,}75=0.75-0.05\times(0.2)^{n-1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.2)^{n-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0.75$



SE PERFECTIONNER

7 boules : $\begin{cases}3 \text{ blanches}\\ 4 \text{ noires}\end{cases}$

I. Tirage simultané de 3 boules :

1. A : « Obtenir exactement deux boules blanches ».

$p(A)=\dfrac{C_3^2\times C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{3\times4}{35}=\dfrac{12}{35}$

B : « Obtenir au moins une boule blanche ».

$\overline{B}$: « Aucune boule blanche »

$p(B)=1-p\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

2. X = nombre de boules blanches tirées parmi les trois boules tirées

a) Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2 ou 3

b) (X = 0) : « Les trois boules sont noires »

$\Rightarrow p(X=0) = \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{4}{35}$

(X = 1) : « Une blanche et deux noires »

$\Rightarrow p(X=1) = \dfrac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$

(X = 2) : « Deux blanches et une noire »

$\Rightarrow p(X=2) = \dfrac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$

(X = 3) : « Les trois boules sont blanches »

$\Rightarrow p(X=3) = \dfrac{C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3	Total
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

c) $E(X) = \sum_i p_i x_i = \dfrac{18+24+3}{35} = \dfrac{45}{35} = \dfrac{9}{7}$

II. Tirage successif et sans remise de trois boules de l'urne :

C : « Obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage ».

C : (noire, noire, blanche)

$\Rightarrow p(C) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{35}$



9 SE PERFECTIONNER

$A : \begin{cases} -2, -2 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$; $B : \begin{cases} -2 \\ 1, 1 \\ 0 \end{cases}$

1. Tirage d'une boule de chaque boite :

X = produit des numéros marqués sur chaque boule

a) $X(\Omega) = \{-2, 0, 1, 4\}$

(X = -2) : « -2 de A et 1 de B ou 1 de A et -2 de B »

$\Rightarrow p(X=-2) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{16}$

(X = 0) : « 0 de A et un non nul de B ou un non nul de A et 0 de B ou 0 de A et 0 de B »

$\Rightarrow p(X=0) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{16}$

(X = 1) : « 1 de A et 1 de B »

$\Rightarrow p(X=1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{8}$

(X = 4) : « -2 de A et -2 de B »

$\Rightarrow p(X=4) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

x_i	-2	0	1	4	Total
p_i	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	1

$E(X) = \sum_i p_i x_i = \dfrac{-10+2+8}{16} = 0$

$V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - (E(X))^2$

$= \dfrac{20+2+32}{16} = \dfrac{54}{16} = \dfrac{27}{8}$

b) S : « X est strictement positif »

$P(S) = p(X=1) + p(X=4) = \dfrac{2}{16} + \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{4}$

2. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en conservant pour chaque épreuve les mêmes conditions

Y l'aléa numérique égal au nombre de fois où S est réalisé.

a) Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(S) = \dfrac{1}{4}$

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\ldots, n\}$

$P(Y=k) = C_n^k \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^k \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-k}$;

$k \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots, n\}$

b) A : « S est réalisé au moins une fois »

$\overline{A}$: « S n'est réalisé aucune fois »

$\Rightarrow \overline{A} = (Y=0) \Rightarrow p(\overline{A}) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\Rightarrow p(A) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

c) $p(A) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \geq 0.9 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leq 0.1$

$\Rightarrow n \geq \dfrac{\ln(0.1)}{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)} \Rightarrow n \geq 8.004 \Rightarrow n \in \{9, 10, 11, \ldots\ldots\}$

3. $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{8}$

10 SE PERFECTIONNER

I. $(n+2)$ boules : $\begin{cases} 2 \text{ blanches} \\ n \text{ noires} \end{cases}$

Tirage simultané de deux boules de l'urne :

A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches »

$$p(A_2)=\frac{C_2^2}{C_{n+2}^2}=\frac{1}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

$$p(A_2)=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{15}$$

$\Leftrightarrow n^2+3n-28=0\Leftrightarrow n=-7$ ou $n=4$

Or $n\in IN\Rightarrow n=4$

II. 6 boules : $\begin{cases}2 \text{ blanches}\\ 4 \text{ noires}\end{cases}$

A) Tirage simultané de deux boules de l'urne :

a) A_0 l'événement : «le joueur a tiré deux boules noires »

$$p(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

A_1 l'événement : «le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche»

$$p(A_1)=\frac{C_4^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$$

b) Le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée

X le nombre de points marqués

i) $X(\Omega)=\{4, 5, 6\}$

(X = 4) : « Les deux boules tirées sont noires »

$P(X=4)=p(A_0)=\frac{2}{5}$

(X = 5) : «Le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche»

$P(X=5)=p(A_1)=\frac{8}{15}$

(X = 6) : « le joueur a tiré deux boules blanches »

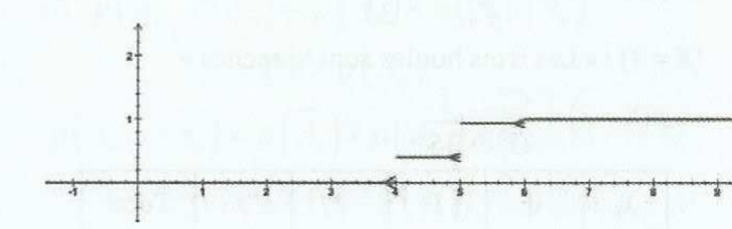
x_i	4	5	6	Total
p_i	$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$P(X=6)=p(A_2)=\frac{1}{15}$

$$E(X)=\sum_i p_i x_i=\frac{24+40+6}{15}=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$$

ii) Soit F la fonction de répartition de X :

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in\ ]-\infty,4[\\ \frac{6}{15} \text{ si } x\in[4,5[\\ \frac{14}{15} \text{ si } x\in[5,6[\\ 1 \text{ si } x\in[6,+\infty[\end{cases}$$



B) B_i l'événement : « obtenir i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » (i = 0, 1 ou 2)

a) $p(B_0/A_2)=1$

b) $\Rightarrow p(B_0\cap A_2)=p(A_2)\times p(B_0/A_2)=\frac{1}{15}$

c) $p(B_0/A_1)=\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow p(B_0\cap A_1)=p(A_1)\times p(B_0/A_1)=\frac{8}{15}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{75}$

$p(B_0/A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$p(B_0\cap A_0)=p(A_0)\times p(B_0/A_0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

d) $p(B_0)=p(B_0\cap A_0)+p(B_0\cap A_1)+p(B_0\cap A_2)=\frac{41}{75}$

e) $p(B_2)=p(A_0)\times p(B_2/A_0)+p(A_1)\times p(B_2/A_1)+p(A_2)\times p(B_2/A_2)$

Avec $p(B_2/A_0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$; $p(B_2/A_1)=0$; $p(B_2/A_2)=0$.

$\Rightarrow p(B_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{15}=\frac{2}{75}$

f) $p(B_1)=1-p(B_0)-p(B_2)=\frac{32}{75}$

11 SUR LE CHEMIN DU BAC

d_1 : 0, 1, 1, 1, 1, 1

d_2 : 0, 0, 2, 2, 2, 2

d_3 : 0, 0, 0, 3, 3, 3

Urne : 10 boules $\begin{cases} 4 \text{ rouges} \\ 6 \text{ blanches} \end{cases}$

1. On prend au hasard un des trois dés, on le lance et on note le chiffre paru n.

A = « n est pair »

$D_i =$ " le dé lancé est d_i "

On suppose que $p(D_1) = p(D_2) = p(D_3) = \dfrac{1}{3}$

a) $p(A/D_1) = \dfrac{1}{6}$; $p(A/D_2) = 1$ et $p(A/D_3) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ p(A) = $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times 1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{9}$

b) $p(D_1/A) = \dfrac{p(D_1 \cap A)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{1}{10}$

$p(D_1 \cap \overline{A}) = p(D_1)\times p(\overline{A}|D_1) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{18}$

2. Si l'événement A est réalisé, on tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne, dans le cas contraire, on tire simultanément 2 boules de l'urne.

X est l'aléa numérique qui prend comme valeur le nombre de boules rouges obtenues.

a) $p[(X=0)/A] = \dfrac{6}{10}\times\dfrac{6}{10} = \dfrac{9}{25}$

$p[(X=0)/\overline{A}] = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

$p[(X=2)/A] = \dfrac{4}{10}\times\dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{25}$

$p[(X=2)/\overline{A}] = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

b) $p(X=0) = \dfrac{5}{9}\times\dfrac{9}{25}+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{47}{135}$

$p(X=2) = \dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{25}+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{2}{15} = \dfrac{20}{135}$

$\Rightarrow p(X=1) = 1 - \dfrac{47}{135} - \dfrac{20}{135} = \dfrac{68}{135}$

12 SUR LE CHEMIN DU BAC

5 jetons : $\begin{cases} 2 \text{ blancs} : 1, -1 \\ 3 \text{ noirs} : 1, 1, -1 \end{cases}$

1. Tirage simultané de 2 jetons de l'urne :

a) A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

$p(A) = \dfrac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

B : « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro ».

$\Rightarrow$ B : « Obtenir les 2 jetons noirs numérotés 1 »

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$

b) X = somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés

X (Ω) = {-2, 0, 2}

(X = -2) : « Les deus jetons portent le numéro -1 »

$\Rightarrow$ p(X = -2) = $\dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$

(X = 0) : « Un jeton portant le numéro 1 et l'autre le numéro -1 »

$\Rightarrow$ p(X = 0) = $\dfrac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

(X = 2) : « Les deus jetons portent le numéro 1 »

$\Rightarrow$ p(X = 2) = $\dfrac{C_3^1}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$

x_i	-2	0	2	Total
p_i	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	1

E(X) = $\sum_i p_i x_i = \dfrac{-2+6}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

2. Tirage successif et sans remise de deux jetons de l'urne :

C : « P et P' sont parallèles ».

P : x +ay + b = 0 et P ' : x +by – a = 0

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\b\\0\end{pmatrix}$ sont les vecteurs normaux respectifs de P et P '

P // P ' $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ a = b

$\Rightarrow$ C : « Les deux jetons tirés sont de même numéro »

(1 , 1) ou (-1, -1)

$\Rightarrow$ p(C) = $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$

D : « P et P' sont perpendiculaires »

$P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow ab = -1$

$\Rightarrow$ D : « Les deux jetons tirés sont de numéros différents »

$\Rightarrow D = \overline{C} \Rightarrow p(D) = 1 - p(C) = \frac{3}{5}$

13 SUR LE CHEMIN DU BAC

$U_1 : \begin{cases} 2 \text{ rouges} \\ 8 \text{ blanches} \end{cases}$; $U_2 : \begin{cases} 1 \text{ rouge} \\ 2 \text{ blanches} \end{cases}$

1. Tirer une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2.

a) R_1 : « La boule tirée de U_1 est rouge »

$\Rightarrow p(R_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

R_2 : «La boule tirée de U_2 est rouge »

$p(R_2) = p(R_1)\times p(R_2|R_1) + p(\overline{R_1})\times p(R_2|\overline{R_1})$

$\Rightarrow p(R_2) = \frac{1}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

b) A : « à la fin de l'épreuve U_2 ne contient plus de boule rouge »

$A = R_2 \cap \overline{R_1}$

$\Rightarrow p(A) = p(R_2 \cap \overline{R_1}) = p(\overline{R_1})\times p(R_2|\overline{R_1}) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

2. On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans leur urne d'origine

X est définie par le nombre de fois où A est réalisé

a) X suit une loi binomiale de paramètres n = 4 et p = p(A) = $\frac{1}{5}$

X (Ω) = {0, 1, 2, 3, 4}

$P(X=k) = C_4^k \times \left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}$, k ∈ {0, 1, 2, 3, 4}

b) E(X) = n × p = $\frac{4}{5}$ et V(X) = n × p × (1 – p) = $\frac{16}{25}$ = 0.64

3. Une nouvelle épreuve consiste à tirer une boule de U_1 :

▪ Si elle est rouge on la garde et on tire une seconde boule de U_2.

▪ Si elle est blanche, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

Soit Y l'aléa numérique égal au nombre de boules rouges obtenues à l'issue de l'épreuve.

a) Y (Ω) = {0, 1, 2}

$P(Y=0) = \frac{4}{5}\times\frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{5}$

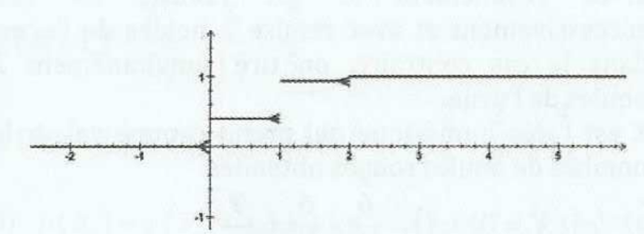
$P(Y=1) = \frac{1}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_4^2} = \frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

$P(Y=2) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

y_i	0	1	2	Total
p_i	$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

b) Soit F la fonction de répartition de Y :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{6}{15} \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{14}{15} \text{ si } x \in [1,2[\\ 1 \text{ si } x \in [2,+\infty[\end{cases}$$



14 SUR LE CHEMIN DU BAC

Partie A

1) $P(X \le 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}dt$ est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

2) Le paramètre λ est l'ordonné du point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

$\Rightarrow \lambda = 1{,}5.$

Partie B λ = 1,5.

1) $P(X \le 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-1.5} \simeq 0.777$.

2) $P(X \ge 2) = e^{-3} \simeq 0.05$.

3) $P(1 \le X \le 2) = 1 - (P(X \le 1) + P(X \ge 2))$
$= 1 - (0{,}777 + 0{,}05) \approx 0{,}173.$

Partie C

1) a) p = 0, 8 × 0, 173 + 0, 777 = 0, 915

b) $p = \dfrac{0.8\times 0.173}{0.915} = 0.151$

2) a) p = $(0{,}915)^{10}$ = 0,411

b) p = 1 – 0,411 = 0,588



15 SUR LE CHEMIN DU BAC

X est la durée de vie d'un oscilloscope

X suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0.125

1) a) p(X > 10) = $e^{-1.25} \simeq 0.286$

b) p (0 < X < 0.5) = $1 - e^{-0.0625} \simeq 0.06$

2) Soit Y le nombre d'oscilloscopes ayant chacun une durée de vie supérieure à 10 ans

Y suit une loi binomiale de paramètres n et p = 0.286

a) p_1 = p (Y ≥ 1) = 1 – p (Y = 0) = 1 - $C_n^0 \times (0.286)^0 \times (1-0.286)^n$ = 1 - $(0.714)^n$

b) $p_1 > 0.999 \Leftrightarrow 1 - (0.714)^n > 0.999 \Leftrightarrow$ $(0.714)^n < 0.001$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0.714) < \ln(0.001) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0.001)}{\ln(0.714)}$

⇔ n > 20.505

Le responsable devrait commander au moins 21 oscilloscopes pour que p_1 soit supérieure à 0.999



16 SUR LE CHEMIN DU BAC

1) P($\overline{A}$) = 1 – p(A) = 1 – 0.4 = 0.6 **Vrai**

2) P($\overline{B}$ | A) = 1 – p(B | A) = 1 – 0.3 = 0.7 **Vrai**

3) P(B) = p(A) × p(B | A) + p($\overline{A}$) × p(B | $\overline{A}$) = 0.4 × 0.3 + 0.6 × 0.4 = 0.36 **Faux**

4) P(A ∪ B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B) = 0.4 + 0.36 – 0.4 × 0.3 = 0.64 **Vrai**

STATISTIQUES

I)Résumé du cours

A- Série statistique double en données individuelles

Paramètres d'une série statistique :

Etant donnée une populations de n individus sur laquelle on étudie deux caractères X et Y.
(On dit que (X,Y) est une série statistique double sur un échantillon de taille n)

On désigne par $x_1, x_2, ...x_n$ les variations de X

On désigne par $y_1, y_2, ...y_n$ les variations de Y

X	x_1	x_2	....	x_n
Y	y_1	y_2	....	y_n

L'ensemble des points $A_i(x_i, y_i)$ du plan muni d'un repère orthogonal est appelé nuage de points associé à la série statistique double (X,Y)

1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ s'appelle moyenne arithmétique de X (espérance de $X = E(X)$)

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ s'appelle moyenne arithmétique de Y (espérance de $Y = E(Y)$)

Le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ est appelé le point moyen

2) $V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\overline{X}\right)^2$ s'appelle variance de X

$V(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\overline{Y}\right)^2$ s'appelle variance de Y.

3) $6(X) = \sqrt{V(X)}$ écart type de X ; $6(Y) = \sqrt{V(Y)}$ écart type de Y

Interprétation de l'écart type :

- L'écart type est un moyen qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable statistique à variable quantitative autour de la moyenne de cette série.

Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

- Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, on peut comparer leurs écarts-type relatifs respectifs plus l'écart type est relatif est faible plus la dispersion au tour de la moyenne est faible.

$\frac{\sigma}{\overline{X}}$ est l'écart type relatif de X

$\frac{\sigma}{\overline{Y}}$ est l'écart type relatif de Y

B- Série statistique double en données groupées

Distribution marginale d'une série statistique double :

On désigne par $x_1, x_2, ..., x_i, ...x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_i, ...y_q$ les valeurs de Y

Si le couple (x_i, y_i) se répètent plus qu'une fois soit n_{ij} l'effectif associé au couple.

Les effectifs n_{ij} associés aux couples (x_i, y_i) sont représentés à l'aide d'un tableau à double entrée de la forme :

x \ y	y_1	y_2	....	y_j	....	y_q	Distribution marginale de X
x_1	n_{11}	n_{12}		n_{1j}		n_{1q}	$n_1 = \sum_{j=1}^{q} n_{1j}$
x_2	n_{21}						$n_2 = \sum_{j=1}^{q} n_{2j}$
x_j	n_{i1}						
x_p	n_{p1}						n_p
Distribution marginale de Y	$n_1 = \sum_{i=1}^{p} n_{i1}$	n_2	....	n_j	....	n_q	n

D'où les deux tableaux ci-dessous représentent les distributions marginales de X et Y :

X	x_1	x_2	....	x_p
n_i	n_1	n_2	....	n_p

Y	y_1	y_2	....	y_q
n'_j	n'_1	n'_2	....	n'_q

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \;;\; \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q} n'_i y_i$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \left(\overline{X}\right)^2 \;;\; V(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{q} n'_i y_i^2\right) - \overline{Y}^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \;;\; \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{q} n_{ij}x_i y_i\right)-\overline{XY}$$

Remarque1 : Toutes les formules vues dans la partie précédente de ce cours restent valables pour le cas d'une Série statistique double

Remarque2 : Si les caractères sont continus on considère les centres des classes

C- COVARIANCE

1- Définition :

Soit (x_i, y_i) avec i=1,........n une série statistique double .On appelle covariance x et y le nombre noté Cov(x, y) et définie par : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

2- Théorème

* Soit (x_i, y_i) avec i=1,........n une série statistique double : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{XY}$

* $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

3- Interprétation de la covariance :

La covariance permet une mesure de la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen

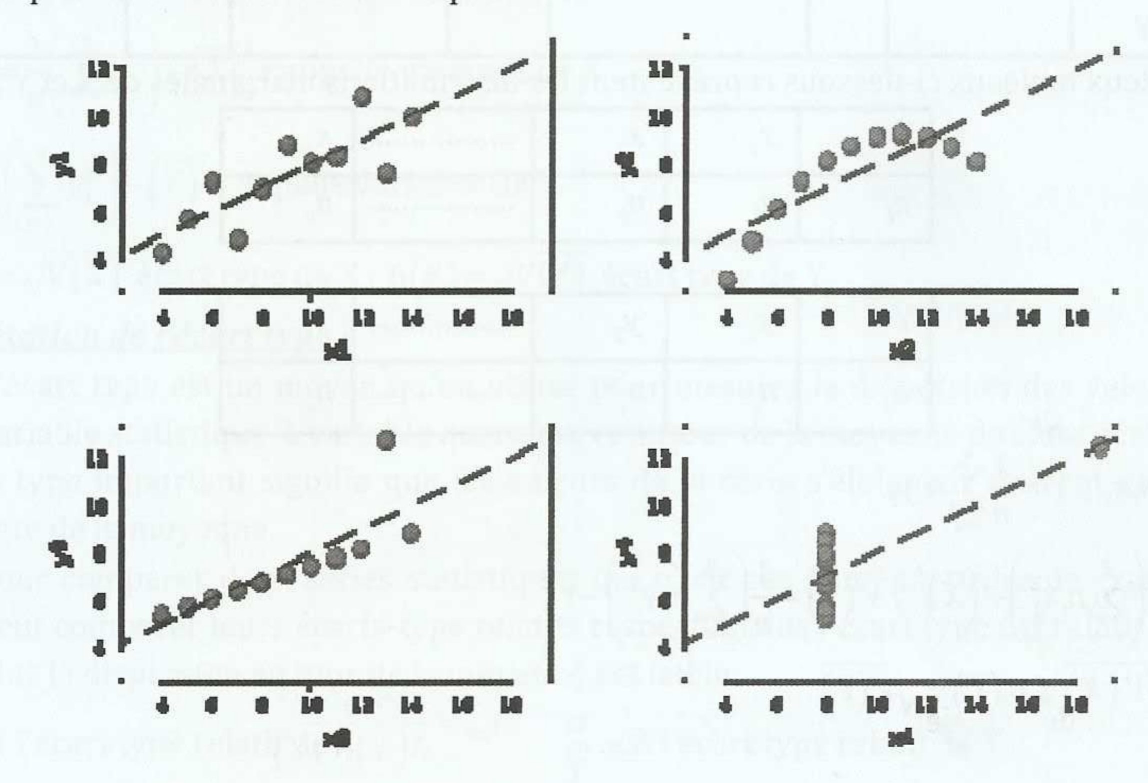
La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens

La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire

D- Ajustement affine d'une série statistique :

1- Ajustement affine

La courbe peut être une droite ou une parabole.



ou bien il peut ne pas y avoir de courbe visible :

2- *Méthode de Mayer:*

Soit (X,Y) une série statistique double et G son point moyen

On scinde le nuage de point de (X,Y) en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points.

On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définie un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X,Y).

3- *Méthode de Moindre carrés:*

a- Principe de la méthode des moindre carrés

Le principe de cette méthode c'est de trouver la droite D « La plus proche possible » des points du nuage, c'est-à-dire que la somme des carrés des écarts entre les points M_i du nuage et les points P_i de la droite D de même abscisse, est la plus petite possible.

On dit qu'on a effectué un ajustement linéaire par la méthode des **moindres carrés**.

b-Théorème (admis)

La droite de régression de y en x est la droite qui passe par G $(\overline{X},\overline{Y})$ et de coefficient directeur le réel $a=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}$

Remarque 1

- La droite de régression de Y par rapport à X est : $D: y-\overline{Y}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}(x-\overline{X})$
- La droite de régression de X par rapport à Y est : $D': x-\overline{X}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)}(y-\overline{Y})$

Remarque2 :

$G(\overline{X},\overline{Y})\in D\cap D'd'ou$:

$D: y=ax+b\ avec\ a=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} et\ b=\overline{Y}-a\overline{X}$

$D': x=a'y+b'\ avec\ a'=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)} et\ b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$

Remarque3 :

Les deux coefficients a et a' sont de même signe et le coefficient de corrélation r vérifie

4- *Coefficient de corrélation linéaire :*

a- Définition :

Le coefficient de corrélation linéaire de (X,Y) est : $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{6(X),6(Y)}$



Remarque :

- On note encore ρ_{XY} par r.
- Le coefficient de corrélation linéaire de (X,Y) est égal Le coefficient de corrélation linéaire de (X,Y)
- $-1 \leq r \leq 1$
- r est invariant par changement d'unité ou d'origine.

b- *Interprétation du coefficient de corrélation linéaire*

- Si $|r| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est faible
- Si $|r| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est forte
- Les points du nuage de points sont alignés si et seulement si r = 1 ou r = −1.

E-Utilisation d'une calculatrice (Casio fx 570 ES ou fx 570 ES ou fx 991 ES plus)

Tous les calculs mentionnés ici s'effectuent dans le mode STAT 

Types de calculs statistiques

Touche	Elément du menu	Calcul statistique
1	1-VAR	Une variable
2	A+BX	Régression linéaire
3	_+CX2	Régression quadratique
4	In X	Régression logarithmique
5	e^X	Régression exponentielle e
6	A•B^X	Régression exponentielle ab
7	A•X^B	Régression de puissance
8	1/X	Régression inverse

Utilisation du menu STAT

Lorsque l'écran de l'éditeur STAT ou l'écran de calcul STAT est affiché, appuyez sur SHIFT 1 pour afficher le menu STAT.

Le contenu du menu STAT est différent selon qu'une variable ou deux variables sont utilisées pour le calcul statistique actuellement sélectionné.

1: Type 5: Data
2: Edit 6: Sum
3: Var 7: MinMax
7: Distr

Statistiques à une variable

1: Type 5: Data
2: Edit 6: Sum
3: Var 7: MinMax
7: Reg

Statistiques à deux variables

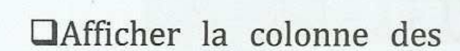


☛ ***Exemple 1*** : On considère la série statistique à une variable :

X	10	14
Effectif	**40**	**20**



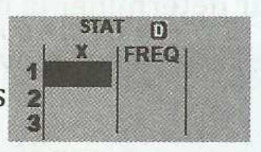
❑ On passe en mode statistique



❑Afficher la colonne des

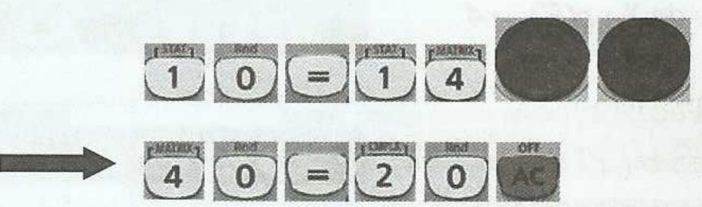


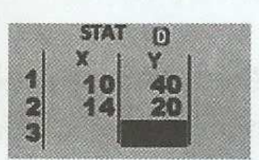
effectifs



❑Introduction des données

X	Effectif
10	40
14	20





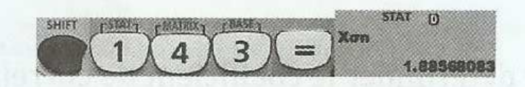
❑Pour déterminer l'effectif total

☞ On trouve : **N = 60**

❑Pour déterminer la moyenne

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} \approx 11{,}33$

❑Pour déterminer l'écart type



☞ On trouve l'écart type : $\sigma \approx 1{,}89$

❑Pour déterminer la variance

☞ On trouve la variance : $\varsigma \approx 3{,}56$

☛ ***Exemple 2*** : On considère la série statistique à deux variables :

X	10	14
Y	**40**	**20**

❑ On passe en mode statistique

❑Introduction des données

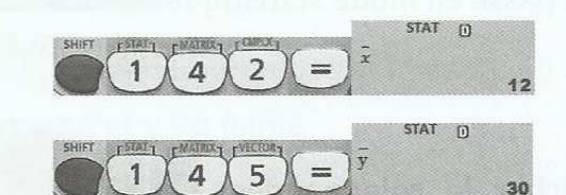
X	Y
10	40
14	20

❑Pour déterminer la moyenne de X

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}}$ **= 12**

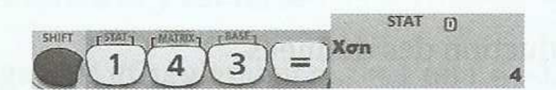
❑Pour déterminer la moyenne de Y

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{Y}}$ **= 30**



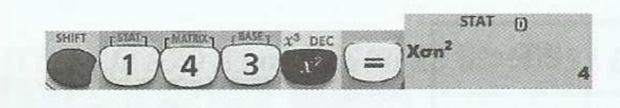
❑Pour déterminer l'écart type X

☞ On trouve l'écart type : *σ (Ξ) = 2*



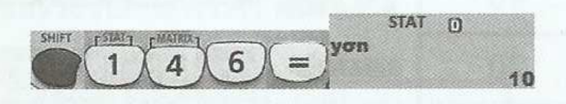
❑Pour déterminer la variance de X

☞ On trouve la variance de X : *ς(Ξ) = 4*



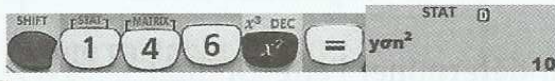
❑Pour déterminer l'écart type Y

☞ On trouve l'écart type : *σ (Ψ) = 10*



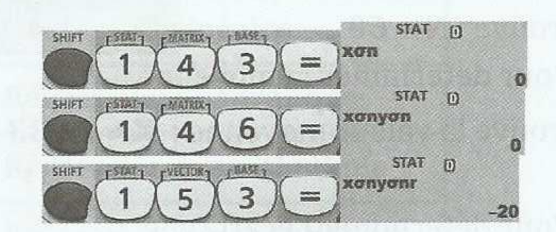
❑Pour déterminer la variance de Y

☞ On trouve la variance de Y : **V***(Ψ) = 100*



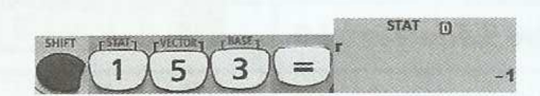
❑Pour déterminer la covariance de (X ,Y)

☞ On trouve la covariance: **Cov**(X ,Y*) = –20*



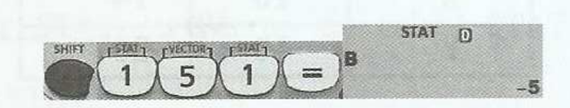
❑Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} :

☞ On trouve: r_{xy} *= –1*



❑Droite de moindre carrés de Y en X <u>ou</u>droite de régression deY en X. (Y=BX+A)

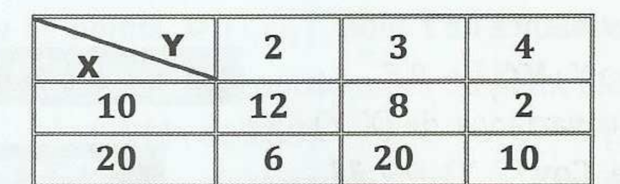
☞ On trouve: B *= –5*



☞ et on trouve: A *= 90*

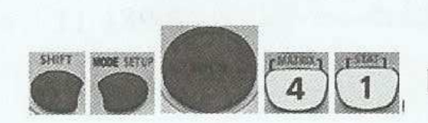
d'où Y = –5X+90

☛ ***<u>Exemple 3</u>*** : On considère la série statistique à double entrée :

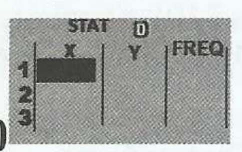


X \ Y	2	3	4
10	12	8	2
20	6	20	10

❑ On passe en mode statistique



❑Afficher la colonne des effectifs **(FREQ)**



❑Introduction des données

X	Y	FREQ
10	2	12
10	3	8
10	4	2
20	2	6
20	3	20
20	4	10

❑Pour déterminer la moyenne de X

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} \approx 16.21$

❑Pour déterminer la moyenne de Y

☞ On trouve la valeur moyenne : $\mathbf{Y} \approx 2.9$

❑Pour déterminer l'écart type X

☞ On trouve l'écart type : $\sigma(X) \approx 4.85$

❑Pour déterminer la variance de X

☞ On trouve la variance de X : $V(X) \approx 23.54$

❑Pour déterminer l'écart type Y



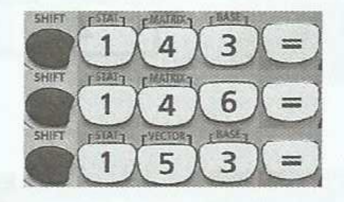
- On trouve l'écart type : $\sigma(Y) \approx 0.71$

❑Pour déterminer la variance de Y



- On trouve la variance de Y : $\mathbf{V}(Y) \approx 0.5$

❑Pour déterminer la covariance de (X ,Y)



- On trouve la covariance: $\mathbf{Cov}(X,Y) \approx 1.33$

❑Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} :



- On trouve: $r_{xy} = 0.39$

II) Exercices



QCM

Le tableau ci-dessous donne pour 6 années le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en Tunis.

Années	*1997*	*1999*	*2001*	*2003*	*2005*	*2007*
Rang de l'année $x_i \, 1 \le i \le 6$	0	2	4	6	8	10
Nombre (en millions) de spectateurs $y_i \, 1 \le i \le 6$	149,3	153,6	187,5	173,5	175,5	177,9

1. Le taux d'augmentation du nombre de spectateurs de 1997 à 1999 est donné par le calcul suivant :

- $\dfrac{153,6}{149,3}$
- $\dfrac{153,6-149,3}{153,6}$
- $\left(\dfrac{153,6}{149,3}-1\right)$

2. En supposant que le nombre de spectateurs augmente de 1 % tous les ans, à partir de 2007, le nombre de spectateurs en 2010 est donné par le calcul suivant :

- $(1,01 \times 177,9) \times 3$
- $1,01^3 \times 177,9$
- $0,01^3 \times 177,9$

3. Entre 1997 et 2007 , l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du nombre de spectateurs est, arrondie à 0,01 % :

- 1,77%
- 1,92%
- 3,57%

4. Sachant que de 1998 à 1999, le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en Tunis a diminué de 10 %, le nombre de spectateurs (en millions) en 1998 arrondi au dixième était :

• 139,6 • 170,7 • 138,2

5. On considère un nuage de points $M_i(x_i;y_i)$, pour $1 \leq i \leq 6$, construit à partir des données du tableau donné en début d'exercice. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont :

• (2002 ; 169,55) • (5 ; 169,55) • (30 ; 1017,3)

6. Supposons que l'on ait effectué un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés. (*Dans l'équation de la droite de régression de y en x de la forme y = ax + b, on choisira les coefficients a et b arrondis au dixième*). D'après cet ajustement :

a. Le nombre de spectateurs sera d'environ 200 millions en :

• 2015 • 2013 • 2010

b. L'estimation (en millions) arrondi au dixième, du nombre de spectateurs en 2015 est :

• 11 439,6 • 228,4 • 206



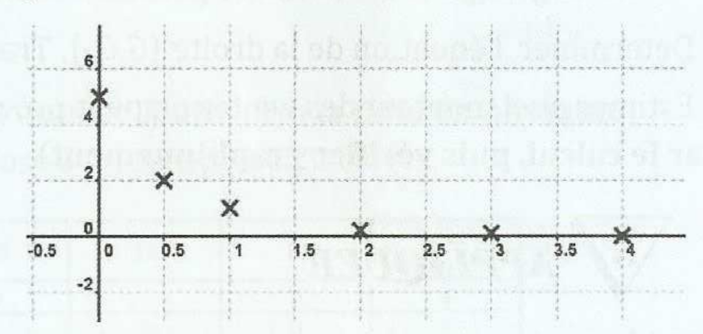
2 QCM

D'après la forme du nuage (X,Y) on peut envisager le modèle :

a) $y = ax + b$,

b) $y = a\ln x$,

c) $y = ab^x$.





3 APPLIQUER

Dans la série statistique ci-contre, deux valeurs ont été effacées

x_i	8,2	7,4		6,1	9
y_i	15	12,1	16,3		12

On connaît, par contre, le point moyen G par ses coordonnées : $x_G = 7{,}5$ et $y_G = 12{,}6$.

Pouvez-vous retrouver les valeurs manquantes ?



4 APPLIQUER

Une entreprise consacre une certaine somme à des opérations publicitaires au début de chaque mois.
Le tableau suivant met en évidence la relation entre les ventes réalisées et les frais de pub engagés au début de chaque mois.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Frais de Pub (**en millier de dinars**)	40	90	100	60	130	160	20
Ventes (**en millier de dinars**)	1400	2000	2500	2000	2900	3000	1000

1)a) Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série.

b) Déterminez les coordonnées de G, point moyen de nuage. Placez le point G.

2) Calculer les coordonnées des points moyens

- Pour le groupe des 3 premiers points : Point moyen G_1.
- Pour le groupe des 4 derniers points : Point moyen G_2.

3) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2). Tracer (G_1G_2).

4) Estimer quel montant des ventes on peut prévoir avec des frais de pub de 200 000 dinars **(Par le calcul, puis vérifier graphiquement)**

5 APPLIQUER

Le tableau ci-contre donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages tunisien, en millions dinars, de 2005 à 2011

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant en millions dinars y_i	90	260	820	1650	2300	4000	5300

1) Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série. Un ajustement semble-t-il justifie ?

2) Calculer les coordonnées du point moyen.

3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés, en présentant les calculs dans un tableau.

4) Tracer cette droite dans le graphique précèdent.

5) En supposant que ce modèle reste plausible, estimer le montant des achats en ligne des ménages tunisien en 2012.



6 S'ENTRAINER

Dans une grande surface, le prix de vente promotionnel d'un produit **(en DT)** est affiché en fonction de son poids **(en g)** dans le tableau suivant :

Prix du produit (en D.T) : X	0,650	0,900	1,100	1,300	1,500	2,600
Poids du produit (en g) : Y	100	150	200	250	300	500

1) Construire le nuage de points de cette série statistique.

2) Calculer $Cov(X;Y)$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire **r** de la série (X, Y). Un ajustement affine est-il justifié ?

4) Donner les équations des droites de régression relativement à un repère orthogonal du plan.

5) Quel prix peut-on prévoir pour un produit de poids **1 kg** ?



7 S'ENTRAINER

Le tableau suivant est à double entrée : **X_i = la note en Math**. ; **Y_j= la note en phyique.**
Il représente les résultats d'un concours proposé à un groupe de 20 élèves.

Y_j \ X_i	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	…	0	4
9	1	2	…	0	0	5
10	…	2	1	2	…	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	…	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

1) a) Remplir les cases vides.

b) Déterminer n_{23} et n_{45}.

2) Construire le nuage des points pondérés **$(x_i, y_i).n_{ij}$**

3) a)Déterminer les distributions marginales associées à X et à Y.

b) Calculer : $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et placer le point moyen G.

4) Calculer : V(X) , V(Y) et Cov(X,Y).

5) Justifier l'existence d'un ajustement affine du nuage.

6) Donner les équations des droites de régression.

7) Si un élève avait **17** en physique , quelle note en math pourrait-il estimer avoir ?



SE PERFECTIONNER

1) L'entreprise K-gaz fabrique et commercialise égualement un produit chimique. Pour des raisons partique, sa prodution mentielle ne peut pas excéder 10 tonnes.
L'entreprise K-Gaz a relevé le coût total de production mensuel (**en millier de dinars**), noté y, en fonction de la production x (**en tonnes**).

x	1	2	4	6	8	10
y	32 ,5	38,5	44,6	48,4	51,1	53,3

a) Le nuage ne semblant pas totalement se prete à un ajustement affine on décide de poser : $z = e^{0,1y}$
Completer le tableau en arronissant les valeurs de z au centième.

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de regression de z en x par la méthode des moindres carrée (on arrondira les coefficients à la première décimale).

c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.

2) a) Utiliser le resultat de la question **1) b)** pour obtenir une expresion de y en fonction de x.

b) En utiliser cette équation, estimer le coût total correspondant à une production de 7 tonnes.



SE PERFECTIONNER

Le tableau suivant indique l'évolution de la consommation d'énergie électrique dans un pays au cours de 8 années successives :

X : année	1	2	3	4	5	6	7	8
Y : consommation (en Twh)	20	40	55	75	95	120	160	190

1) a) Représenter le nuage de points de la série double (X, Y) dans un repère orthogonal du plan.

b) Calculer le coefficient r_1 de corrélation linéaire du couple (X, Y).

c) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de Y en X et construire D.

2) On suppose que la relation entre X et Y est du type exponentiel : $Y = k.e^{aX}$ et on pose $V = \ln(Y)$

a) Représenter le nuage de points de la série double (X, V) dans un repère orthogonal du plan.

b) Calculer le coefficient r_2 de corrélation linéaire du couple (X, V).

c) En déduire qu'il y'a une forte corrélation linéaire entre V et X puis construire la droite Δ de régression de V en X.

d) En écrivant $V = a.X + b$ où $b = \ln(k)$, trouver alors les réels a et b.



SE PERFECTIONNER

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit A selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit A;
- y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1) Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $(x_i;y_i)$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan (*unités graphiques* : 4 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

2) On recherche un ajustement affine de la série $(x_i;y_i)$.

a)Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en$x$ obtenue par la méthode des moindres carrés.

Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification.

b) Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.

c)Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

3) La forme du nuage permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose $z_i=(0,75x_i-3,16)^2$

a) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en$z$ par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près*).

b) Vérifier que la nouvelle estimation de y en fonction de x est donnée par $y=0,313x^2-2,64x+6,062$ (*les coefficients sont arrondis à 10^{-3} près*).

c) En utilisant cet ajustement, donner une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

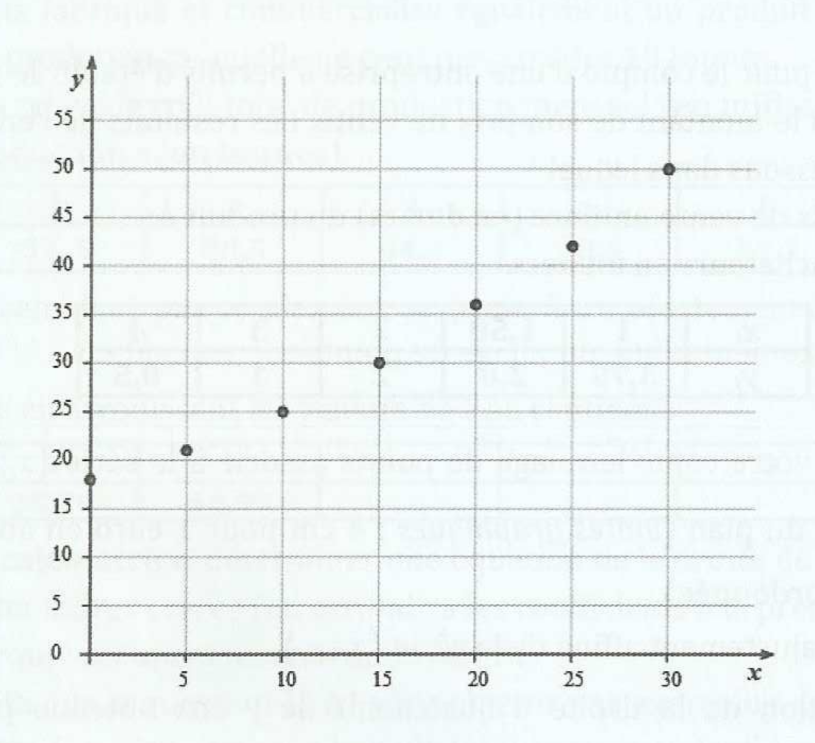


SUR LE CHEMIN DUBAC

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-dessous : le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.



PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite sur le graphique donné en annexe.

2) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1) L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b tels que $f(0)=18$ et $f(30)=50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.

2) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

3) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné en annexe.

4) La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x)=18e^{0,034x}$.

1) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 ; 30]$; on donnera le résultat arrondi au dixième.

2) À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population a atteint cette valeur moyenne ?



SUR LE CHEMIN DU BAC

On s'intéresse au nombre de personnes atteintes d'une maladie A ou d'une maladie B en Tunisie entre 1970 et 2005.

Les données ont été représentées graphiquement sur l'annexe (à rendre avec la copie). On précise que sur l'axe des abscisses, le rang zéro correspond à l'année 1970, le rang cinq à l'année 1975.

PARTIE I. Maladie A

On envisage un ajustement affine du nuage de points correspondant à la maladie A. Voici une partie des données :

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	30	35
Nombre de personnes att eintes de la maladie A : y_i	4884	4303	3713	3175	2836	2352	2011	1789

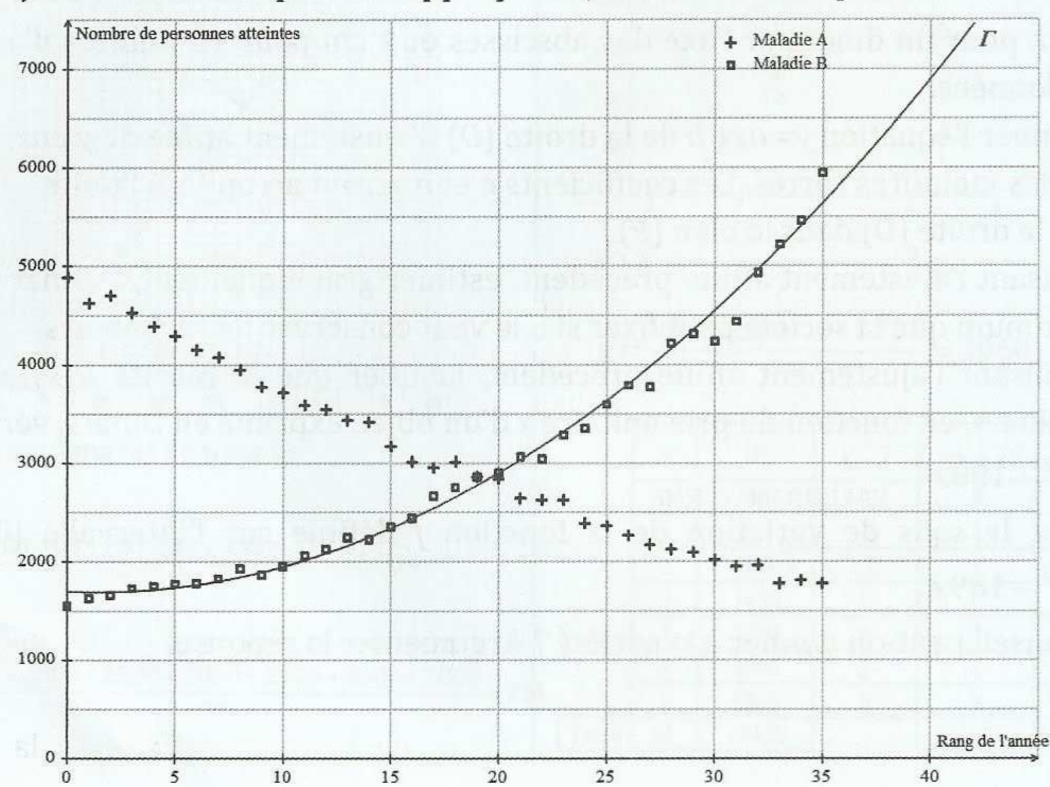
1) À l'aide de la calculatrice et en arrondissant les coefficients à l'unité, donner l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

2) Tracer cette droite dans le repère situé sur l'annexe.

3) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2011, quelle prévision peut-on faire du nombre de personnes qui seront atteintes de cette maladie A en Tunisie en 2011 ?

PARTIE II. Maladie B

1) À partir des données du graphique ci-dessous concernant la maladie B (fournies en annexe), un ajustement affine parait-il approprié ? Justifier votre réponse.



2) On admet que la courbe Γ tracée sur l'annexe représente un ajustement du nuage, valable jusqu'en 2011.
Lire le nombre prévisible de personnes qui seront atteintes de la maladie B en 2011.
3) La courbe Γ est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, a étant un nombre réel non nul, b et c étant des nombres réels. La courbe Γ passe par les points P(0; 1700), Q(10; 1950) et R(20; 2900).

a) Justifier que $c = 1700$.

b) Déterminer les nombres réels a et b.

c) En déduire le nombre prévisible de personnes qui seront atteintes de la maladie B en 2011.



13 SUR LE CHEMIN DU BAC

Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique.
Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en Dinars :

Prix en Dinars : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	80	70	50	40	25

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé d'unités 1 cm pour un dinar sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées.
2) a) Déterminer l'équation $y= ax+ b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'unité.

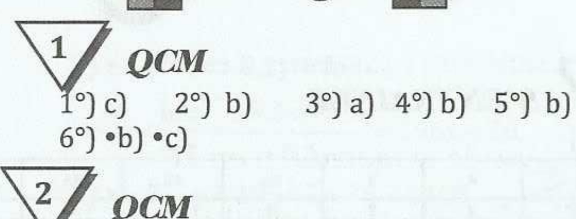
b) Tracer la droite (D) dans le plan (P).

c) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer graphiquement, à Dinar près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.

3) a) En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers de dinars, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en Dinars, vérifie :
$R(x) = -15x^2 + 189x$

b) Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = -15x^2 + 189x$.

c) Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.



1 QCM

1°) c) 2°) b) 3°) a) 4°) b) 5°) b)
6°) •b) •c)

2 QCM

c)

3 APPLIQUER

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} \\ y_G = \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5} \end{cases}$$

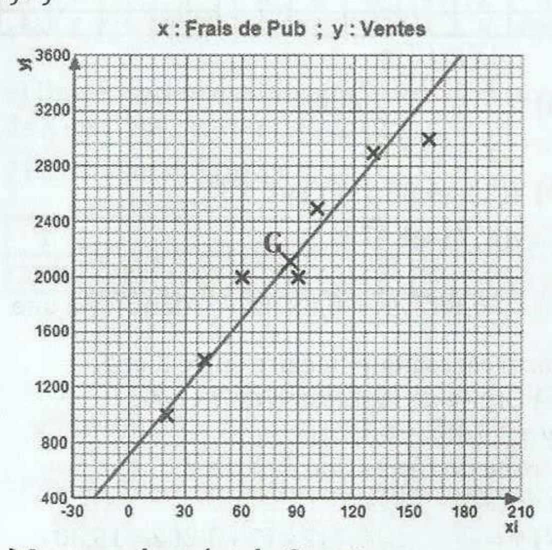
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 = \dfrac{8{,}2+7{,}4+x_3+6{,}1+9}{5} \\ 12{,}6 = \dfrac{15+12{,}1+16{,}3+y_4+12}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30{,}7+x_3 = 37{,}5 \\ 55{,}4+y_4 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 6{,}8 \\ y_4 = 7{,}6 \end{cases}$$



4 APPLIQUER

1) a)



b) Les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \overline{x} \\ = \dfrac{40+90+100+60+130+160+20}{7} \approx 85{,}714 \\ y_G = \overline{y} \\ = \dfrac{1400+2000+2500+2000+2900+3000+1000}{7} \approx 211\cdot \end{cases}$$

2) Les coordonnées de G_1 et G_2 sont :

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{40+90+100}{3} = \dfrac{230}{3} \\ y_{G_1} = \dfrac{1400+2000+2500}{3} = \dfrac{5900}{3} \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} x_{G_2} = \dfrac{60+130+160+20}{4} = 92{,}5 \\ y_{G_2} = \dfrac{2000+2900+3000+1000}{4} = 2225 \end{cases}$$

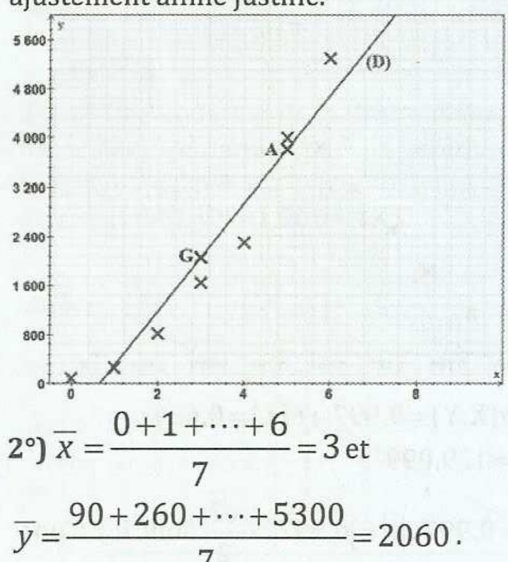
3) L'équation de la droite (G_1G_2) est de la forme $y = ax+b$ avec $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} \approx 16{,}316$

D'où on tire $b = \overline{y} - a\overline{x} \approx 715{,}773$. L'équation de (G_1G_2) est donc : $y = 16{,}316x + 715{,}773$.

4) $x = 200$;
$y = 16{,}316 \times 200 + 715{,}773 = 3978{,}973$ Le montant des ventes avec des frais de pub de 200 000 dinars est 3978973 dinars.

5 APPLIQUER

1) Le nuage de point est allongé, un ajustement affine justifié.



2°) $\overline{x} = \dfrac{0+1+\cdots+6}{7} = 3$ et

$$\overline{y} = \frac{90+260+\cdots+5300}{7} = 2060.$$

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
0	90	−3	9	−1970	5910
1	260	−2	4	−1800	3600
2	820	−1	1	−1240	1240
3	1650	0	0	−410	0
4	2300	1	1	240	240
5	4000	2	4	1940	3880
6	5300	3	9	3240	9720
Total 21	14420		28		24590

Le point moyen a pour coordonnées $G(3;2060)$.

3) Équation de la droite d'ajustement y en x par la méthode des moindre carrés :

La droite (D) d'ajustement de y en x passe par $G(3;2060)$ et a pour coefficient directeur $a=\dfrac{24590}{28}$ c'est-à-dire $a\approx 878,21$.

Un équation de (D) est donc :

$y=878,21\times(x-3)+2060$

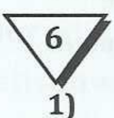
$y=878,21x-574,63$

4°) La droite (D) passe par le point moyen G et le point $A(5;3816,42)$.

5°) L'année 2012 correspond au rang 7.

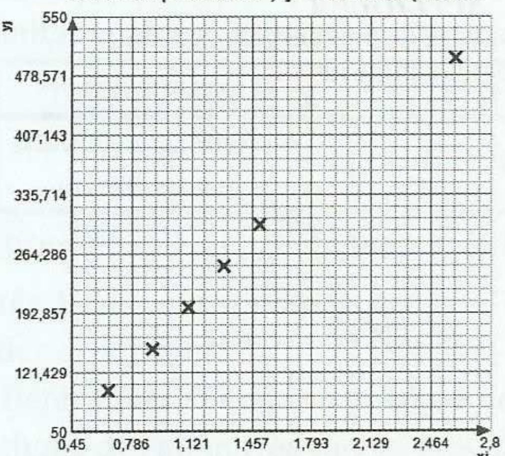
$y=878,21\times 7-574,63$ c'est-à-dire $y=5572,84$.

On peut estimer qu'en 2012 le montant des achats en ligne des ménages tunisien se montrera a 5572,84 millions dinars.



6 S'ENTRAINER

1)



2) $\mathrm{cov}(X,Y)=0,997$; $\sigma(X)=0,624$; $\sigma(Y)=129,099$

3) $r=0,997$. $|r|=|0,997|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

4) Droite de régression de Y en X :

y = 206,512x − 27,139.

Droite de régression de X en Y :

x = 0,005y + 0,092.

5) $1k=1000g$. $y=1000$;

$x=0,005\times 1000+0,092=5,095$.

Le prix pour un produit de poids 1 kg est 5,095 DT.

7 S'ENTRAINER

1) a)

Y_j \ X_i	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	0	0	4
9	1	2	2	0	0	5
10	0	2	1	2	0	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	0	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

b) $n_{23}=2$ et $n_{45}=1$.

2)

3) a)

Xi : la note en Math ; Yj = la note en physique

Distribution marginale de X					
X_i	8	9	10	12	14
Effectifs	3	6	3	5	3

Distribution marginale de Y					
Y_j	7	9	10	13	15
Effectifs	4	5	5	4	2

b) $\begin{cases}\overline{x}=10,5\\ \overline{y}=10,25\end{cases}$;donc.

4) $V(X)\approx 4,05$; $V(Y)\approx 6,287$;

$\mathrm{Cov}(X,Y)\approx 4,475$.

5) $r=0,887$. $|r|=|0,887|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

6) Droite de régression de Y en X :

y = 1,105x − 1,353.

Droite de régression de X en Y :

x = 0,712y + 3,202.

7) $y=17$; $x=0,712\times 17+3,202\approx 15,30$



8 SE PERFECTIONNER

a)

X	1	2	4	6	8	10
Z	25,79	46,99	86,49	126,47	165,67	206,44

b) $z=19,6x+7,6$


2) $z = e^{0,1y} \Leftrightarrow 0,1y = \ln z$.

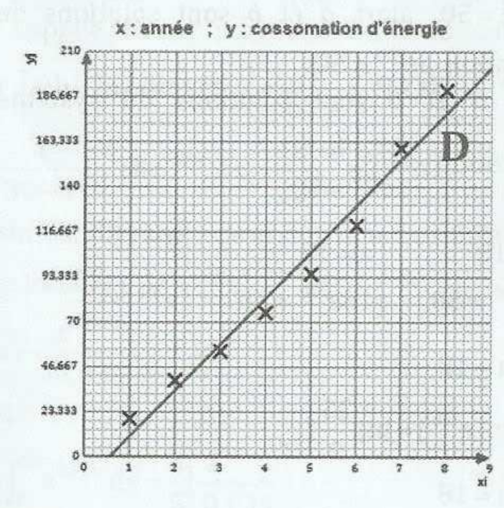
$\Leftrightarrow y = \dfrac{\ln z}{0,1} = \dfrac{19,6x + 7,6}{0,1} = 196x + 76$

b) $x = 7$, $y = 196 \times 7 + 76 = 1448$



9 SE PERFECTIONNER

1) a) Représentation du nuage de points de la série double (X, Y) ; voir figure ci-dessous :



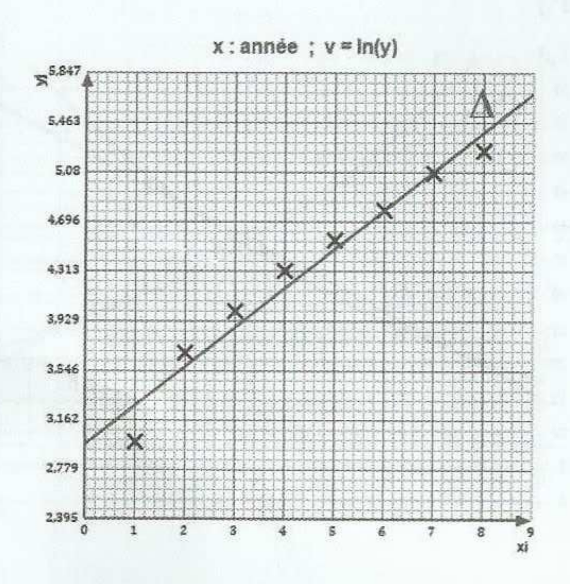
b) On a :
$\overline{X} = 4,5$; $\overline{Y} = 73$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(Y) = 46,64$;

$cov(X,Y) = 50,5$; $r_1 = r(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = 0,47$

c) Une équation de la droite D de régression de X en Y est : $y = 9,62.x + 29,71$.

2) a) $V = \ln(Y)$; On a :

X	1	2	3	4	5	6	7	8
V	2.995	3.688	4.007	4.317	4.553	4.787	5.075	5.247



b) On a :
$\overline{X} = 4,5$; $\overline{V} = 4,33$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(V) = 0,7$;
$cov(X,V) = 1,579$;

$r_2 = r(X,V) = \dfrac{cov(X,V)}{\sigma(X).\sigma(V)} = 0,98$;

On a $r_2 = r(X,V) = 0,98$ est voisin de 1 donc il y a forte corrélation linéaire entre v et x et un ajustement affine est alors, justifié.

c) Voir graphique au-dessus.

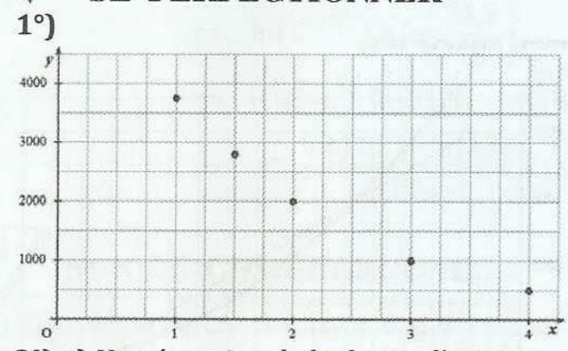
d) Une équation de la droite Δ de régression de X en V est : $v = 0,3.x + 2,98$.

Ainsi, a = 0,3 et b = 2,98 ce qui donne : $Y = e^{2,98}.e^{0,3.X} = e^{0,3.X+2,98}$.



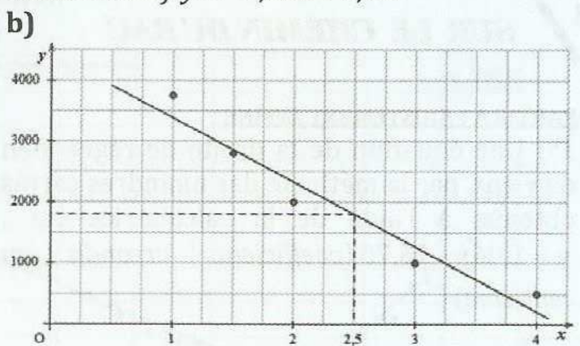
10 SE PERFECTIONNER

1°)



2°) a) Une équation de la droite d'ajustement de y en$x$ obtenue par la méthode des moindres carrés est : (coefficients arrondis au centième) $y = -1,06x + 4,45$.

b)



c) Si le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est : $y = -1,06 \times 2,5 + 4,45 = 1,8$. Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1800.

3°)

x_i	1	1,50	2	3	4
$z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$	5,8081	4,141225	2,7556	0,8281	0,0256
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

a) Une équation de la droite d'ajustement de y en z obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 0{,}557z + 0{,}500$ (coefficients arrondis à 10- 3 près).

b) $y = 0{,}557z+0{,}500$ et $z = (0{,}75x-3{,}16)^2$ alors $y = 0{,}557\ (0{,}75x-3{,}16)^2 + 0{,}5$ équivalent à/

$y = 0{,}557(0{,}5625x^2 \quad -4{,}74x+9{,}9856) \quad +0{,}5$ soit $y = 0{,}313313x^2 - 2{,}64018x + 6{,}0619792$

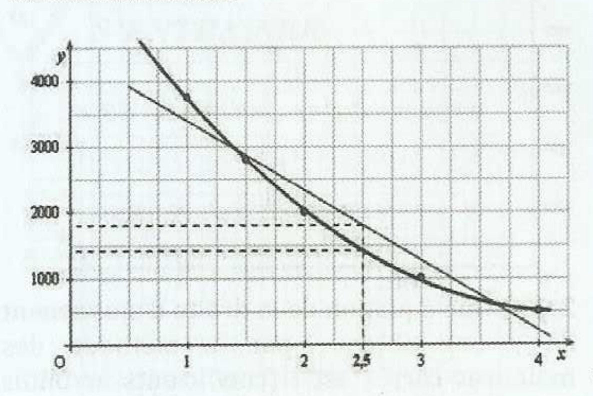
La parabole qui ajuste le nuage de points a donc bien pour équation :

$$y = 0{,}313x^2 - 2{,}64x+6{,}062.$$

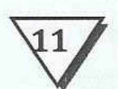
c) Le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est :

$y = 0{,}313\times 2{,}5^2 - 2{,}64\times 2{,}5 + 6{,}062 = 1{,}41825$

Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1418.



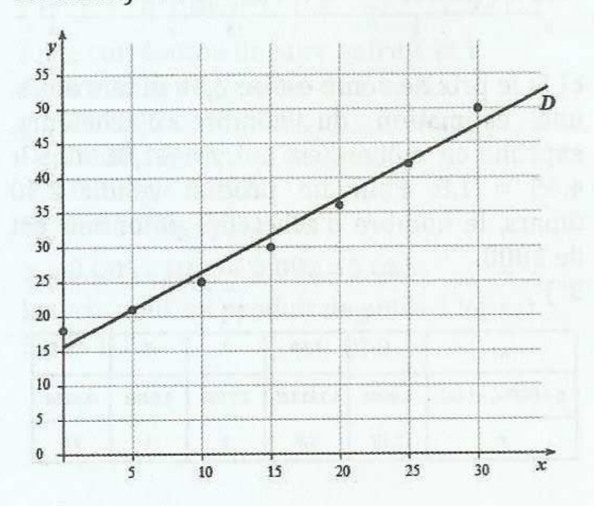
prix en dinars



SUR LE CHEMIN DU BAC

PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1°) Une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide de la calculatrice est : $y = 1{,}06x + 15{,}75$ (*coefficients arrondis au centième*)



2°) Le rang de l'année 2003 est $x = 33$.

Une estimation de la population en 2003 obtenue à partir de l'ajustement affine est :

$y = 1{,}06\times 33 + 15{,}75 = 50{,}73$

En 2003, la population est estimée à 51 milliers d'habitants.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1°) $f(0) = 18$ alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{b\times 0} = 18 \Leftrightarrow a = 18$

$f(30) = 50$. alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{30b} = 50$.

Ainsi a et b sont solutions du système d'équation $\begin{cases} a = 18 \\ ae^{30b} = 50 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 18 \\ ae^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 18e^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ e^{30b} = \dfrac{25}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ \ln(e^{30b}) = \ln(\dfrac{25}{9}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 30b = \ln 25 - \ln 9 \end{cases}$$

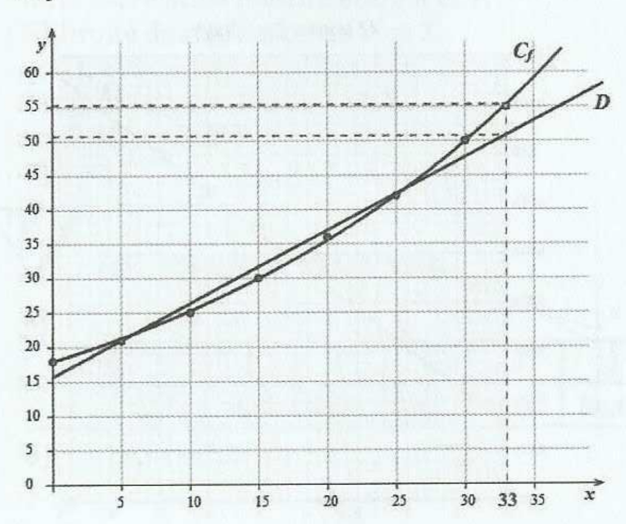
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = \dfrac{\ln 25 - \ln 9}{30} = \dfrac{2\ln 5 - 2\ln 3}{30} = \dfrac{\ln 5 - \ln 3}{15} \end{cases}$$

Par conséquent, la valeur arrondie de b au millième, obtenue à la calculatrice est 0,034.

Ainsi f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 18e^{0{,}034x}$.

2°) En 2003 une estimation à l'aide de cet ajustement est $f(33) = 18e^{0{,}034\times 33} \approx 55{,}2778$.

3°)



4) L'estimation la plus proche de la population réelle est celle obtenue avec un ajustement exponentiel.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

1°) Soit $\bar{f}$ la valeur moyenne de la fonction f sur $[0;30]$ d'après la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle : Soit I un intervalle, *f* une fonction continue sur I et *a*, *b* deux réels appartenant à I tels que $a<b$.
On appelle valeur moyenne de la fonction *f* sur $[a;b]$, le nombre : $\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

$\bar{f}=\frac{1}{30-1}\int_0^{30} 18e^{0,034x}dx=\frac{18}{30}\int_0^{30} e^{0,034x}dx$.

Or sur $[0;30]$, une expression d'une primitive de la fonction $g:x\mapsto e^{0,034x}$ est $G:x\mapsto\frac{e^{0,034x}}{0,034}$.

D'où

$$\frac{18}{30}\int_0^{30} e^{0,034x}dx=\frac{3}{5}\left[\frac{e^{0,034x}}{0,034}\right]_0^{30}$$

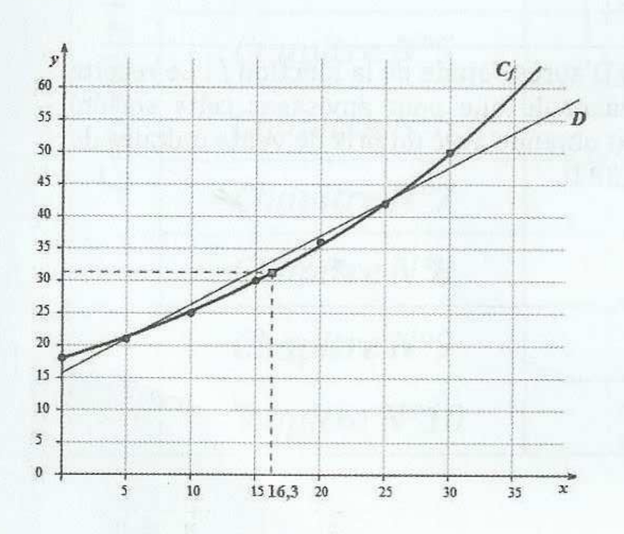
$$=\frac{3}{5}\left(\frac{e^{0,034\times30}-e^{0,034\times0}}{0,034}\right)=\frac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17}$$

Avec la calculatrice on trouve

$\frac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17}\approx 31,2917$.

Ainsi l'arrondi au dixième de la valeur moyenne de la fonction f sur $[0;30]$ est 31,3.

2°)



La droite d'équation $y=31,3$ coupe la courbe C_f en un point dont l'abscisse est comprise entre 16 et 17. C'est donc au cours de la dix-septième année à partir de 1970 que la population atteint 31,3 milliers d'habitants.

La population a atteint 31,3 milliers d'habitants au cours de l'année 1987.

Remarque:
On peut valider par le calcul le résultat obtenu graphiquement.
Soit *n* le rang de l'année au cours de laquelle la population atteindra 31,3 milliers d'habitants.
n est le plus petit entier solution de l'inéquation

$$18e^{0,034n}\geqslant 31,3 \Leftrightarrow e^{0,034n}\geqslant\frac{31,3}{18}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{0,034n}\right)\geqslant\ln\left(\frac{31,3}{18}\right)$$

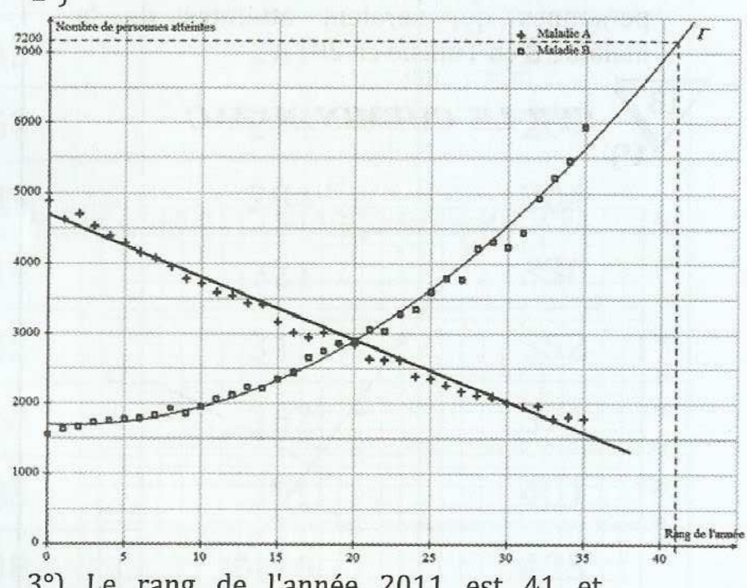
$$\Leftrightarrow 0,034n\geqslant\ln(31,3)-\ln(18)$$

$$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(31,3)-\ln(18)}{0,034}\approx 16,272.$$

12 SUR LE CHEMIN DU BAC

1°) Une équation de la droite d'ajustement affine de *y* en *x* par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide de la calculatrice est $y=-89x+44697$ (coefficients arrondis à l'unité).

2°)



3°) Le rang de l'année 2011 est 41 et $-89\times41+4697=1048$.

Selon cet ajustement, il y aurait 1048 personnes qui seraient atteintes de la maladie A en Tunisie en 2011.

Partie II

1°) Le nuage de points n'a pas une forme allongée donc un ajustement affine n'est pas approprié.

2°) Avec la précision permise par le dessin, environ 7200 personnes seront atteintes de la maladie B en 2011.

3°) a) Les coordonnées du point $P(0;1700)$ vérifient l'équation de la parabole Γ donc $c=1700$.

b) Les coordonnées des points $P(10;1950)$ et $P(20;2900)$ vérifient l'équation de la parabole Γ donc a et b sont les solutions du système :

$$\begin{cases}100a+10b+1700 = 1950\\400a+20b+1700 = 2900\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10a+b = 25\\20a+b = 60\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10a+b = 25\\10a = 35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = -10\\a = 3{,}5\end{cases}$$

La parabole Γ a pour équation $y=3{,}5x^2-10x+1700$.

c) Nous avons :

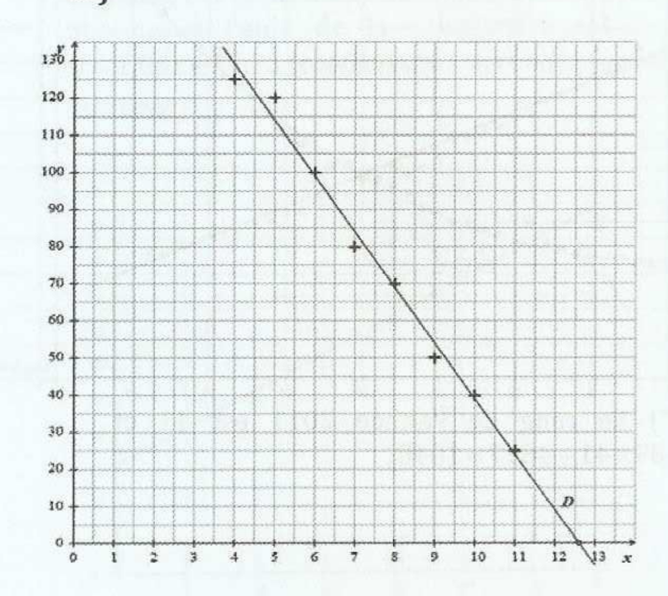
$$3{,}5\times 41^2-10\times 41+1700=7173{,}5.$$

Selon cet ajustement, il y aurait 7174 personnes qui seraient atteintes de la maladie B en Tunisie en 2011.



SUR LE CHEMIN DU BAC

1°)



2°) a) Une équation de la droite (D) d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide de la calculatrice, est $y=-15x+189$ (*coefficients arrondis à l'unité*)

b) La droite (D) passe par les points de coordonnées $(4;129)$ et $(11;24)$.

c) Graphiquement, les prix x que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs sont les abscisses des points de la droite situés au-dessus de l'axe des abscisses soit $x\in\,]0;12{,}6[$

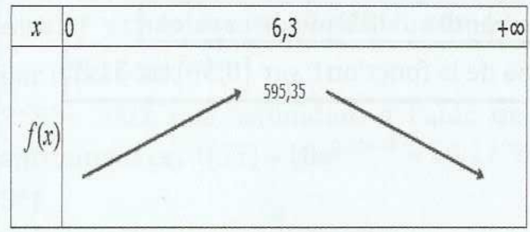
3°) a) La recette est égale au produit du prix unitaire d'un article par le nombre d'articles vendus. Pour un prix x, le nombre d'acheteurs exprimé en milliers est estimé à l'aide de l'ajustement affine précédent. Par conséquent, la recette $R(x)$, exprimée en milliers de dinars, en fonction du prix unitaire x d'un objet est : $R(x)=(-15x+189)\times x=-15x^2+189x$

b) Sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, la fonction f est la restriction d'une fonction polynôme du second degré avec $a=-15$, $b=189$ et $c=0$. Le maximum de la fonction f est atteint pour

$$x=-\frac{b}{2a} \quad \text{Soit} \quad x=-\frac{189}{2\times(-15)}=6{,}3$$

et $f(6{,}3)=-15\times 6{,}3^2+189\times 6{,}3=595{,}35$.

Le tableau des variations de la fonction f est :



x	0	6,3	$+\infty$
$f(x)$	↗	595,35	↘

c) D'après l'étude de la fonction f : La recette maximale que peut envisager cette société est obtenue avec un prix de vente unitaire de 6,30 D.

Sommaire



Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

Section : Mathématiques

Quatrième année de l'enseignement secondaire

BAC

Ce parascolaire s'adresse aux élèves de l'enseignement secondaire. Son principal objectif est de venir en aide aux apprenants. D'ailleurs, le livre se donne les moyens de ses objectifs.

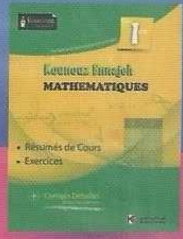
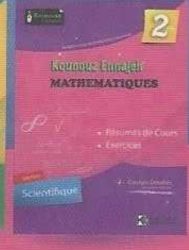
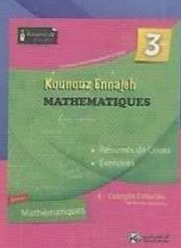
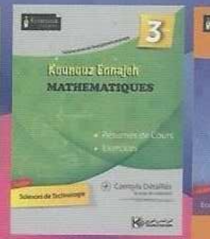
En effet, ce parascolaire se veut un allié de l'apprentissage des mathématiques. Il allie cours, approfondissement et enrichissement des connaissances. Dans un souci d'efficacité, nous avons délibérément choisi de suivre la démarche et la progression proposées dans le manuel scolaire Par conséquent, les modules présentés vont en parallèle avec ceux du manuel scolaire afin de mieux répondre aux attentes et aux besoins des élèves.

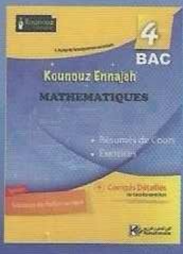
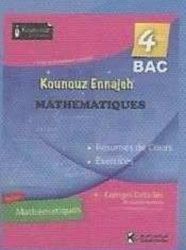
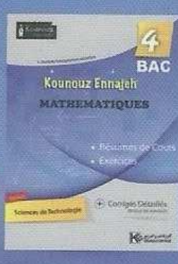
Ainsi, à l'instar du manuel, chaque chapitre s'organise autour de plusieurs activités :

- Résumés du cours
- Exercices
- Corrigés des exercices



Dans la même Collection

7ème année de Base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية– علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

8ème annee de Base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

9ème année de base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات – جذاذات

1ème année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات
العربية – الفرنسية –الإنقليزية – امتحانات
Devoirs– informatique– SVT
Physique.chimie

2ème annee de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات
العربية – الفرنسية –الإنقليزية – امتحانات
Devoirs- informatique- SVT
Physique.chimie

3ème annee de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات– تاريخ و جغرافيا
العربية – الفرنسية –الإنقليزية
Devoirs- informatique- SVT- Economie.Gestion
Technologie- Physique.chimie

4ème annee de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات– تاريخ و جغرافيا
العربية – الفرنسية –الإنقليزية
Devoirs- informatique- SVT
Economie.Gestion
Technologie- Physique.chimie



www.kounouz-edition.com

Prix : 12.500 DT



ISBN : 978-9938-06-666-1